Esercitazione

7 ottobre 2021

Funzioni derivabili

Alcune derivate importanti (con cenni di calcolo).

1. Se $f = c$, $c \in \mathbb{R}$, è una funzione costante, $\boxed{Dc = 0}$.

2. Per $a, b \in \mathbb{R}$, $\boxed{D(ax+b) = a}$.

3. $\boxed{De^x = e^x}$

$$De^x = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

4. $\boxed{D \log_e x = \frac{1}{x}}$

Posto $\log_e x = y$, $x = \exp_e(y)$, per il teorema sulla derivata della funzione inversa:

$$D \log_e x = \frac{1}{\exp_e'(y)} = \frac{1}{\exp_e(y)} = \frac{1}{x}$$

5 $\boxed{D\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x^2}}$

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{h}\frac{-h}{(x+h)x} \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{1}{x^2}$$

6 $\boxed{D\dfrac{1}{g(x)} = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}}$

(Derivata di una funzione composta: $x \mapsto f(x) \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$)

7 $\boxed{D\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$

$D\dfrac{f(x)}{g(x)} = D\left[f(x)\dfrac{1}{g(x)}\right]$. Ora si usi le regola di Leibniz e la regola per $D\dfrac{1}{g(x)}$.

8 $\boxed{Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ qualunque, $x > 0$)

Per la regola di derivata di una funzione composta,
$Dx^\alpha = D\exp(\log x^\alpha) = D\exp(\alpha \log x) = x^\alpha \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

9 $\boxed{D\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$ ($x > 0$)

10 $\boxed{D\sin x = \cos x}$ (x : misura in radianti)

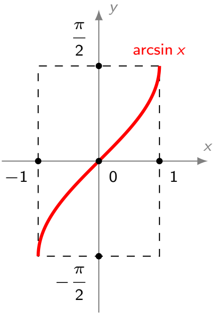
$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \left[\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x\right] \\
&= \sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \to \cos x
\end{aligned}
$$

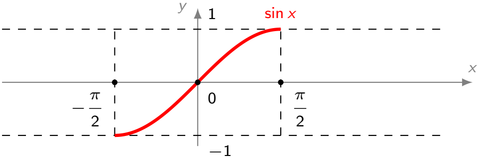
11 $\boxed{D\cos x = -\sin x}$

12 $\boxed{D\arcsin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ $\qquad x \in (-1, 1)$

Derivata della funzione inversa ($\arcsin x = y,\ x = \sin y$):

$$D\arcsin x = \frac{1}{D\sin(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$





13 $$\boxed{D\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad x \in (-1,1)$$

14 $$\boxed{D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$$

Usare la regola della derivata del quoziente:

$$D\tan x = D\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

15 $$\boxed{D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}}$$

Derivata della funzione inversa ($\arctan x = y,\ x = \tan y$):

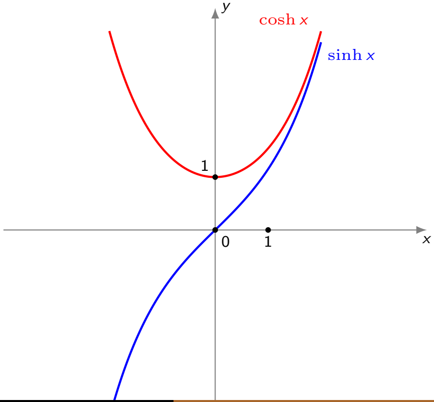
$$D\arctan x = \frac{1}{D\tan(y)} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Seno e coseno iperbolico

16 $\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$ $D \sinh x = \cosh x$

17 $\boxed{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$ $D \cosh x = \sinh x$

https://en.wikipedia.org/wiki/Catenary



Vero o Falso?

Esercizio

(a) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Se $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è pari e $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ è dispari, allora $g \circ f$ è dispari.

(b) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \sin x$ è derivabile in $x_0 = 0$.

(c) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Se la funzione composta $g \circ f$ è suriettiva, allora sia f che g sono suriettive.

(d) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Se $(a, b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è derivabile e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è iniettiva.

Vero o Falso?

Esercizio

(a) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Ogni funzione $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ iniettiva è anche suriettiva.

(b) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \cos|x|$ è derivabile in $x_0 = 0$.

(c) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La retta tangente in $(0,0)$ al grafico della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^4(x-1)$, è l'asse delle x.

(d) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = e^{|x|}$, ha minimo assoluto nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

Funzione pari, derivata dispari. Funzione dispari, derivata pari

Esercizio

Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che:

(a) se f è pari allora f' è dispari;

(b) se f è dispari allora f' è pari

Esercizio

Sia

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = x^5 + x$$

(a) Verificare che f è invertibile su $\mathbb{R}$.

(b) Verificare che la funzione inversa $\mathbb{R} \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R}$ è derivabile su $\mathbb{R}$.

(c) Calcolare $(f^{-1})'(0)$ e $(f^{-1})'(2)$.

Retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto

Esercizio

Si consideri la funzione

$$\mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{5}\} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x+1}{5x-4}$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f in $x = 2$.

Un fatto utile per trovare massimi e minimi locali di funzioni derivabili

Teorema

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo e* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione derivabile su* I

$$f'(x) > 0, \text{ per ogni } x \in I \quad \Rightarrow \quad f \text{ è strettamente crescente in } I$$