Funzioni reali di variabile reale.
Limiti e continuità.

Limite finito

Definizione ($\varepsilon - \delta$ definizione)

Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione reale definita su insieme* $D \subset \mathbb{R}$*, e sia* x_0 *un punto di accumulazione di* D*. Si dice che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \qquad L \in \mathbb{R} \tag{1}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che, per ogni* $x \in D$, $x \neq x_0$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \tag{2}$$

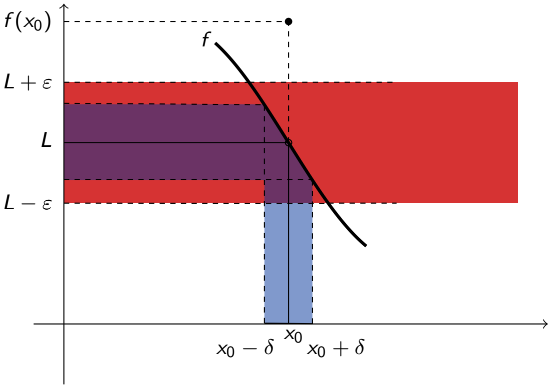

Figure : Definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$: *per ogni* intorno $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ di L è possibile trovare un intorno $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ di x_0 in modo tale che per ogni $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, con $x \neq x_0$ succede che $f(x)$ sta in $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Simbolo *o*-piccolo

Notazioni: f e g funzioni definite in un intorno bucato U di x_0 e diverse da zero in ogni $x \in U$.

Definizione

Si dice che $f(x)$ è o-piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$, e si scrive

$$f(x) = o(g(x)), \ \textit{per } x \to x_0 \tag{3}$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{4}$$

(In questa definizione, x_0 può anche essere $+\infty$ o $-\infty$.)

Relazione di equivalenza asintotica

Notazioni: Consideriamo funzioni $f(x), g(x)$ che, in un opportuno intorno bucato di x_0, non si annullino mai (in modo da poter dividere per $f(x)$ o per $g(x)$ senza problemi).

Definizione

Si dice che la funzione $f(x)$ è asintoticamente equivalente alla funzione $g(x)$ per $x \to x_0$, e si scrive

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0 \tag{5}$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{6}$$

Funzioni continue

Definizione (ε-δ definizione)

La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è continua in* $x_0 \in \mathbb{R}$ *se si verifica la seguente proprietà:*
per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che, per tutti gli* $x \in \mathbb{R}$*, se* $|x - x_0| < \delta$ *allora*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Ossia, la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è continua in* $x_0 \in \mathbb{R}$ *se è soddisfatta la seguente condizione:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Un esempio. $f(x) = x^2$ è continua

Esercizio

Si consideri la funzione

$$[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$$

con a, b *reali e* $0 \leq a < b$.
Dimostrare che esiste una costante $K > 0$ *tale che*

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

Soluzione

- Per ogni $x_1, x_2 \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |(x_1)^2 - (x_2)^2| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \\ &< (b + b)|x_1 - x_2| \\ &= 2b|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

$f(x) = x^2$ è continua.

Esercizio

Dimostrare che la funzione

$$[0, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad\qquad f(x) = x^2$$

è continua in ogni $c \in [0, +\infty)$.

$f(x) = x^2$ è continua.

Soluzione

Per dimostrare che f è continua in un qualunque $c \in [0, +\infty)$ bisogna rispondere alla seguente domanda:

per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intervallo $(c - \delta, c + \delta)$ per il quale se $x \in (c - \delta, c + \delta)$, $f(x) = x^2$ approssima $f(c) = c^2$ per meno di ε (cioè: $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$)?

Risposta.
Sia $[a, b]$ un intervallo compatto che contiene c $\quad (0 \leq a \leq c < b)$.
Allora (si veda l'esercizio precedente)

$$|f(x) - f(c)| < 2b\,|x - c|$$

$f(x) = x^2$ è continua.

Soluzione

Quindi, se si vuole che $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ basta prendere $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2b}$.

Infatti, se $|x - c| < \dfrac{\varepsilon}{2b}$, si ha:

$$|f(x) - f(c)| < 2b\,|x - c| < 2b\,\frac{\varepsilon}{2b} = \varepsilon$$

Limiti importanti

1. $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

2. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
   (Si dimostra a partire dal limite precedente, con la sostituzione $x = 1/t$).

3. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Dimostrazione. $\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{1}{x/\alpha}\right)^{x/\alpha}\right]^{\alpha} \longrightarrow e^{\alpha}$, per $x \to +\infty$.

Limiti importanti

4. $\lim_{x \to 0^+} x^a \log_b x = 0$

5. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

6. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

7. $\lim_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$

Limiti importanti

8 $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R} > 0,\ a \neq 1).$

9 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

10 $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}_{>0}).$

11 $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

12 $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$

Esercizi

Trovare, se esistono, i seguenti limiti

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{2x - 3\sin 2x}{5x^2 + 3\sin 4x}$$
2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{3x^2 + 2x}$$
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{x^2}}{2x^2 + \sqrt{x}}$$
4. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{3x}$$

Esercizi

Trovare, se esistono, i seguenti limiti

5. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-3x}-1}{2^x - 1}$$

6. $$\lim_{x \to 0} \frac{\pi^x - e^x}{2x}$$

7. $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^3+x^2}+2x^4}{3\sqrt{x}-x^5}$$

8. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(e^x - e^{-x})}{5^x - 5^{-x}}$$

Esercizi

1. Per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x-\beta)^2 - 2 & \text{se } x \geq 0 \\ \alpha \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

risulta continua su $\mathbb{R}$?

2. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} & \text{se } x > 0 \\ \alpha e^x + 2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

risulta continua su $\mathbb{R}$?