Esercitazione

19 novembre 2020

Integrali definiti.

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4x-1}{4x^2-2x}\,dx$

2. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x\sqrt[3]{5x^2-10}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

Area di figure piane.

Esercizio

1. Calcolare l'area della figura delimitata dalle parabole $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.
2. Calcolare l'area della regione R che sta sopra la retta di equazione $y = 2$ e sotto il grafico della curva $y = 3x - x^2$.

Esercizio

Utilizzando solo considerazioni geometriche calcolare l'integrale

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

Funzione integrale.

1. Trovare la derivata rispetto a x della funzione $F(x)$ così definita

$$F(x) = \int_1^x t^2 + t \, dt$$

2. Trovare la derivata rispetto a x della funzione $F(x)$ così definita

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} \, dt$$

Grafico della funzione integrale.

1. Tracciare il grafico della seguente funzione integrale

$$(-\infty, +\infty) \xrightarrow{F} \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Volumi.

Volumi di solidi di rivoluzione.

Sia R la regione di piano delimitata dal grafico di $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = a$, $x = b$. Il volume V del solido ottenuto facendo ruotare la regione piana R attorno all'asse x è

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Volumi di solidi di rivoluzione. Esercizi.

1. **Volume della sfera.** Determinare il volume della sfera di raggio r.

2. **Volume del cono circolare retto.** Determinare il volume del cono circolare retto, avente raggio di base r e altezza h.

3. **Volume dell'ellissoide di rivoluzione.** Trovare il volume dell'ellissoide che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse x la regione di piano racchiusa dall'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Volumi.

Volumi di gusci cilindrici.

Sia R la regione di piano delimitata dal grafico di $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = a$, $x = b$. Il volume V del solido ottenuto facendo ruotare la regione piana R attorno all'asse y è

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Volumi di gusci sferici. Esercizi.

1. **Volume del toro.** Si consideri la circonferenza di centro $(a, 0)$ e raggio r. Determinare il volume del toro che si ottiene facendo ruotare il cerchio attorno all'asse y.

1. **Volume di una scodella.** Determinare il volume delimitato dalla 'scodella' che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse y l'arco parabolico $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$.

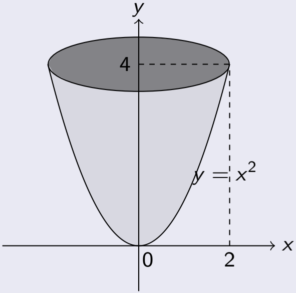

Figure: Scodella generata, nel piano xy, dall'arco di parabola di equazione $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$.

Integrali generalizzati.

Esercizio

Utilizzando la definizione, calcolare i seguenti integrali generalizzati

1. $$\int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$
2. $$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\,dx$$

Integrali generalizzati.

Esercizio

Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati

1. $$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2+x+1}\, dx$$
2. $$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sin x}\, dx$$