

Esercitazione

30 settembre 2021

Limiti e continuità

Definizione ($\varepsilon - \delta$ definizione)

Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale definita su insieme $D \subset \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione di D . Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \quad L \in \mathbb{R} \quad (1)$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in D$, $x \neq x_0$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \quad (2)$$

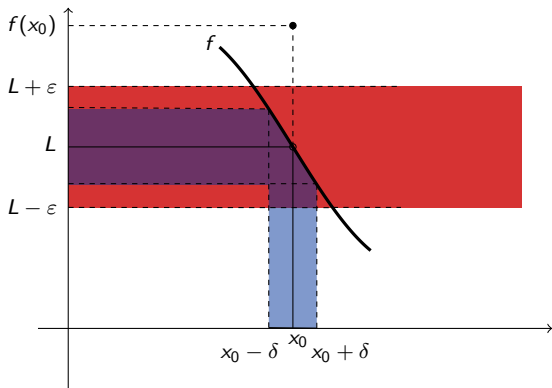


Figure: Definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$: per ogni intorno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ di L è possibile trovare un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 in modo tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con $x \neq x_0$ succede che $f(x)$ sta in $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Simbolo o -piccolo

Notazioni: f e g funzioni definite in un intorno bucato U di x_0 e diverse da zero in ogni $x \in U$.

Definizione

Si dice che $f(x)$ è *o -piccolo* di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, e si scrive

$$f(x) = o(g(x)), \text{ per } x \rightarrow x_0 \quad (3)$$

se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (4)$$

(In questa definizione, x_0 può anche essere $+\infty$ o $-\infty$.)

Relazione di equivalenza asintotica

Notazioni: Consideriamo funzioni $f(x), g(x)$ che, in un opportuno intorno bucato di x_0 , **non si annullino mai** (in modo da poter dividere per $f(x)$ o per $g(x)$ senza problemi).

Definizione

Si dice che la funzione $f(x)$ è **asintoticamente equivalente** alla funzione $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, e si scrive

$$f(x) \sim g(x), \quad x \rightarrow x_0 \quad (5)$$

se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad (6)$$

Definizione (ε - δ definizione)

La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se si verifica la seguente proprietà:
per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per tutti gli $x \in \mathbb{R}$, se $|x - x_0| < \delta$ allora

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ossia, la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se è soddisfatta la seguente condizione:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Limiti importanti

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

(Si dimostra a partire dal limite precedente, con la sostituzione $x = 1/t$).

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. $\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{1}{x/\alpha}\right)^{x/\alpha}\right]^\alpha \rightarrow e^\alpha$, per $x \rightarrow +\infty$.

Limiti importanti

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \log_b x = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R}_{>0} \wedge b \neq 1)$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Limiti importanti

$$\mathbf{8} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a} \quad (a \in \mathbb{R}_{>0} \wedge a \neq 1).$$

$$\mathbf{9} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\mathbf{10} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a \in \mathbb{R}_{>0} \wedge a \neq 1).$$

$$\mathbf{11} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\mathbf{12} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Calcolare

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

Risposta. 0

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x(x+1)} - x$$

Risposta. $\frac{1}{2}$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$$

Risposta. $\frac{m}{n}$

Calcolare

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[5]{x}}{1 + \sqrt[7]{x}}$$

Risposta. $\frac{7}{5}$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

Risposta. $\frac{1}{2}$

Trovare, se esistono, i seguenti limiti

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3 \sin 2x}{5x^2 + 3 \sin 4x}$$

$$\text{Risposta: } -\frac{1}{3}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{3x^2 + 2x}$$

$$\text{Risposta: } \frac{5}{2}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{2x^2 + \sqrt{x}}$$

$$\text{Risposta: } 0$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{3x}$$

$$\text{Risposta: } \frac{2}{9}$$

Trovare, se esistono, i seguenti limiti

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-3x} - 1}{2^x - 1}$$

$$\text{Risposta: } -\frac{3}{2 \ln 2}$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^x - e^x}{2x}$$

$$\text{Risposta: } \frac{\ln \pi - \ln e}{2}$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^3 + x^2} + 2x^4}{3\sqrt{x} - x^5}$$

$$\text{Risposta: } 0$$

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(e^x - e^{-x})}{5^x - 5^{-x}}$$

$$\text{Risposta: } 0$$

1 Per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x - \beta)^2 - 2 & \text{se } x \geq 0 \\ \alpha \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

risulta continua su \mathbb{R} ?

2 Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^2}{x(\sqrt{x+1} - 1)} & \text{se } x > 0 \\ \alpha e^x + 2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

risulta continua su \mathbb{R} ?

Esercizio

L'equazione di secondo grado

$$ax^2 + 2x - 1 = 0$$

(a numero reale, $a \neq 0$, $a > -1$) ha le radici reali

$$r_-(a) = \frac{-1 - \sqrt{1+a}}{a}, \quad r_+(a) = \frac{-1 + \sqrt{1+a}}{a}$$

Cosa succede a queste due radici quando a tende a zero?
Interpretare il problema anche da un punto di vista geometrico.

Il Teorema degli Zeri.

Teorema (degli Zeri)

Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Se

- $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è continua su $[a, b]$;
- i valori $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni opposti (vale a dire, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, o viceversa)

allora esiste (almeno) un punto $c \in (a, b)$ per cui si ha:

$$f(c) = 0$$

Il Teorema degli Zeri.

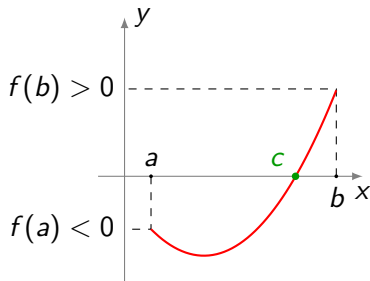


Figure: Teorema degli zeri. Il grafico di una qualsiasi funzione continua su $[a, b]$ che assume valori di segno opposto agli estremi deve necessariamente intersecare l'asse x almeno una volta.

Esercizio

- 1** Dimostrare che ogni polinomio a coefficienti reali di terzo grado $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_3 \neq 0$, ha almeno una radice reale, cioè esiste almeno un numero reale x_0 per il quale $P(x_0) = 0$.
- 2** Dimostrare che ogni polinomio a coefficienti reali di grado dispari $P(x) = a_{2m+1}x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + \dots + a_1x + a_0$, $a_{2m+1} \neq 0$, ha almeno una radice reale, cioè esiste almeno un numero reale x_0 per il quale $P(x_0) = 0$.

Esercizio

- 1** Dimostrare che l'equazione $x^3 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$ ha un'unica soluzione reale, che appartiene all'intervallo $(0, 1)$.
- 2** Dimostrare che il polinomio $p(x) = 4x^3 + x^2$ ha un punto fisso nell'intervallo $[-1, 1]$.
- 3** Dimostrare che ogni applicazione continua $[0, 1] \xrightarrow{f} [0, 1]$ ha almeno un punto fisso.