Esercitazione

21 ottobre 2021

Asintoti.

Limiti con la formula di Taylor.

Numeri complessi

Esercizio

È data la funzione

$$(-1,+1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{2x} - \ln(1+\sin x) + \sqrt{1+x^3}$$

1. Scrivere la formula di Maclaurin di ordine 3, con resto di Peano, di $f(x)$.
2. Senza fare conti, trovare $f'''(0)$.
3. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0,2)$.

Limiti con la formula di Taylor.

Esercizio

Utilizzando opportuni sviluppi in serie di Taylor, calcolare i seguenti limiti.

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\sinh x - x}$$
2. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{\tan x^4}$$
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x \arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4} - 1}$$

Limiti con la formula di Taylor.

Esercizio (continuazione)

4. $$\lim_{x\to 2} \frac{\cos \frac{3}{4}\pi x - \frac{3}{2}\pi \ln \frac{x}{2}}{(4-x^2)^2}$$

5. $$\lim_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)\right)$$

Esercizi sui numeri complessi

1. Scrivere in forma algebrica i numeri complessi seguenti

$$(a)\quad \frac{1-i}{1+2i} \qquad (b)\quad (1-4i)^2 \qquad (c)\quad -\frac{1}{i^5}$$

2. Siano $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{6}}$. Scrivere in forma algebrica e in forma trigonometrica il numero $z_1 \cdot z_2$

3. Scrivere in forma esponenziale le radici terze di $1+i$.

4. Scrivere in forma algebrica le radici quinte di $1+\sqrt{3}i$.

Esercizi sui numeri complessi

1. Trovare le radici dell'equazione

$$z^2 + 3iz + 4 = 0$$

2. Dimostrare che

$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \overline{z} + \overline{w} \\ \overline{z\,w} &= \overline{z}\,\overline{w} \end{aligned}$$

per ogni z, w in $\mathbb{C}$.

Esercizi sui numeri complessi

1. Sia
$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ con } a_i \in \mathbb{R} \quad i = 0, 1, 2 \; e \; a_2 \neq 0$$
Dimostrare che se $z \in \mathbb{C}$ è una radice di $p(x)$ allora anche $\overline{z}$ è una radice di $p(x)$.

   Generalizzare il precedente teorema al caso di un polinomio a coefficienti reali, di grado n (con n intero positivo qualsiasi).

2. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione:
$$(|z - 6i| - |z + 4i|)(z^3 - i) = 0$$