

Esercitazione
12 novembre 2020

Primitive di funzioni elementari (definite su intervalli)

Funzioni	Primitive
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$
$a^x \quad (a > 0 \wedge a \neq 1)$	$\frac{1}{\ln a} a^x + c$

Primitive di funzioni elementari

Funzioni	Primitive
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cotan x + c$

Primitive di funzioni elementari

Funzioni	Primitive
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\sinh x$	$\cosh + c$
$\cosh x$	$\sinh + c$

Dalla regola di derivazione della funzione composta

$$[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$$

si ottiene:

$$\int g'(f(x))f'(x) dx = g(f(x)) + c$$

Integrazioni immediate

Funzioni	Primitive
$[f(x)]^\alpha f'(x)$, $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha + 1} [f(x)]^{\alpha+1} + c$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln f(x) + c$
$f'(x) e^{f(x)}$	$e^{f(x)} + c$
$f'(x) a^{f(x)}$ ($a > 0 \wedge a \neq 1$)	$\frac{1}{\ln a} a^{f(x)} + c$

Integrazioni immediate

Funzioni	Primitive
$f'(x) \cos f(x)$	$\sin f(x) + c$
$f'(x) \sin f(x)$	$-\cos f(x) + c$
$\frac{f'(x)}{[\cos f(x)]^2}$	$\tan f(x) + c$

Integrazioni immediate

Funzioni	Primitive
$\frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$	$\arctan f(x) + c$
$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$	$\arcsin f(x) + c$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$1 \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 2}} dx$$

$$2 \quad \int x \cos(3x^2 + 1) dx$$

$$3 \quad \int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$4 \quad \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$5 \int x e^{-x^2} dx$$

$$6 \int \frac{2x + 3}{2x^2 + 6x} dx$$

$$7 \int \frac{x}{1 + (1 + x^2)^2} dx$$

La *regola di Leibniz* afferma che:

$$\left[f(x)g(x) \right]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (1)$$

($f(x)$, $g(x)$ funzioni derivabili). Integrando entrambi i membri, si ottiene:

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Utilizzando il metodo di integrazione per parti, calcolare i seguenti integrali

1 $\int \ln x \, dx$

2 $\int \sin^2 x \, dx, \quad \int \cos^2 x \, dx$

3 $\int x \ln^2 x \, dx$

4 $\int 2x \arctan x \, dx$

5 $\int \arcsin x \, dx$

$$6 \int x^2 e^x dx$$

$$7 \int e^x \sin x dx$$

$$8 \int x^2 \cos x dx$$

$$9 \int x^2 \ln x dx$$

Integrazione per sostituzione

Utilizzando il metodo di sostituzione per integrali indefiniti, calcolare

1 $\int \sqrt{1-x^2} dx$

2 $\int \frac{1}{x(\ln x - 4)} dx$

Integrazione di funzioni razionali

Calcolare

$$1 \int \frac{x+4}{x^2-5x+6} dx$$

Suggerimento: indicate con x_1 e x_2 le radici del trinomio a denominatore, scrivere la funzione integranda nella forma

$$\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}.$$

$$2 \int \frac{1}{9x^2-6x+1} dx$$

Integrazione di funzioni razionali

$$3 \int \frac{1}{x^2 - 6x + 12} dx$$

Suggerimento: utilizzare il metodo del completamento del quadrato.

$$4 \int \frac{2x + 1}{x^2 - 4x + 4} dx$$

Suggerimento: scrivere la funzione integranda nella forma

$$\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2}.$$