Introduzione ai numeri complessi

- Numeri complessi. Operazioni.
- Modulo. Forma polare.
- Formula di De Moivre.
- Forma esponenziale.
- Rotazioni, traslazioni. Omotetie.
- Radici *n*-esime.

Definizione (Campo complesso $\mathbb{C}$. Prima definizione.)

Chiamiamo numeri complessi tutte le espressioni del tipo

$$z = a + ib, \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{1}$$

L'unità immaginaria i è soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$, ossia soddisfa

$$i^2 + 1 = 0 \qquad \text{ossia} \qquad i^2 = -1$$

a è la parte reale *e b è la* parte immaginaria *di z:*

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z),$$

Definizione (Somma e prodotto di numeri complessi)

La somma di due numeri complessi è

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

e il loro prodotto è

$$(a+ib)(a'+ib') = aa'+ia'b+iab'+i^2bb' = (aa'-bb')+i(ab'+a'b)$$

- I numeri complessi, rispetto alle operazioni definite sopra di somma e prodotto, soddisfano tutti gli assiomi di campo.
- Il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è una *estensione* del campo $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}$ si ottiene *aggiungendo* a $\mathbb{R}$ l'*unità immaginaria* i, radice del polinomio $x^2 + 1$

Teorema (importante!)

$\mathbb{C}$ *non è un campo ordinato, ossia nel campo* $\mathbb{C}$ *dei numeri complessi non è possibile definire alcun ordinamento che sia compatibile con la somma e il prodotto.*

Dimostrazione. (Vedere appunti del prof. F.G. Lastaria).

Il teorema fondamentale dell'algebra

Teorema (Teorema fondamentale dell'algebra. C.F. Gauss, 1799)

Ogni polinomio complesso di grado maggiore o uguale a 1 ha almeno una radice nel campo $\mathbb{C}$.

In algebra, un campo K si dice algebricamente chiuso se ogni polinomio a coefficienti in K ha almeno uno zero in K. Quindi il teorema fondamentale dell'algebra si può enunciare nella forma:

Il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è algebricamente chiuso.

Fattorizzazione di un polinomio complesso

Dal Teorema Fondamentale dell'Algebra segue facilmente:

Teorema (Fattorizzazione di un polinomio complesso)

Ogni polinomio complesso f di grado maggiore o uguale a 1 si fattorizza in modo unico (a meno dell'ordine dei fattori) come

$$f(Z) = a(Z - c_1)(Z - c_2) \cdot \cdots \cdot (Z - c_n) \tag{2}$$

dove $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, e $c_1, \ldots, c_n$ sono le radici complesse (non necessariamente distinte) di f. Se una radice c_j è ripetuta k volte, diciamo che è una radice di molteplicità *k.*

Possiamo dunque enunciare quest'ultimo teorema nella forma:
Ogni polinomio complesso di grado $n \geq 1$ ha esattamente n radici complesse, se ognuna delle radici è contata con la sua molteplicità.

Definizioni

- *Il* modulo *di un numero complesso* $z = a + ib$ *è il numero reale non negativo*
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- *Il* complesso coniugato *di* $z = a + ib$ *è*
$$\overline{z} = a - ib$$

Se $z, w \in \mathbb{C}$, si ha:

- $\overline{(zw)} = \overline{z}\ \overline{w}$

- $z\,\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

Le dimostrazioni sono lasciate per esercizio.

Osservazione

Se $z \neq 0$*, dall'uguaglianza* $z\,\overline{z} = |z|^2$ *segue*

$$z\,\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$$

dunque l'inverso di z *è:*

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Teorema

Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$, il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli:

$$|zw| = |z||w|$$

Dimostrazione di $|zw| = |z||w|$

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (zw)\,\overline{(zw)} \\ &= zw\,\overline{z}\,\overline{w} \\ &= z\overline{z}\,w\,\overline{w} \\ &= |z|^2\,|w|^2 \end{aligned}$$

Numeri complessi in forma polare

Ogni numero complesso $z = x + iy \neq 0$, si scrive anche in coordinate polari r, ϑ, come

$$z = r\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ è il modulo di z e ϑ – detto argomento di z – è l'angolo che il vettore z forma con la direzione positiva dell'asse reale. L'argomento non è unico: è definito solo a meno di multipli interi di 2π. Per evitare questa ambiguità, si può chiamare argomento principale, e denotare $\arg z$, l'unico ϑ che soddisfa

$$-\pi < \vartheta \leq \pi$$

oppure l'unico ϑ che soddisfa

$$0 \leq \vartheta < 2\pi$$

Prodotto di numeri complessi in forma polare

Teorema (Prodotto di numeri complessi e Formula di De Moivre)

Il prodotto di $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ *e* $z' = r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')$ *è*

$$z \cdot z' = rr'[\cos(\vartheta + \vartheta') + i\sin(\vartheta + \vartheta')]$$

In particolare, vale la Formula di De Moivre:

$$[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)]^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
& [r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)] \cdot [r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')] \\
= \quad & rr'[(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta') + i(\sin\vartheta\cos\vartheta' + \cos\vartheta\sin\vartheta')] \\
= \quad & rr'[\cos(\vartheta + \vartheta') + i\sin(\vartheta + \vartheta')]
\end{aligned}$$

Forma esponenziale dei numeri complessi.

Definizione

Per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$, *definiamo l'esponenziale* $e^{i\vartheta}$ *come:*

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

Il numero complesso $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ si scrive

$$z = re^{i\vartheta}$$

La formula del prodotto diventa

$$(re^{i\vartheta})(r'e^{i\vartheta'}) = rr'e^{i(\vartheta+\vartheta')}$$

Esempi: $(re^{i\vartheta})^k = r^k\, e^{ik\vartheta}, \qquad (e^{i\vartheta})^{-1} = \overline{(e^{i\vartheta})} = e^{-i\vartheta}$

Interpretazione geometrica della moltiplicazione per un numero complesso. I numeri complessi come operatori.

1. La moltiplicazione per un numero complesso unitario $u \neq 1$, $u = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$,

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto u\,z$$

   è una rotazione di centro l'origine e di angolo ϑ. (Se $u = 1$, è l'identità, che è una particolare rotazione).

2. Più in generale, la moltiplicazione per un numero complesso $a = r\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$,

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto a\,z$$

   è una roto-omotetia, cioè la composizione di una rotazione di centro l'origine e di angolo ϑ, con una dilatazione di coefficiente $r(= |a|)$.

Composizione di una rotazione e una traslazione

Teorema

Siano $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$, $u \neq 1$ e $w \in \mathbb{C}$. La trasformazione

$$\mathbb{C} \xrightarrow{T} \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto uz + w$$

(rotazione $z \longmapsto uz$ seguita dalla traslazione $z' \longmapsto z' + w$) ha un unico punto fisso e quindi è una rotazione.

DIMOSTRAZIONE. I punti fissi di $T(z) = uz + w$ sono le soluzioni dell'equazione $uz + w = z$, ossia $(1 - u)z = w$. Si tratta di un'equazione di primo grado, nella quale il coefficiente $1 - u$ dell'incognita z è diverso da zero (Perché, per ipotesi, $u \neq 1$). Dunque esiste un unico punto fisso: $C = \dfrac{w}{1-u}$. Per definizione di rotazione, T è allora una rotazione di centro $C = \dfrac{w}{1-u}$. Q.E.D.

Radici n-esime

Teorema (Radici n-esime di un numero complesso)

Sia $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ un numero complesso non nullo e sia n un intero positivo. Esistono esattamente n numeri complessi $z_0, \ldots, z_{n-1}$ che elevati alla potenza n-esima danno come risultato z. Tali numeri sono:

$$z_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

In forma esponenziale:

$$z_k = r^{1/n} e^{\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

I numeri $z_0, \ldots, z_{n-1}$ sono radici n-esime di z. Quindi il teorema dice che ogni numero complesso (non nullo) ha esattamente n radici n-esime.

Dimostrazione

Un numero complesso

$$w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \tag{3}$$

è una radice n-esima di z se $w^n = z$, ossia (De Moivre) se

$$|w|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \tag{4}$$

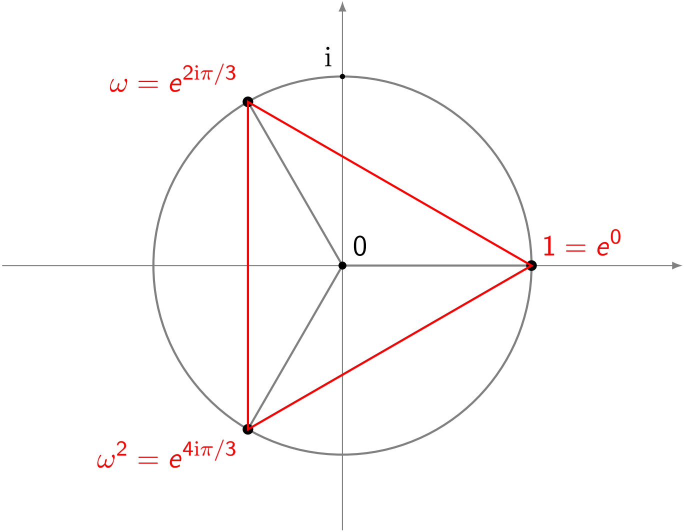
Questo avviene se, solo se,

$$|w|^n = r, \qquad n\alpha = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

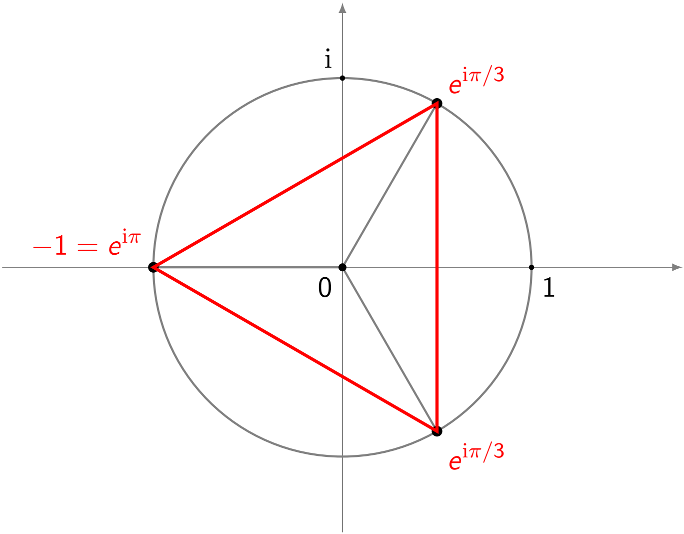
Ma si vede facilmente che si ottengono n radici distinte soltanto per gli n valori $k = 0, 1, ..., (n-1)$, mentre dando a k un qualunque altro valore, si riottiene una delle radici $z_0, ..., z_{n-1}$. Quindi, tutte le n radici n-esime distinte hanno modulo e argomento rispettivamente dati da

$$\sqrt[n]{r}, \qquad \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

Esempio: Radici terze di 1 ($z = 1$, $n = 3$)



Esempio: Radici terze di -1. ($z = -1$, $n = 3$)



Esempio: Radici quinte di 1 ($z = 1$, $n = 5$)