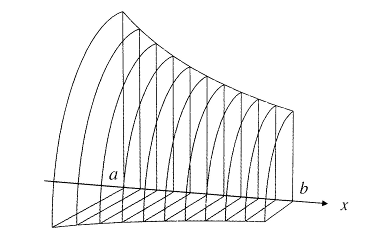
Esercitazione

26 novembre 2020

Volumi.

Volumi a “fette ”.

Si consideri il solido compreso tra $x = a$ e $x = b$, la cui sezione passante per x e ortogonale all'asse delle ascisse ha area $A(x)$.



Se $A(x)$ è continua (o continua a tratti) il volume V del solido è:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx.$$

Volumi a "fette". Esercizi.

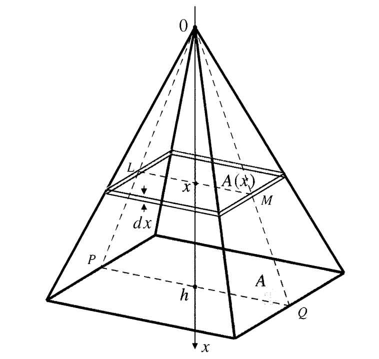
Esercizio

Sia $A(x)$ la regione di piano delimitata dal grafico della funzione $[1, e] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, dall'asse x e dalla retta $x = e$. Determinare il volume del solido di base $A(x)$, le cui sezioni ortogonali all'asse x sono quadrati.

Volumi a “fette”. Esercizi.

Esercizio

Trovare il volume della piramide di base rettangolare di area A e altezza h.



Lunghezza di un arco di curva.

Integrali curvilinei di prima specie.

Si consideri la curva parametrizzata

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

con $x(t), y(t)$ di classe $C^1[a, b]$ (cioè $x(t), y(t)$ derivabili su $[a, b]$, con derivata continua), allora l'arco di curva γ ha lunghezza

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Lunghezza di un arco di curva. Esercizi.

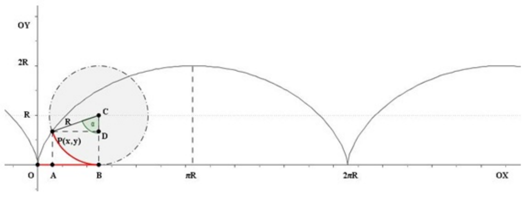
1. Calcolare la lunghezza della circonferenza di raggio r.
2. $[0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$. Risposta: $\dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.
3. $[0,3] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3}$. Risposta: 12.

Equazioni della cicloide.

Esercizio

La cicloide è la curva descritta da un punto di un cerchio, quando il cerchio rotola, senza strisciare, lungo una retta.
Verificare che le equazioni della cicloide descritta da un punto P che si trova sulla circonferenza del cerchio generatore (di raggio r), sono:

$$\gamma(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t)), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

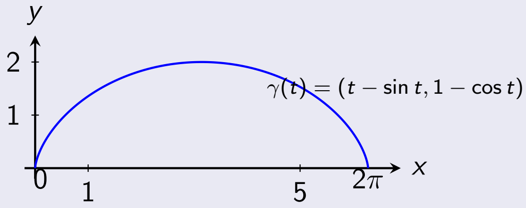


Lunghezza di un arco di cicloide.

Esercizio

1. Calcolare la lunghezza dell'arco di *cicloide*, le cui equazioni sono:

$$\gamma(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t)), \qquad t \in [0, 2\pi]$$



Lunghezza dell'elica cilindrica.

Esercizio

3 Calcolare la lunghezza dell'elica cilindrica

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

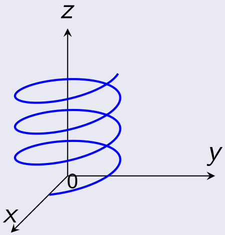


Figure: L'elica disegnata in questa figura ha equazione $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \frac{1}{10}t), \quad t \in [0, 20.5]$.

Integrali generalizzati.

Esercizio

Stabilire se i seguenti integrali generalizzati convergono o divergono

1. $$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

2. $$\int_3^{+\infty} \frac{3 + \cos x}{x \ln x}\, dx$$

3. $$\int_0^1 \frac{1 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x^2 + 3x}}\, dx$$

Esempi di equazioni differenziali a variabili separabili.

Esercizio

Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili

1. $y' = 2y$
2. $y' = \dfrac{x}{y}$
3. $y' - y^2 \sin x = 0$

Esempi di equazioni differenziali a variabili separabili.

Esercizio

4. $y' = 1 - y^2$
5. $xy^2 + x + (x^2 y - y)\, y' = 0$

Esempi di equazioni differenziali a variabili separabili.

Esercizio

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y \ln y}{x} \\ y(-1) = e \end{cases}$$