Introduzione alle equazioni differenziali attraverso esempi

(Versione: 25 Novembre 2020)

Indice:

- Campi di direzioni e soluzioni di un'equazione differenziale.
- Equazioni separabili.
- Esistenza e unicità locale della soluzione di un Problemi di Cauchy.
- Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Struttura dello spazio delle soluzioni.
- Equazione logistica.

Campi di direzioni e soluzioni di equazioni differenziali

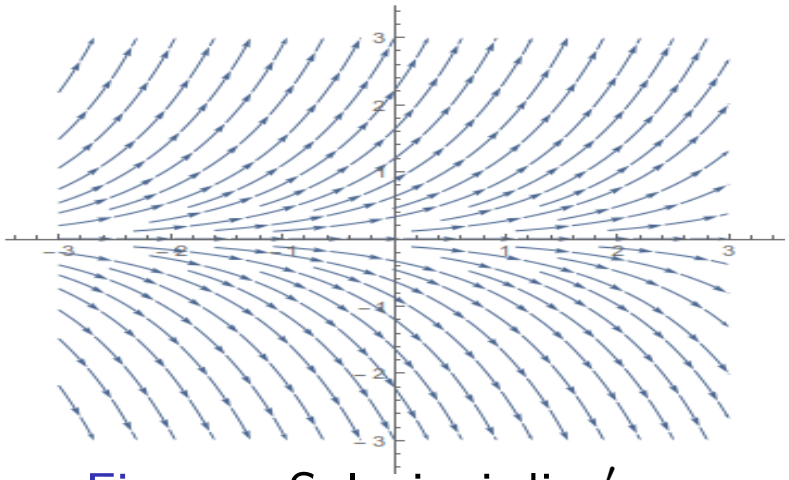


Figura : Soluzioni di $y' = y$

$\boxed{y' = y}$ È un'equazione lineare omogenea, cioè del tipo $y' + a(x)y = 0$ (dove $a \in C^0$ è una funzione data). Fissato un punto (x_0, y_0), esiste una e una sola soluzione $y = y(x)$ passante per per quel punto $(y(x_0) = y_0)$.

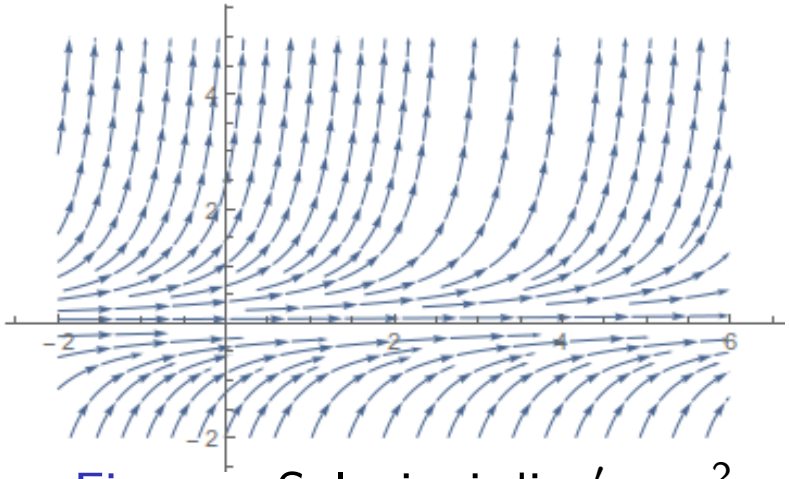


Figura : Soluzioni di $y' = y^2$

$\boxed{y' = y^2}$ È un'equazione separabile, cioè del tipo $y' = g(x)h(y)$. Se $g \in C^0(I)$, $h \in C^1(J)$, I, J intervalli di $\mathbb{R}$, fissato un punto (x_0, y_0), esiste una e una sola soluzione $y = y(x)$ passante per per quel punto.

Esempio (Equazione a variabili separabili, o equazione separabile)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

L'equazione $y' = y^2$ è del tipo $y' = g(x)h(y)$, dove $g(x) = 1$ e $h(y) = y^2$, con $g \in C^0(\mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R})$. Il Teorema di Esistenza e Unicità Locale (che enunciamo dopo) dice che il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione $y(x)$ definita su un intervallo massimale contenente $x_0 = 0$.

Cerchiamo la soluzione di questo problema di Cauchy. Cerchiamo anzitutto le eventuali soluzioni costanti o di equilibrio. L'unica soluzione costante di $y' = y^2$ è $y = 0$, ma non soddisfa $y(0) = 1$, e quindi non è soluzione del problema di Cauchy.

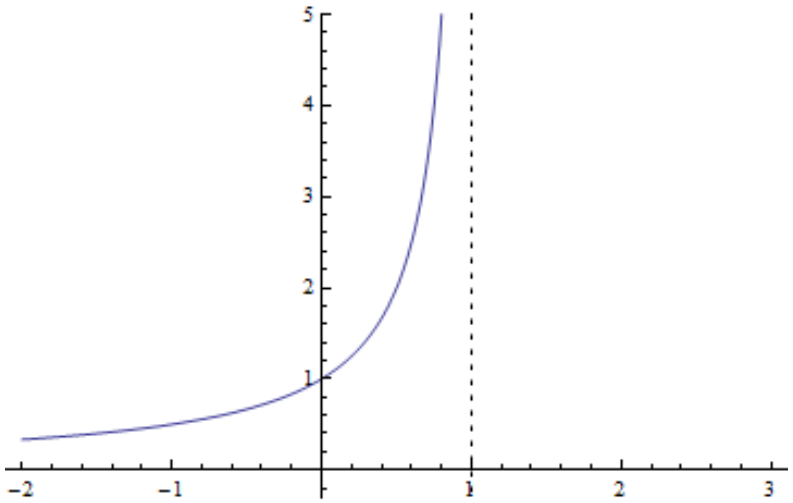
Sia $y(x)$ la soluzione cercata del problema (1). Poiché $y(0) = 1$, $y(x)$ si mantiene (per continuità) diversa da zero vicino a $x_0 = 0$. Dividiamo allora per y^2:

$$\frac{y'}{y^2} = 1 \quad \text{ossia} \quad \frac{dy}{y^2} = dx$$

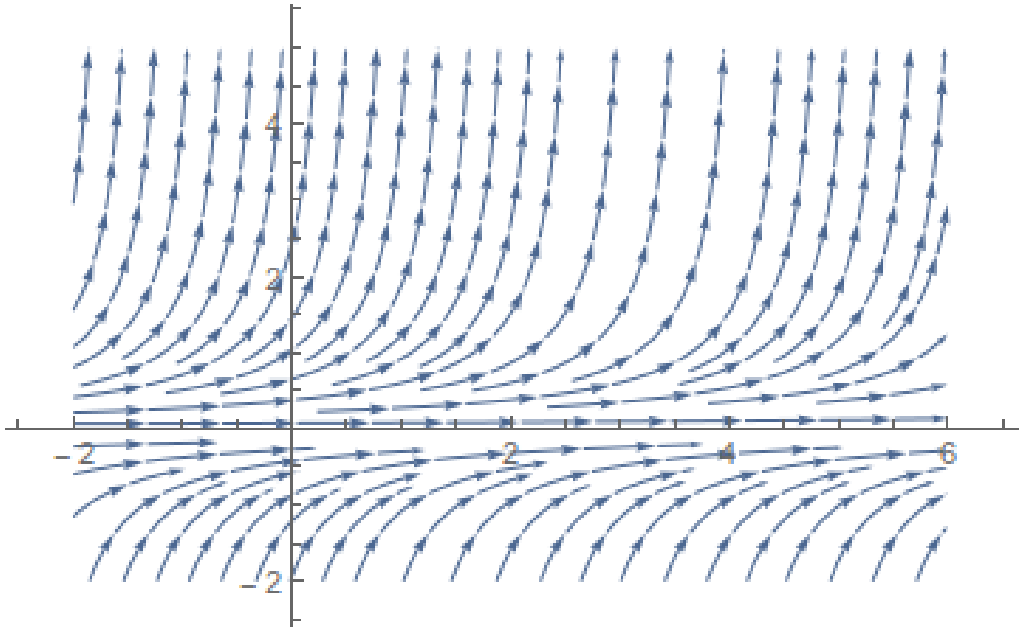
Integrando:

$$-\frac{1}{y} = x + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

La condizione $y(0) = 1$ impone $c = -1$. Dunque, la soluzione è $y(x) = \dfrac{1}{1-x}$ il cui intervallo massimale è $(-\infty, 1)$. ('Esplosione').



Un altro problema di Cauchy per $y' = y^2$



Esercizio

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = -1 \end{cases} \tag{2}$$

Risposta: $y(x) = -\dfrac{1}{x+1}$. *Intervallo massimale:* $(-1, +\infty)$

Tecnica di Leibniz (1691) per risolvere $y' = g(x)h(y)$

Ogni numero $z^* \in \mathbb{R}$ per il quale $h(z^*) = 0$ fornisce una soluzione costante (o di equilibrio) $y(x) = z^*$.

Cerchiamo ora le soluzione non costanti. Scriviamo $\frac{dy}{dx}$ (notazione di Leibniz) al posto di y':

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{3}$$

e separiamo formalmente le variabili:

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx \tag{4}$$

Qui ci stiamo tacitamente restringendo a un intervallo in cui $h(y)$ non si annulli mai.

Separate le variabili, $\dfrac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$, integriamo entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx \tag{5}$$

Se $H(y)$ è una antiderivata di $1/h(y)$ e $G = G(x)$ è un'antiderivata di $g(x)$, avremo da (5)

$$H(y) = G(x) + C \tag{6}$$

A questo punto ricaviamo la funzione y, se possibile. Altrimenti, lasciamo la soluzione in forma implicita.

Equazioni a variabili separabili

Teorema (Esistenza e unicità locale della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione a variabili separabili)

Siano $I \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $J \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ *funzioni di classe* C^1, I *e* J *intervalli di* $\mathbb{R}$. *Per ogni* $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, *il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = g(x)h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{7}$$

ha una e una sola soluzione massimale $\tilde{I} \xrightarrow{y} \mathbb{R}$, *dove* $\tilde{I}$ *è un intervallo contenente* x_0. *(*$\tilde{I}$ *è incluso in* I, *ma in generale è più piccolo di* I*).*

"$\tilde{I} \xrightarrow{y} \mathbb{R}$ soluzione massimale" significa che l'intervallo $\tilde{I}$ è massimale (il più grande possibile). La unicità della soluzione massimale va intesa in questo senso: se $U \xrightarrow{y_1} \mathbb{R}$ è una soluzione di (7) su un intervallo U (con $x_0 \in U$), allora $U \subset \tilde{I}$ e $y(x) = y_1(x)$ per ogni $x \in U$.

Esempio

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{8}$$

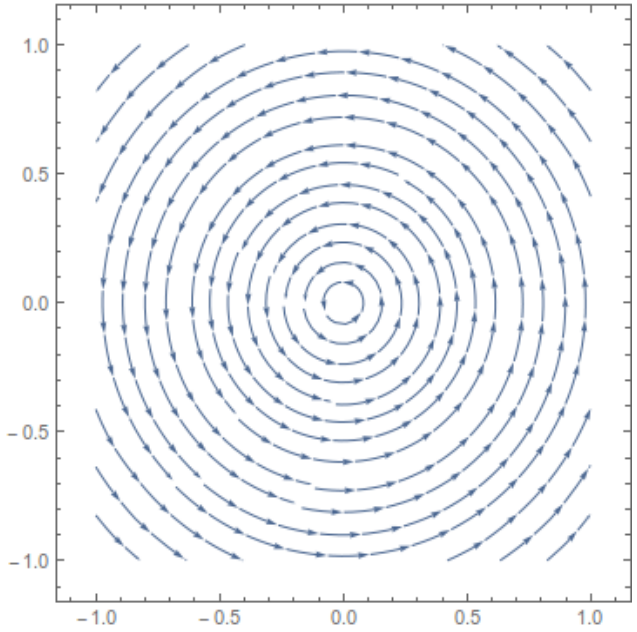


Figura : Campo di direzioni e curve integrali

Separando le variabili, scriviamo $y\,dy = -x\,dx$.
Integrando:

$$y^2 = -x^2 + C \qquad C \geq 0$$

Dunque le curve integrali sono circonferenze di centro l'origine.
Imponendo la condizione $y(0) = 1$, si ricava

$$y^2 = -x^2 + 1$$

Da $y^2 = -x^2 + 1$ segue $y = \sqrt{1 - x^2}$ oppure $y = -\sqrt{1 - x^2}$.
Poiché la condizione inizioale è $y(0) = 1$, si deve scegliere il segno positivo. Otteniamo così la soluzione:

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Dunque, l'intervallo massimale della soluzione del problema di Cauchy è $(-1, 1)$.

Esempio

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 y^3 \\ y(1) = 3 \end{cases} \tag{9}$$

Separando le variabili, otteniamo

$$\frac{dy}{y^3} = x^2\, dx$$

Allora $\displaystyle\int \frac{dy}{y^3} = \int x^2\, dx$, e quindi $\displaystyle -\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{3}x^3 + C$

La condizione $y(1) = 3$ dà $-1/18 = 1/3 + C$, da cui $C = -7/18$.

Sostituendo questo valore di C nell'equazione (10), otteniamo la soluzione

$$y(x) = \frac{3}{\sqrt{7 - 6x^3}} \tag{10}$$

Intervallo massimale: $\left(-\infty, \sqrt[3]{7/6}\right)$.

Equazioni lineari del primo ordine

Definizione

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine è del tipo

$$\boxed{y'+a(x)\,y=f(x)} \tag{11}$$

dove $a(x)$ e $f(x)$ sono due funzioni definite e continue su uno stesso intervallo I di $\mathbb{R}$.
Se il secondo membro $f(x)$ è la funzione identicamente nulla,

$$\boxed{y'+a(x)\,y=0} \tag{12}$$

si dice che l'equazione lineare è omogenea.

ESEMPI (1) $\boxed{y' + ay = 0,\ a \in \mathbb{R}}$ (crescita esponenziale).

(2) $\boxed{T' = -k(T - T_A)}$ (Legge di raffreddamento di Newton)
($T = T(t)$ temperatura di un corpo; T_A temperatura dell'ambiente; k costante positiva.)

Teorema (Equazione lineare omogenea del primo ordine)

1. *La soluzione generale dell'equazione lineare omogenea del primo ordine*

$$y' + a(x)\, y = 0 \tag{13}$$

dove $a(x)$ è una funzione continua su un intervallo J, è

$$\boxed{y(x) = Ce^{-A(x)} \qquad C \in \mathbb{R}} \tag{14}$$

dove $A(x)$ è una qualunque antiderivata di $a(x)$ su J (cioè, $A'(x) = a(x)$ per ogni $x \in J$).
Quindi ogni soluzione dell'equazione (13) può essere estesa sull'intero intervallo J sul quale è definita la funzione $a(x)$.

2. *L'unica soluzione y soddisfacente la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ è data dalla formula*

$$\boxed{y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt}} \tag{15}$$

Dimostrazione (a) Dimostriamo che ogni funzione del tipo $y(x) = Ce^{-A(x)}$ è soluzione di (13). Calcoliamo y':
$y' = C(-A')e^{-A} = C(-a)e^{-A}$. Quindi,

$$y' + ay = C(-a)e^{-A} + a\left(Ce^{-A}\right) = 0$$

(b) Dimostriamo che ogni soluzione g di (13) è del tipo $g(x) = Ce^{-A(x)}$. A questo scopo, basta dimostrare che ge^A è costante. Basta calcolare la derivata:
$(ge^A)' = g'e^A + gA'e^A = e^A(g' + ag) = 0$ ($g' + ag = 0$ per ipotesi). Dunque $ge^A = C$ (C costante), cioè $g(x) = Ce^{-A(x)}$.

(c) La funzione $A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$ è una primitiva di $a(x)$. Quindi $y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}$ è soluzione di (13). Inoltre, $A(x_0) = 0$ e quindi $y(x_0) = y_0 e^0 = y_0$. Q.E.D.

Osservazione Non importa quale primitiva $A(x)$ si scelga. Se B è un'altra primitiva, $A = B + h$ ($h \in \mathbb{R}$) e quindi
$Ce^{-A} = Ce^{-B-h} = (Ce^{-h})e^{-B} = C'e^{-B}$, con $C' \in \mathbb{R}$ arbitraria.
Dunque, alla fine si ottiene sempre la stessa soluzione generale.

Esempio (Problema di Cauchy)

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \alpha y \\ y(0) = K \end{cases} \tag{16}$$

($\alpha, K \in \mathbb{R}$ fissati in modo arbitrario) ha l'unica soluzione

$$y(x) = Ke^{\alpha x} \tag{17}$$

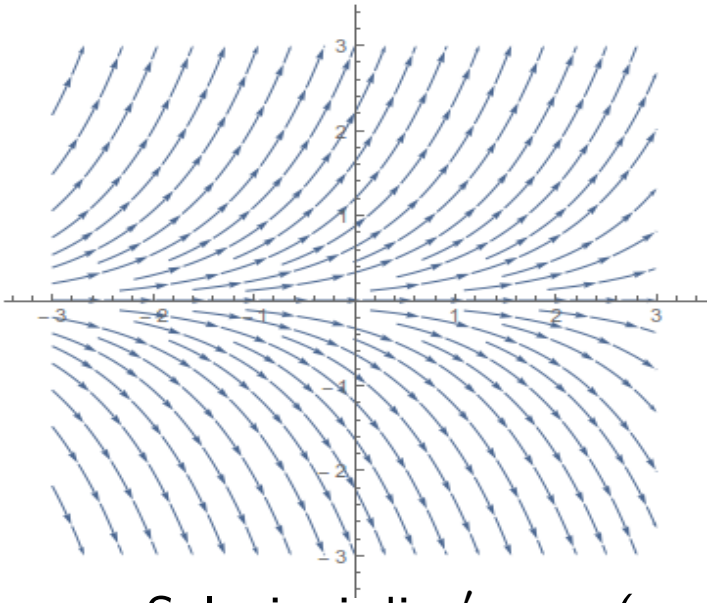


Figura : Soluzioni di $y' = y$, (o $y' = \alpha y$, $\alpha > 0$)

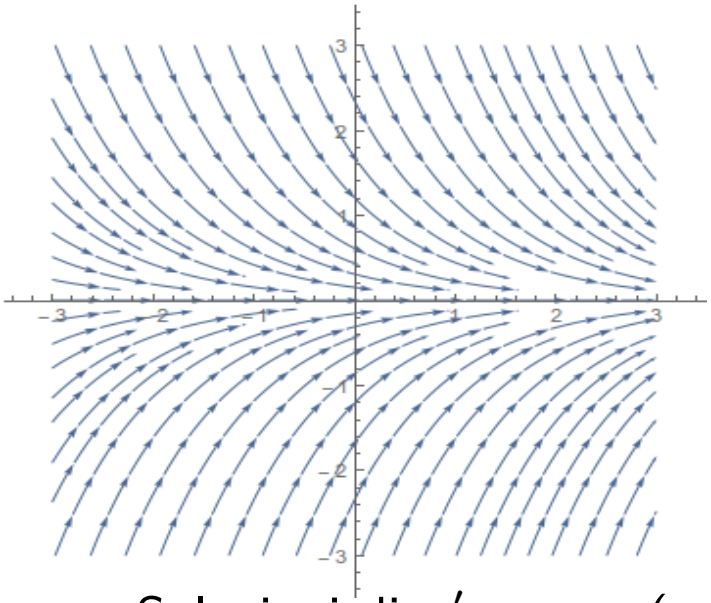


Figura : Soluzioni di $y' = -y$, (o $y' = \alpha y$, $\alpha < 0$)

Soluzioni di un'equazione lineare non omogenea

$y' + a(x)\,y = f(x)$ Equazione lineare non-omogenea

$y' + a(x)\,y = 0$ Equazione lineare omogenea associata

Spazio delle soluzioni dell'equazione non omogenea

$=$

Spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea

$+$

Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

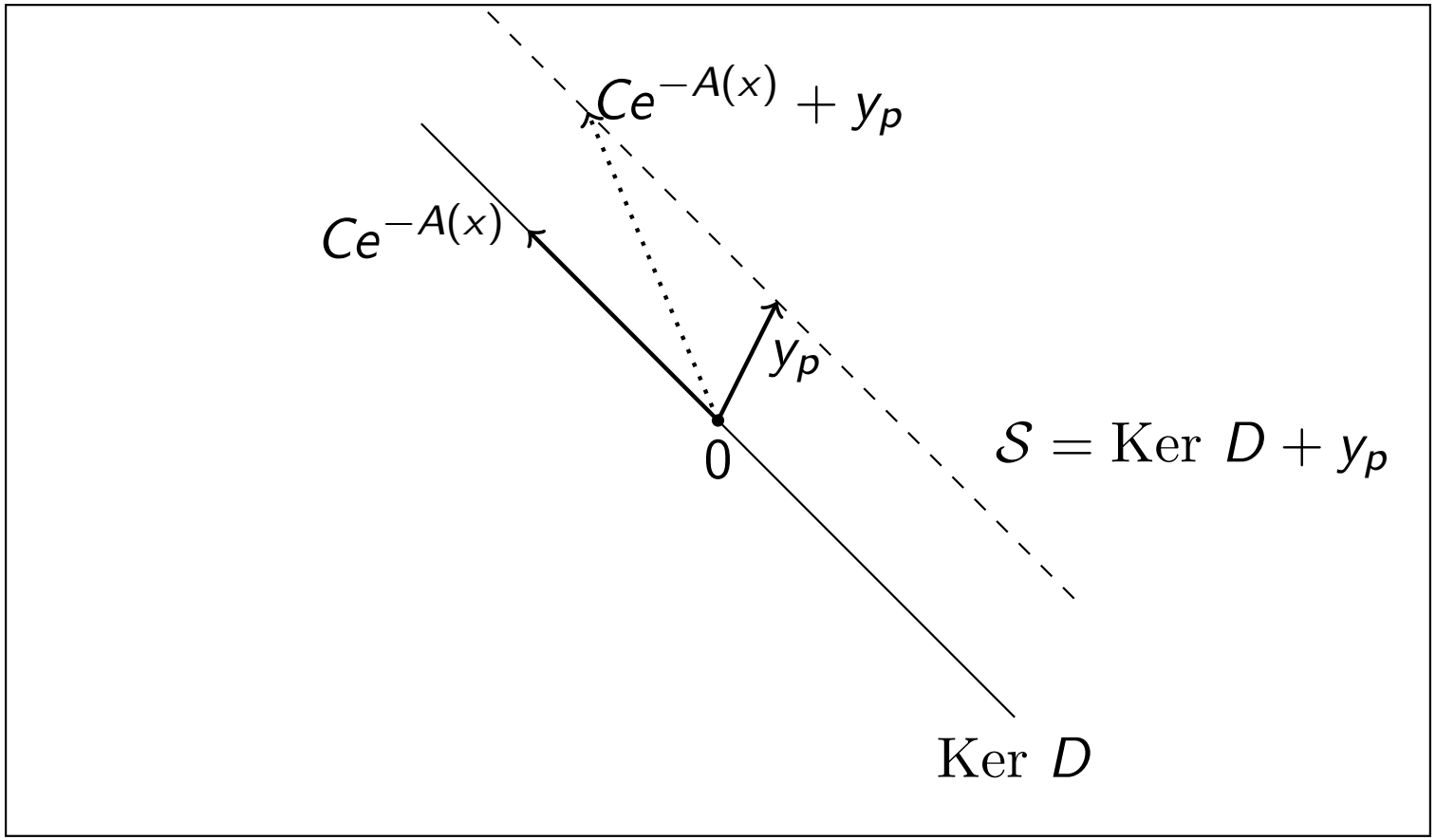


Figura : $\mathrm{Ker}\ D$ (inglese: kernel; italiano: nucleo): spazio vettoriale (di dimensione 1) delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea, costituito da tutti i multipli Ce^{-A} di una soluzione e^{-A}. La funzione y_p è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Le soluzioni dell'equazione non omogenea formano lo spazio affine $\mathcal{S} = y_p + \mathrm{Ker}\ D$.

Struttura dello spazio delle soluzioni

$$y' + a(x)\,y = f(x) \qquad \text{Equazione lineare non-omogenea} \tag{18}$$

$$y' + a(x)\,y = 0 \qquad \text{Equazione lineare omogenea associata} \tag{19}$$

Teorema (Struttura dello spazio delle soluzioni)

Sia y_p una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (18). Allora:
(a) Ogni soluzione y di (18) si scrive come $y = y_0 + y_p$, dove y_0 è una soluzione dell'equazione omogenea associata (19).
(b) Ogni funzione del tipo $y_0 + y_p$, dove y_0 è una soluzione dell'equazione omogenea associata (19), è soluzione dell'equazione non-omogenea (18).

Dimostrazione

Poniamo

$$Dy = y' + a(x)\, y \tag{20}$$

(Se $a \in C^0(J)$, possiamo pensare a D come a un operatore $C^1(J) \to C^0(J)$.) Allora si vede subito che D è un operatore lineare:

$$D(y_1 + y_2) = Dy_1 + Dy_2 \tag{21}$$

$$D(\lambda y) = \lambda Dy \tag{22}$$

per ogni $y, y_1, y_2 \in C^1(I)$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. L'equazione lineare $y' + a(x)y = f(x)$ si scrive allora:

$$Dy = f(x) \tag{23}$$

Dimostrazione (Continua)

NOTAZIONI. Denotiamo con:
y_0 una qualunque soluzione dell'equazione omogenea ($Dy_0 = 0$);
y_p una soluzione particolare della non omogenea. ($Dy_p = f$).

a) Dimostriamo: $Dy = f \implies y = y_0 + y_p$.
Infatti, da $D(y) = f$ e $D(y_p) = f$, segue

$$D(y - y_p) = D(y) - D(y_p) = f - f = 0$$

Dunque $y - y_p = y_0$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata. Quindi si può scrivere: $y = y_0 + y_p$.

b) Dimostriamo: $y = y_0 + y_p \implies Dy = f$.
Infatti,

$$Dy = D(y_0 + y_p) = D(y_0) + D(y_p) = 0 + f = f$$

Q.E.D.

Data l'equazione lineare non omogenea

$$y' + a(x)\,y = f(x) \tag{24}$$

cerchiamo una soluzione particolare che sia del tipo

$$y_1 = ce^{-A(x)} = c(x)e^{-A(x)} \tag{25}$$

($A(x)$: una qualunque antiderivata di $a(x)$) dove ora però si assume che $c = c(x)$ sia (non più una costante, bensì) una funzione (da determinare). Sostituendo (25) in (24) si ottiene (con semplici calcoli)

$$c'(x) = f(x)e^{A(x)}, \quad \text{e dunque} \quad c(x) = \int f(x)e^{A(x)}\,dx$$

Conclusione: una soluzione particolare è

$$\boxed{e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}\,dx} \tag{26}$$

Dal teorema di struttura e dal calcolo di una soluzione particolare segue:

Teorema (Soluzione generale di un'equazione lineare del primo ordine)

La soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine

$$y' + a(x)\,y = f(x) \tag{27}$$

è data da

$$y = \underbrace{Ce^{-A(x)}}_{\text{Soluzione generale dell'omogenea}} + \underbrace{e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}\,dx}_{\text{Soluzione particolare della non omogenea}}$$

dove $A(x)$ è una qualunque primitiva di $a(x)$, C è una costante arbitraria e $\int f(x)e^{A(x)}\,dx$ denota una qualunque antiderivata di $f(x)e^{A(x)}$.

Principio di Sovrapposizione

La linearità implica questa importante proprietà:

Teorema (Principio di sovrapposizione)

Se z_1 e z_2 sono soluzioni delle due equazioni (lineari non omogenee)

$$Dz = f_1 \qquad\qquad Dz = f_2 \tag{28}$$

(f_1, f_2 continue su un intervallo I) allora $z_1 + z_2$ è soluzione dell'equazione

$$Dz = f_1 + f_2 \tag{29}$$

Ad esempio, se due sassi sono gettati nell'acqua, le onde provocate da ciascuno di essi possono essere calcolate separatamente e poi le perturbazioni sommate.

Dimostrazione (Principio di Sovrapposizione)

Per ipotesi,

$$Dz_1 = f_1 \qquad\qquad Dz_2 = f_2 \tag{30}$$

Sommando membro a membro, poiché $D(z_1 + z_2) = Dz_1 + Dz_2$, si ha

$$D(z_1 + z_2) = Dz_1 + Dz_2 = f_1 + f_2 \tag{31}$$

Dunque $z_1 + z_2$ è soluzione dell'equazione $Dz = f_1 + f_2$. Q.E.D.

Esempio

Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y' - x^2 y = 0 \tag{32}$$

Si può vedere sia come equazione separabile, sia come equazione lineare del primo ordine omogenea.
Risolviamola come equazione lineare del primo ordine omogenea.
Una antiderivata di $a(x) = -x^2$ è $A(x) = -\frac{1}{3}x^3$.
La soluzione generale è

$$Ce^{\frac{1}{3}x^3}, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{33}$$

Esempio

Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y' - xy = x \tag{34}$$

Si tratta di una equazione lineare del primo ordine omogenea. Se $a(x) = -x$, una antiderivata di $a(x)$ è $A(x) = -\frac{1}{2}x^2$.
Una antiderivata di $e^{A(x)}f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}x$ è

$$\int e^{-\frac{1}{2}x^2}x = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Dunque la soluzione generale è data da:

$$Ce^{\frac{1}{2}x^2} + e^{\frac{1}{2}x^2}\int e^{-\frac{1}{2}x^2}x\,dx = Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{35}$$

Esempio

Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine

$$y' + y = 7 \tag{36}$$

e la soluzione del problema di Cauchy $y' + y = 7$, $y(0) = 1$.

Una antiderivata di $a(x) = 1$ è $A(x) = x$. La soluzione generale è

$$Ce^{-x} + e^{-x} \int 7e^{x}\, dx = Ce^{-x} + 7, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{37}$$

Si noti che la funzione costante $y_p = 7$ è una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea $y' + y = 7$.
La soluzione del problema di Cauchy $y' + y = 7$, $y(0) = 1$, è

$$-6e^{-x} + 7 \tag{38}$$

Esempio

Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + x^2 y = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases} \tag{39}$$

La soluzione del problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine

$$\begin{cases} y' + a(x)y &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{40}$$

($a(x), f(x)$ di classe $C^0(I)$), è data da:

$$y(x) = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} f(u) e^{A(u)}\, du \tag{41}$$

dove

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(u)\, du \tag{42}$$

Esempio (Continua)

Nel problema di Cauchy (0.16), si ha $a(x) = x^2$ e $f(x) = x^2$. Quindi la soluzione è

$$\begin{aligned}
\overline{y}(x) &= 2e^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \int_0^x e^{\frac{t^3}{3}} t^2 \, dt \\
&= 2e^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \left[e^{\frac{t^3}{3}} \right]_0^x \\
&= 2e^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \left(e^{\frac{x^3}{3}} - 1 \right) \\
&= \boxed{e^{-\frac{x^3}{3}} + 1}
\end{aligned}$$

Un modello di legge di raffreddamento (Legge di Newton. Equazione lineare del 1^0 ordine)

Esempio (Problema di Cauchy per il raffreddamento di un corpo)

$$\begin{cases} T' = k(T_A - T) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

$T = T(t)$: temperatura, all'istante t, di un corpo caldo che si sta raffreddando. Supponiamo $t \in [0, +\infty)$.
T_A: temperatura costante dell'ambiente circostante.
$k > 0$: costante positiva (dipendente dalla capacità termica del corpo, dalla sua forma etc.).
$T(0)$: temperatura del corpo all'istante $t_0 = 0$. $T_0 > T_A$.
Soluzione: $\boxed{T(t) = T_A + (T_0 - T_A)e^{-kt}}$

Soluzione di $T' = k(T_A - T)$, $T(0) = T_0 (> T_A)$

Come equazione separabile: Soluzione costante: $T = T_A$.

- $\dfrac{dT}{T - T_A} = -k\,dt$. Se $T > T_A$,
  $\ln(T - T_A) = -kt + c$; Per $t_0 = 0$: $\ln(T_0 - T_A) = c$.
- $\ln(T - T_A) - \ln(T_0 - T_A) = -kt$
- $\ln \dfrac{T - T_A}{T_0 - T_A} = -kt$ $\qquad \dfrac{T - T_A}{T_0 - T_A} = e^{-kt}$
- $T(t) = T_A + (T_0 - T_A)e^{-kt}$

Come equazione lineare: $T' + kT = kT_A$.

- Una soluzione particolare costante è T_A.
- Soluzione generale: $T(t) = Ce^{-kt} + T_A$.
- La condizione iniziale $T(0) = T_0$ impone $C = T_0 - T_A$.
  Soluzione del problema di Cauchy:
  $T(t) = T_A + (T_0 - T_A)e^{-kt}$

Esempio (Equazione logistica: modello di crescita di una popolazione.)

Trovare le soluzioni dell'equazione a variabili separabili

$$y' = y(1-y) \tag{43}$$

Cominciamo a trovare le funzioni costanti che sono soluzioni (di equilibrio): sono $y_1 = 0$ e $y_2 = 1$. Ora separiamo le variabili:

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y), \qquad \frac{dy}{y(y-1)} = dt \tag{44}$$

Quindi

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dt, \quad \text{ossia} \quad \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = \int dt \tag{45}$$

Per calcolare le primitive (45), distinguiamo due casi.

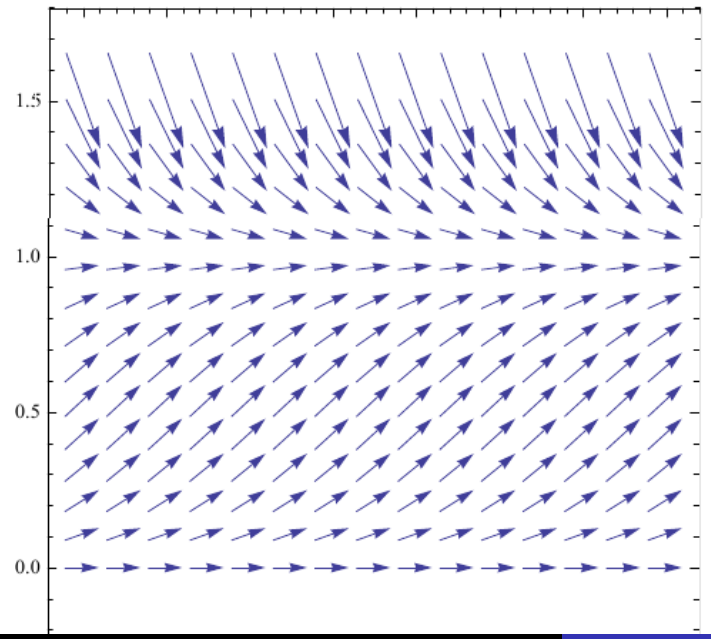
(i) Nella striscia $0 < y < 1$

$\log y - \log(1-y) = \log \dfrac{y}{1-y} = t + C$, ossia

$$\frac{y}{1-y} = e^{t+C} = e^t e^C = Ke^t \tag{46}$$

dove $K = e^C > 0$ è una costante positiva arbitraria. Si ricava:

$$\boxed{y = y(t) = \frac{Ke^t}{1+Ke^t}, \quad K > 0, \ \ (\text{se } 0 < y < 1)}$$

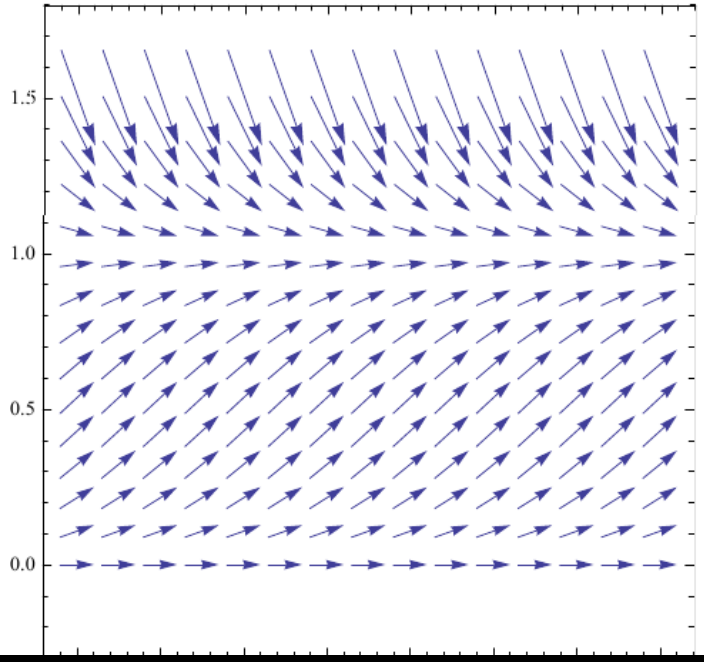


(ii) Nel semipiano $y > 1$ (dove $1 - y < 0$),
$\log y - \log(y-1) = \log \dfrac{y}{y-1} = t + C'$, ossia

$$\frac{y}{y-1} = e^{t+C'} = e^t e^{C'} = K' e^t \tag{47}$$

dove $K' = e^{C'} > 0$. Di qui, posto $H = -K' < 0$, ricaviamo :

$$\boxed{y = y(t) = \frac{He^t}{1 + He^t}, \quad H < 0, \ \ (\text{se } y > 1)}$$



La soluzione $y_1 = 0$ è di equilibrio instabile; si ottiene ponendo $K = 0$. Invece, $y_2 = 1$ è una soluzione di equilibrio stabile. Si può pensare di ottenere $y_2 = 1$ per $K \to +\infty$ (o per $H \to -\infty$).

Dallo studio del campo di direzioni possiamo indovinare l'andamento delle curve integrali, ossia dei grafici delle soluzioni:

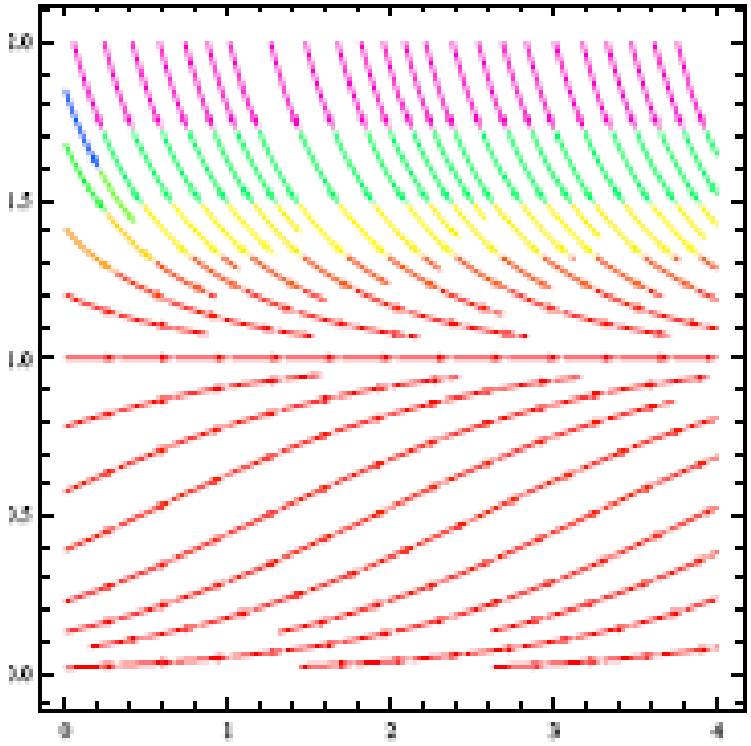


Figura : Curve integrali (cioè grafici delle soluzioni) dell'equazione logistica $y' = (1 - y)y$. Queste curve si chiamano curve logistiche.

.