Esercitazione

22 ottobre 2020

Formula di Taylor

Sviluppi di Taylor, centrati in $t_0 = 0$, con resto secondo Peano

1. **Esponenziale**

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2. **Seno**

$$\sin t \quad = \quad t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+1})$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Sviluppi di Taylor, centrati in $t_0 = 0$, con resto secondo Peano

3 **Coseno**

$$\cos t \quad = \quad 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n})$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

4 **Tangente**

$$\tan t = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + o(t^6)$$

per ogni t, $|t| < \frac{\pi}{2}$.

Sviluppi di Taylor, centrati in $t_0 = 0$, con resto secondo Peano

5 **Potenza di un binomio**

$$(1+t)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} t + \binom{\alpha}{2} t^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} t^n + o(t^n)$$

$$= 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + o(t^n)$$

per ogni t, $|t| < 1$.

6 **$\ln(1+t)$**

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n + o(t^n)$$

per ogni t, $|t| < 1$.

Sviluppi di Taylor, centrati in $t_0 = 0$, con resto secondo Peano

7 **Arcoseno**

$$\arcsin t = t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{20}t^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} t^{2n+1} + o(t^{2n+1})$$

per ogni t, $|t| < 1$

8 **Arcotangente**

$$\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1} + o(t^{2n+1})$$

per ogni t, $|t| < 1$

Sviluppi di Taylor, centrati in $t_0 = 0$, con resto secondo Peano

9 **Coseno iperbolico**

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n})$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

10 **Seno iperbolico**

$$\sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+1})$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio

Scrivere il polinomio di Taylor di grado 4, centrato in x_0, delle seguenti funzioni

1. $$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$$

2. $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x_0 = 0$$

3. $$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 1$$

Esercizio

Utilizzando opportuni sviluppi in serie di Taylor, calcolare i seguenti limiti.

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{2x^2}$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{1 + 3x^2 - e^{3x^2}}{x^2 \sin 2x^2}$$

Esercizio

È data la funzione

$$(-1,+1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{2x} - \ln(1+\sin x) + \sqrt{1+x^3}$$

1. Scrivere la formula di Maclaurin di ordine 3, con resto di Peano, di $f(x)$.
2. Senza fare conti, trovare $f'''(0)$.
3. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0,2)$.
4. Determinare l'ordine di infinitesimo e la parte principale della funzione

$$(-1,+1) \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g(x) = -2 - x + f(x)$$

per $x \to 0$, rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = x$.

Esercizio

Utilizzando opportuni sviluppi in serie di Taylor, calcolare i seguenti limiti.

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\sinh x - x}$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{\tan x^4}$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x\arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4} - 1}$$

4. $$\lim_{x\to 2} \frac{\cos \frac{3}{4}\pi x - \frac{3}{2}\pi \ln \frac{x}{2}}{(4-x^2)^2}$$

5. $$\lim_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right)\right)$$