Teorema di Weierstrass. Teoremi sulle funzioni derivabili

- Teorema di Weierstrass. (Funzioni continue su un compatto).
- Teorema di Fermat.
- Teorema di Rolle.
- Teorema dei valori intermedi (o degli incrementi finiti) di Lagrange.
- Funzioni derivabili monotòne su un intervallo.
- Teorema di Cauchy.
- Regola di de L'Hospital.

(Versione: 14/10/2020)

Funzioni continue su un compatto. (Weierstrass)

Definizione (Funzione limitata)

Una funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *si dice* *limitata* *se la sua immagine* $\mathrm{Im}(f)$ *è un sottoinsieme limitato di* $\mathbb{R}$*:*

$$(\exists H \in \mathbb{R})\,(\forall x \in D) \quad |f(x)| \leq H$$

Teorema (Weierstrass, versione 1.)

Una funzione $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *continua su un intervallo compatto* $[a, b]$ *è* *limitata*. *Inoltre,* f *assume il* *valore massimo* *e il* *valore minimo*. *Cioè, esistono* $p, q \in [a, b]$ *tali che, per ogni* $x \in [a, b]$*:*

$$f(q) \leq f(x) \leq f(p)$$

Il Teorema di Weierstrass. (Formulazione equivalente)

Il teorema di Weierstrass si può enunciare nel modo seguente:

Teorema (Weierstrass, versione 2.)

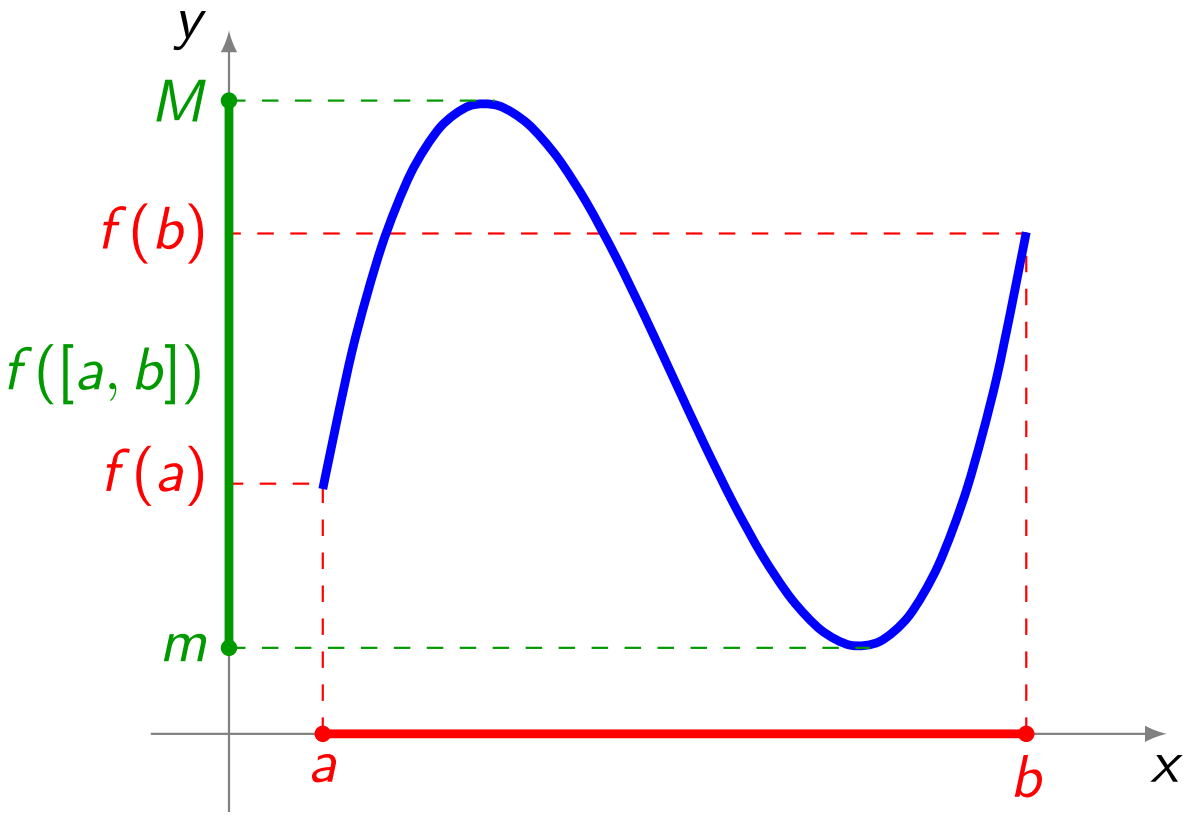
Se $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è una funzione continua su un intervallo compatto* $I = [a, b]$*, allora la sua immagine* $f(I)$ *è l'intervallo compatto:*

$$f([a, b]) = [m, M]$$

dove m *e* M *sono il valore minimo e il valore massimo che* f *assume sul suo dominio* $I = [a, b]$*.*

Commento. Per il teorema dei valori intermedi, $f([a, b])$ deve essere un intervallo J. Per Weierstrass versione 1, J deve essere limitato e inoltre deve contenere il valore minimo m e il valore massimo M. Quindi si deve avere $J = [m, M]$.

Il Teorema di Weierstrass. $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$



Ogni funzione continua su un intervallo compatto è limitata e assume il valore massimo e il minimo; $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$.

Il Teorema di Weierstrass. Dimostrazione

DIMOSTRAZIONE.(Teorema di Weierstrass) Dimostriamo che f assume il valore massimo (idem per il minimo). Sia $L = \sup f$ su $I_0 = [a, b]$. A priori, potrebbe essere $L = +\infty$, ma la dimostrazione ci dirà che L è finito. Bisechiamo I_0 con il punto di mezzo c_1. In (almeno) uno degli intervalli $[a, c_1]$, $[c_1, b]$, chiamiamolo I_1, si avrà $\sup_{I_1} f = L$. Iterando le bisezioni, costruiamo una successione di intervalli compatti inscatolati I_n di ampiezza tendente a 0; sia $c \in [a, b]$ il punto da essa individuato. Per la continuità di f in c, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \implies \left[f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon \right]$$

Siccome ci sono intervalli I_n interamente contenuti in $(c - \delta, c + \delta)$ si può affermare che $L \leq f(c) + \varepsilon$. Del resto, $f(c) \leq L$. Dunque, $f(c) \leq L \leq f(c) + \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε, si deduce che $L = f(c)$. Dunque $f(c)$ è il valore massimo (assoluto o globale) e c è un punto di massimo.

Punti di massimo o minimo locale per una funzione

Definizione

Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione definita su un sottoinsieme* $D \subset \mathbb{R}$.

1. *Un punto* $x_0 \in D$ *è punto di massimo locale per* f, *e il valore* $f(x_0)$ *si chiama un massimo locale per* f, *se esiste un intorno* I *di* x_0 *tale che per ogni* $x \in I \cap D$ *si abbia*

$$f(x_0) \geq f(x) \tag{1}$$

2. *Un punto* x_0 *in* D *è un punto di minimo locale per* f, *e il valore* $f(x_0)$ *si chiama un minimo locale per* f, *se esiste un intorno* I *di* x_0 *tale che per ogni* $x \in I \cap D$ *si abbia*

$$f(x_0) \leq f(x) \tag{2}$$

Teorema d Fermat

Definizione

Un punto x_0, appartenente a un insieme $D \subset \mathbb{R}$, si dice interno a D se esiste un intorno $I(x_0; r) = (x_0 - r, x_0 + r)$, di raggio $r > 0$, incluso in D:

$$I(x_0; r) \subset D$$

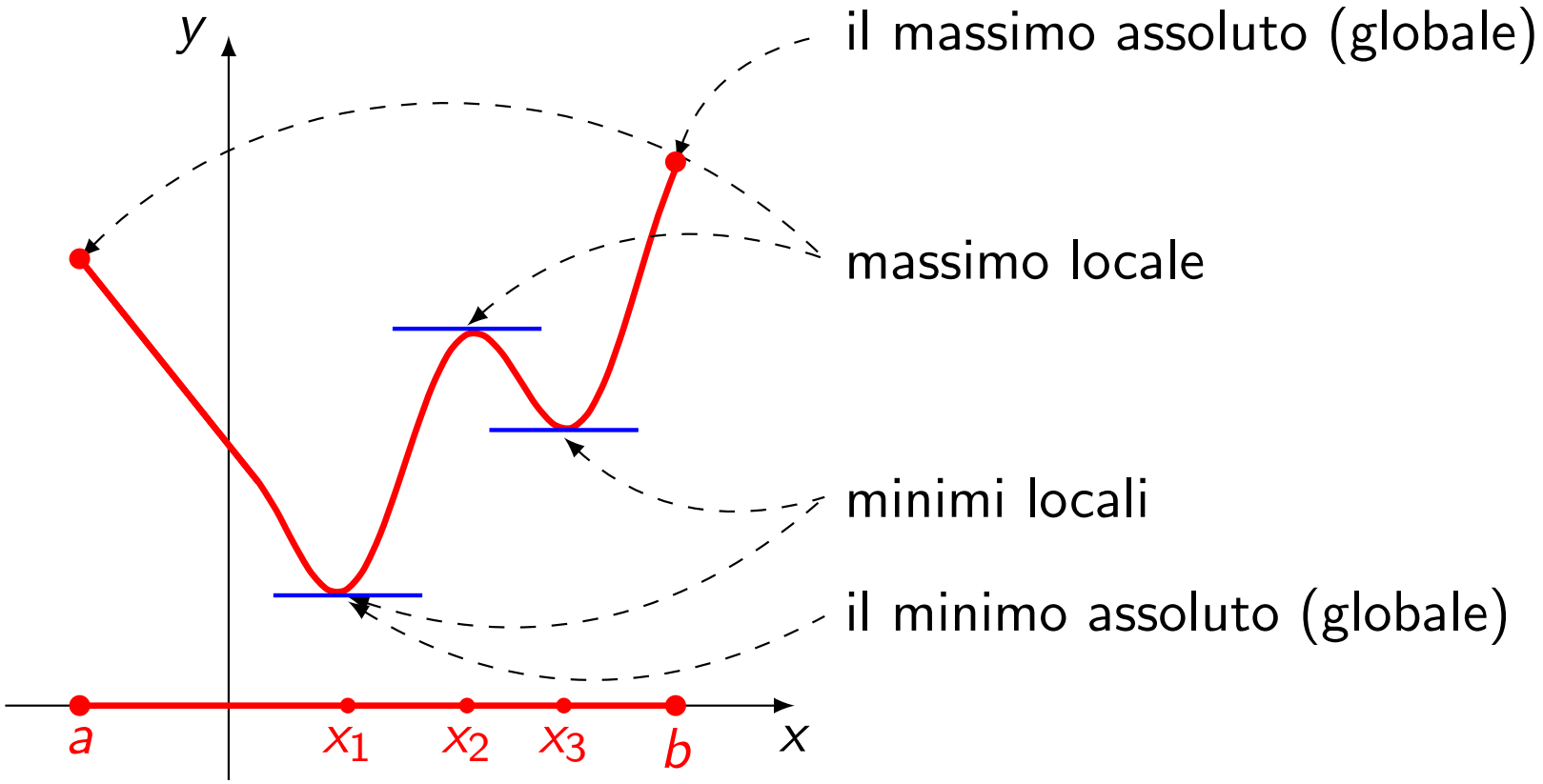
Teorema (Fermat)

Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione a valori reali definita su un insieme $D \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che:

1. *x_0 sia un punto di massimo (o di minimo) locale per f;*
2. *x_0 sia interno a D;*
3. *f sia derivabile in x_0.*

Allora x_0 è un punto stazionario di f (o critico), cioè $f'(x_0) = 0$.

Punti di massimo o minimo locale interni o di frontiera



x_1, x_2, x_3: punti di minimo o massimo locale, interni, in cui la funzione è derivabile: $\Longrightarrow$ (Fermat) $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$.
a, b: punti di massimo locale (o globale) non interni (sulla frontiera). (Non soddisfano le ipotesi del teorema di Fermat).

Dimostrazione del teorema di Fermat

Sia x_0 un punto di massimo locale per f. Esiste un intorno sufficientemente piccolo I di x_0 con le due proprietà seguenti: $I \subset D$ (perché x_0 è interno a D) e

$$\forall x \in I \qquad f(x) - f(x_0) \leq 0 \tag{3}$$

(perché x_0 è punto di massimo locale). Per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$, si ha allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \tag{4}$$

se $x > x_0$ e

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \tag{5}$$

se $x < x_0$. Passando al limite per x che tende a x_0, si ricava rispettivamente $f'(x_0) \leq 0$ e $f'(x_0) \geq 0$. Di conseguenza $f'(x_0) = 0$. $\square$

Teorema di Rolle

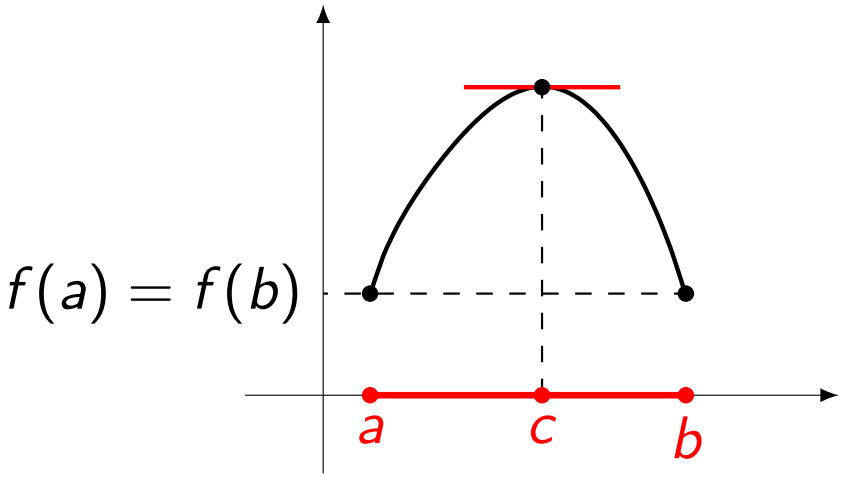
Teorema (Rolle, 1690)

IPOTESI

1. $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *continua su* $[a, b]$, *derivabile su* (a, b).
2. $f(a) = f(b)$

TESI

$\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0$



Dimostrazione (teorema di Rolle)

Per il teorema di Weierstrass la funzione f, continua sul compatto $[a, b]$, assume il suo valore massimo M e il suo valore minimo m. Questo significa che esistono (almeno) un punto $x_M \in [a, b]$ e (almeno) un punto $x_m \in [a, b]$ tali che $f(x_M) = M$ e $f(x_m) = m$. Sono possibili due casi.

(1) Sia x_M sia x_m cadono negli estremi di $[a, b]$. In tale caso, per l'ipotesi $f(a) = f(b)$, si ha $M = m$. Ma allora f è costante, e quindi $f'(x) = 0$ addirittura in ogni punto x di (a, b).

(2) Almeno uno dei due punti x_m, x_M è interno ad $[a, b]$. Allora, per il teorema di Fermat, in un tale punto la derivata si annulla .

Dunque, in ogni caso esiste (almeno) un punto c nell'intervallo aperto (a, b) in cui la derivata si annulla. $\square$

Teorema del Valore Medio (o degli incrementi finiti)

Teorema (del Valore Medio (di Lagrange))

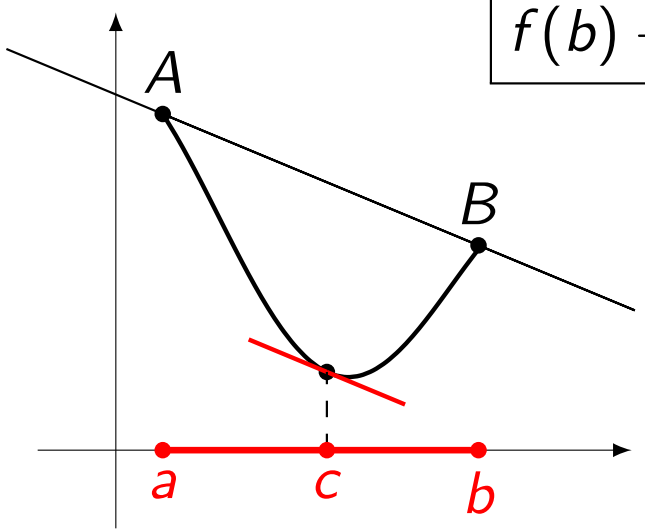
IPOTESI

$[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *continua su* $[a, b]$, *derivabile su* (a, b).

TESI

$\exists c \in (a, b) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)}$$



Dimostrazione del teorema del valore medio (Lagrange)

La funzione, definita sull'intervallo $[a, b]$,

$$g(x) = f(x) - \underbrace{\left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]}_{\text{retta } AB}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Dunque, esiste un punto c in (a, b) in cui $g'(c) = 0$. La derivata di $g(x)$ è

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quindi si ha

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

che è la tesi. $\square$

Funzioni con derivata nulla su un intervallo

Teorema (Derivata nulla su un intervallo)

IPOTESI

1. I *intervallo.*
2. $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *derivabile.*
3. $\forall x \in I \;\; f'(x) = 0$

TESI

f *costante. (Cioè:* $(\exists c \in \mathbb{R})\,(\forall x \in I) \;\; f(x) = c$*.)*

Dimostrazione

Prendiamo due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in I$. Per il Teorema di Lagrange, esiste un punto c, compreso tra x_1 e x_2, per il quale
$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0$
Ne segue $f(x_1) = f(x_2)$. Quindi f è costante. $\square$

Esercizio

La funzione $\mathbb{R} \setminus 0 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \qquad \forall x \neq 0$$

è costante?

Risposta. $f'(x) = 0$ per ogni x nel dominio di f, ma f non è costante. Perché? La ragione va cercata nella topologia del dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, che non è connesso (non è un intervallo di $\mathbb{R}$). La nostra funzione f è costante su ogni componente connessa del dominio; cioè, f è costante su $(-\infty, 0)$ ed è costante su $(0, +\infty)$, intervalli sui quali assume rispettivamente i valori $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. L'annullarsi della derivata implica che f sia (non costante, ma) localmente costante. Questo significa che per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$ esiste un intorno U sul quale f è costante.

Funzioni con derivate uguali su un intervallo

Teorema (Derivate uguali su un intervallo)

IPOTESI

1. *I intervallo.*
2. $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *e* $I \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *derivabili.*
3. $\forall x \in I \;\; f'(x) = g'(x)$

TESI

f e g differiscono per una costante.
(Cioè: $(\exists c \in \mathbb{R})\,(\forall x \in I) \;\; f(x) = g(x) + c$*)*

Dimostrazione

Per il teorema precedente, $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ è costante. $\square$

Funzioni monotòne e strettamente monotòne

Definizione (Funzioni monotòne e strettamente monotòne)

Siano D un sottoinsieme qualunque di $\mathbb{R}$ (non richiediamo che sia un intervallo) e $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione. La funzione f si dice:

1. *monotòna crescente (in senso debole) se:*
   $(\forall x_1, x_2 \in D) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
2. *monotòna decrescente (in senso debole) se:*
   $(\forall x_1, x_2 \in D) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$
3. *strettamente crescente se:*
   $(\forall x_1, x_2 \in D) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
4. *strettamente decrescente se:*
   $(\forall x_1, x_2 \in D) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
5. *monotòna se è monotòna crescente o monotòna decrescente.*
6. *strettamente monotòna se è strettamente crescente o strettamente decrescente.*

Funzioni derivabili strettamente monotòne

Teorema (Funzioni derivabili strettamente monotòne)

Sia I un intervallo aperto e sia f una funzione reale derivabile su I.

1. *Se $f'(x) > 0$ in ogni punto $x \in I$, allora f è strettamente crescente su I.*
2. *Se $f'(x) < 0$ in ogni punto $x \in I$, allora f è strettamente decrescente su I.*

Dimostrazione. (Affermazione (1))

Siano x_1, x_2 due punti di I, con $x_1 < x_2$. Per il Teorema di Lagrange esiste un punto c, compreso tra x_1 e x_2, per il quale

$$f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{f'(c)}_{>0}\underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} < 0$$

Dunque f è strettamente crescente su I. (La (2) è analoga). $\square$

Attenzione: nel teorema appena dimostrato, l'ipotesi che I sia un intervallo non si può eliminare:

Esercizio

Poniamo $\mathbb{R} \setminus 0 \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{1}{x}$.
Dimostrare che f *è derivabile,* $f'(x) > 0$ *per ogni* x *nel dominio di* f*, ma* f *non è strettamente crescente (e nemmeno monotòna crescente).*

Esercizio

Sia f *una funzione strettamente crescente e derivabile su un intervallo* I*. Possiamo concludere che si abbia* $f'(x) > 0$ *per ogni* $x \in I$*?*

Risposta No. Controesempio: la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = x^3$, è strettamente crescente e derivabile sull'intervallo $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$.

Funzioni derivabili monotòne su un intervallo

Teorema

Sia I un intervallo e sia f una funzione reale derivabile su I. Allora:

1. f *monotòna crescente su* $I \iff f'(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in I$
2. f *monotòna decrescente su* $I \iff f'(x) \leq 0$ *per ogni* $x \in I$

Dimostriamo l'affermazione (1) (La dimostrazione dell'affermazione (2) è analoga).

Dimostrazione dell'affermazione (1): $\Longrightarrow$

Fissiamo $x_0 \in I$. Poiché, per ipotesi, f è monotòna crescente, il rapporto incrementale è sempre maggiore o uguale a zero. Quindi (permanenza del segno), per $x \to x_0$ il limite del rapporto incrementale (la derivata) resta maggiore o uguale a zero:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Dimostrazione dell'affermazione (1): $\Longleftarrow$

Siano $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$. Per il Teorema di Lagrange, esiste un punto c, $x_1 < c < x_2$, tale che

$$f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} \leq 0$$

(Per ipotesi, $f'(c) \geq 0$.) Dunque f è monotòna crescente in I. $\square$

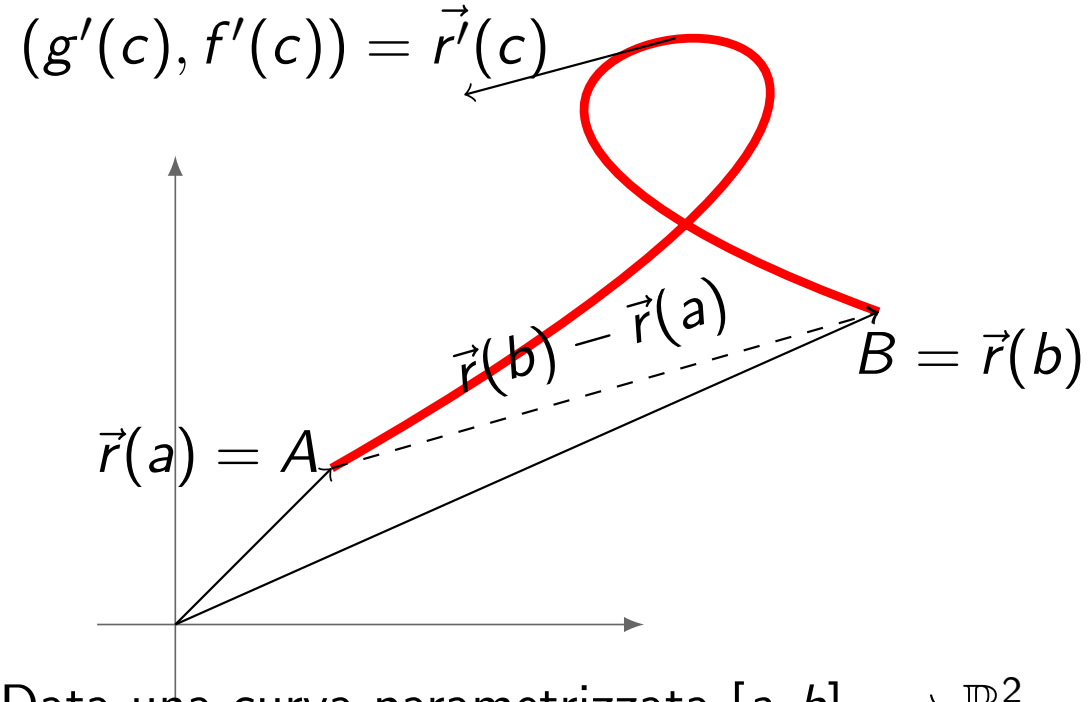
Teorema di Cauchy

Teorema (di Cauchy)

Siano f e g due funzioni continue sull'intervallo compatto $[a, b]$ e derivabili sull'intervallo aperto (a, b). Supponiamo $g'(x) \neq 0$ per ogni x in (a, b). Allora esiste (almeno) un punto $c \in (a, b)$ per il quale

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{6}$$

Interpretazione geometrica del Teorema di Cauchy



Data una curva parametrizzata $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \vec{r}(t) = (g(t), f(t))$, esiste almeno un $c \in (a, b)$ tale che il vettore velocità $\vec{r}'(c) = (g'(c), f'(c))$ sia parallelo alla corda AB che congiunge i punti estremi. (Vedere le note al sito del corso per la dimostrazione.)

Regole di de L'Hospital

Teorema (Joh. Bernoulli 1691, de L'Hospital 1696. Caso $\frac{0}{0}$.)

Siano f e g due funzioni continue sull'intervallo $[x_0, b]$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) e derivabili in (x_0, b). Supponiamo che valgano le seguenti ipotesi:

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
2. $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (x_0, b)$.
3. *Esiste (finito o infinito) il limite* $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Allora esiste anche il limite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *ed è uguale al precedente:*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Limitiamoci a fare la dimostrazione nel caso L finito.

Dimostrazione di de L'Hospital

Caso L finito.

Applichiamo il teorema di Cauchy alla coppia di funzioni f,g sull'intervallo $[x_0, x]$. Poiché $f(x_0) = g(x_0) = 0$, il teorema di Cauchy dice che esiste un c, con $x_0 < c < x$, per il quale

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Per $x \to x_0^+$, anche il punto c (essendo compreso tra $x_0 < c < x$) tende a x_0. Quindi, per $x \to x_0^+$, poiché

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

e $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to L$ anche $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \to L$. $\square$

Teorema (de L'Hospital, caso $\frac{\infty}{\infty}$. (Senza dimostrazione))

Siano f e g due funzioni continue sull'intervallo $[x_0, b]$ e derivabili in (x_0, b). Supponiamo che valgano le seguenti condizioni:

1. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty$
2. $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (x_0, b)$.
3. *Esiste (finito o infinito) il limite*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \tag{7}$$

Allora esiste anche il limite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *ed è uguale al precedente:*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \tag{8}$$

(Non facciamo la dimostrazione).

Altri casi di de L'Hospital

Infine, le regole di de L'Hospital valgono anche per le forme di indeterminazione $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ quando x tende a $+\infty$ o $-\infty$.
L'enunciato è sempre dello stesso tipo: se esiste il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

(finito o infinito) allora esiste anche il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ed è uguale al precedente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Teorema (de L'Hospital, caso $\frac{\infty}{\infty}$. (Senza dimostrazione))

Siano f e g due funzioni continue sull'intervallo $[x_0, b]$ e derivabili in (x_0, b). Supponiamo che valgano le seguenti condizioni:

1. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty$
2. $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (x_0, b)$.
3. *Esiste (finito o infinito) il limite*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \tag{9}$$

Allora esiste anche il limite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *ed è uguale al precedente:*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \tag{10}$$

(Non facciamo la dimostrazione).

Limiti importanti che si calcolano con l'Hospital.

Esercizio (Confronti tra potenze, esponenziali e logaritmi)

1. $$\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = 0, \qquad \forall a > 0$$

2. *($e^x \to +\infty$ più velocemente di qualsiasi potenza x^n)*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

3. *($x^a \to +\infty$ più velocemente del logaritmo.)*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \qquad \forall a > 0$$

4. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^a} = 0 \qquad \forall a > 0$$