Esercitazione

15 dicembre 2020

Esercizio

Si consideri la curva di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = \left(\cos t^2\right) \mathbf{i} + \left(\sin t^2\right) \mathbf{j}$$

con $0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$.

(a) Di quale curva si tratta?

(b) Scrivere il campo $\gamma'(t)$ dei vettori velocità e il campo $\gamma''(t)$ dei vettori accelerazione.

(c) Quali sono i vettori velocità e accelerazione nel punto di γ corrispondente a $t = \sqrt{\pi}$? I due vettori sono ortogonali? Spiegare.

(d) Determinare in un generico punto di γ i vettori $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ (tangente, normale e binormale) e la curvatura $\kappa(t)$.

La curva è piana?

Esercizio

Stabilire se la curva di equazioni parametriche

$$\gamma(t) \begin{cases} x = & \frac{1}{2}t^2 + 1 \\ y = & t^3 + t + 3 \\ z = & \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

è piana oppure no.

Piano osculatore.

Si consideri la curva di equazioni parametriche

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = & t \\ y = & t^2 \\ z = & t^2 + \sin(t^2 - 1) \end{cases}$$

Determinare l'equazione del piano osculatore nel punto $\boldsymbol{\gamma}(1)$.

Circonferenza osculatrice.

Problema

Sia

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

una curva parametrizzata e $P_0 = \gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ *un suo punto.*

Determinare l'equazione della circonferenza osculatrice alla curva γ *in* t_0.

Circonferenza osculatrice.

Soluzione

Un possibile procedimento consiste nel determinare, nell'ordine

1) il versore tangente $\quad \mathbf{T}(t_0) = \dfrac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$

2) il versore binormale $\quad \mathbf{B}(t_0) = \dfrac{\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)}{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|}$

3) il versore normale $\quad \mathbf{N}(t_0) = \mathbf{B}(t_0) \times \mathbf{T}(t_0)$

4) la curvatura $\quad \kappa(t_0) = \dfrac{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|}{\|\gamma'(t_0)\|^3}$

5) il raggio di curvatura $\quad R_0 = \dfrac{1}{\kappa(t_0)}$

6) il centro di curvatura $\quad C = P_0 + R_0\mathbf{N}$

Circonferenza osculatrice.

Soluzione

L'equazione della circonferenza osculatrice è data dall'intersezione del piano osculatore con la sfera di centro C e raggio R_0. Ovvero

$$\begin{cases} b_1(x-x_0)+b_2(y-y_0)+b_3(z-z_0)=0 \\ (x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2=R_0^2 \end{cases}$$

dove $\mathbf{B}(t_0)=(b_1,b_2,b_3)$ e $C=(c_1,c_2,c_3)$

Circonferenza osculatrice.

Esercizio

L'equazione della circonferenza osculatrice è data dall'intersezione del piano osculatore con la sfera di centro C e raggio R_0. Ovvero

$$\begin{cases} b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3(z - z_0) = 0 \\ (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = R_0^2 \end{cases}$$

dove $\mathbf{B}(t_0) = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$

Circonferenza osculatrice.

Esercizio

Si consideri la funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \; f(x) = e^x$$

Trovare:

1. le componenti del versore tangente, normale e binormale al grafico di f in $x = 0$;
2. l'equazione della circonferenza osculatrice in $x = 0$.

Circonferenza osculatrice.

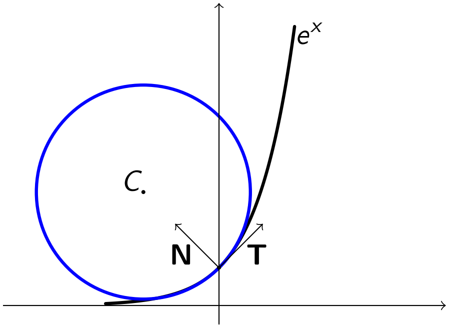

Figure: Circonferenza osculatrice al grafico di $y = e^x$ in $(0, 1, 0)$.

Elica cilindrica.

Esercizio

Si consideri l'elica cilindrica di equazioni parametriche

$$C(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t,\ \frac{4}{5}\sin t,\ \frac{3}{5}t\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Verificare che $\|C'(t)\| = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
b) Scrivere, per ogni $t \in \mathbb{R}$, le componenti dei vettori $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ (tangente, normale, binormale) rispetto alla base canonica (e_1, e_2, e_3) di $\mathbb{R}^3$.
c) Trovare curvatura e torsione di $C = C(t)$.