Esercitazione

14 ottobre 2021

Asintoti.

Massimi e minimi (locali e assoluti). Grafici di funzioni.

Limiti con la formula di Taylor.

Asintoto verticale

Definizione

La retta $x = x_0$ si chiama asintoto verticale del grafico della funzione f, se è soddisfatta una delle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^+} f(x) &= +\infty \text{ (oppure } -\infty) \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) &= +\infty \text{ (oppure } -\infty) \end{aligned}$$

Asintoto orizzontale

Definizione

La retta $y = L$ si dice asintoto orizzontale del grafico della funzione f, per $x \to +\infty$, se è soddisfatta la condizione:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

La retta $y = K$ si dice *asintoto orizzontale* per la funzione f, per $x \to -\infty$, se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = K$$

Asintoto obliquo

Definizione

La retta $y = mx + q \ \ (m \neq 0)$ si dice asintoto obliquo del grafico della funzione $y = f(x)$, per $x \to +\infty$, se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx + q) = 0, \tag{1}$$

La condizione (1) è equivalente a:

$$f(x) = mx + q + o(1)$$

dove $o(1)$ designa una funzione infinitesima per $x \to +\infty$.

Regola per la determinazione dell'asintoto obliquo

Sia $f(x)$ una funzione definita su una semiretta $(a, +\infty)$. Se valgano entrambe le condizioni seguenti:
a) esiste finito, ed è un numero diverso da zero, il limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \qquad m \neq 0$$

b) esiste finito il limite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q$$

allora la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$, per $x \to +\infty$.

Esempio

La funzione

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 2\,\frac{\sin x}{x}$$

ha asintoto obliquo di equazione $y = x$.

Infatti, per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) = x + \underbrace{2\,\frac{\sin x}{x}}_{o(1)} = x + o(1)$$

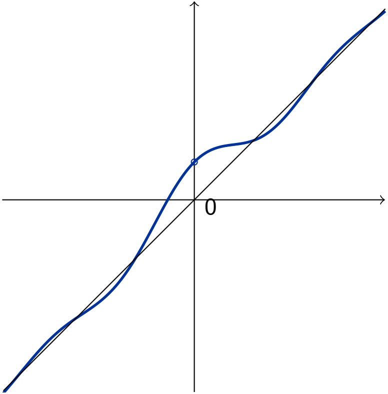

Figure: Il grafico di $f(x) = x + 2\dfrac{\sin x}{x}$ si avvicina alla retta $y = x$ intersecando l'asintoto infinite volte.

Vero o Falso?

Esercizio

Se, per x che tende a $+\infty$, la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ è asintotica a $y = mx + q$

$$f(x) \sim mx + q \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

allora $y = mx + q$ è asintoto obliquo di f, per $x \longrightarrow +\infty$.

Risposta: Falso.

Controesempio: $(0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$.

Esercizio

Sia

(a) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}$

(b) $(-\infty, -1] \cup [+1, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$

(a) Determinare i limiti alla frontiera del dominio e eventuali asintoti.
(b) Determinare, se esistono, massimi e minimi locali e assoluti.
(d) Tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Esercizio

Sia

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$$

(a) Determinare i limiti alla frontiera del dominio e eventuali asintoti.

(b) Determinare gli intervalli di monotonia, i punti di non derivabilità e eventuali massimi e minimi locali.

(c) Determinare il più grande intervallo di invertibilità di f contenente il punto $x = 1$.

(d) Tracciare i grafici qualitativi di $f(x)$, $f(|x|)$ e $|f(x)|$.

Sviluppi di Taylor, centrati in $t_0 = 0$, con resto secondo Peano

1. **Esponenziale**

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2. **Seno**

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+1})$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Sviluppi di Taylor, centrati in $t_0 = 0$, con resto secondo Peano

3. **Coseno**

$$\cos t \quad = \quad 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n})$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

4. **Tangente**

$$\tan t = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + o(t^6)$$

per ogni t, $|t| < \dfrac{\pi}{2}$.

Sviluppi di Taylor, centrati in $t_0 = 0$, con resto secondo Peano

5. **Potenza di un binomio**

$$(1+t)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} t + \binom{\alpha}{2} t^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} t^n + o(t^n)$$

$$= 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + o(t^n)$$

per ogni t, $|t| < 1$.

6. **$\ln(1+t)$**

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n + o(t^n)$$

per ogni t, $|t| < 1$.

Sviluppi di Taylor, centrati in $t_0 = 0$, con resto secondo Peano

7 **Arcoseno**

$$\arcsin t = t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{20}t^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} t^{2n+1} + o(t^{2n+1})$$

per ogni t, $|t| < 1$

8 **Arcotangente**

$$\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1} + o(t^{2n+1})$$

per ogni t, $|t| < 1$

Sviluppi di Taylor, centrati in $t_0 = 0$, con resto secondo Peano

9 **Coseno iperbolico**

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n})$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

10 **Seno iperbolico**

$$\sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(t^{2n+1})$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio

Scrivere il polinomio di Taylor di grado 4, centrato in x_0, delle seguenti funzioni

1. $$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$$
2. $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x_0 = 0$$
3. $$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 1$$

Esercizio

Utilizzando opportuni sviluppi in serie di Taylor, calcolare i seguenti limiti.

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{2x^2}$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{1+3x^2-e^{3x^2}}{x^2 \sin 2x^2}$$