Esercitazione

23 settembre 2021

Esercizio

Dimostrare che

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Combinatoria

Esercizio

Dimostrare che

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Soluzione.

Esercizio

Dimostrare che

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Soluzione.

Si scelga un elemento x di $[n]$. I k-sottoinsiemi di $[n]$ si dividono in due gruppi disgiunti: quelli che non contengono x sono $\binom{n-1}{k}$, mentre quelli che contengono x sono $\binom{n-1}{k-1}$. $\square$

Combinatoria

Esercizio

Dimostrare che
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Soluzione.

Combinatoria

Esercizio

Dimostrare che

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Soluzione.

Si deve formare una squadra di k giocatori, scegliendo tra n elementi a disposizione, e poi designare un giocatore capitano.

Esercizio

Dimostrare che
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Soluzione.

Si deve formare una squadra di k giocatori, scegliendo tra n elementi a disposizione, e poi designare un giocatore capitano.

Prima strategia.

Esercizio

Dimostrare che
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Soluzione.

Si deve formare una squadra di k giocatori, scegliendo tra n elementi a disposizione, e poi designare un giocatore capitano.

Prima strategia.

Si sceglie la squadra: ci sono $\binom{n}{k}$ scelte possibili.

Esercizio

Dimostrare che
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Soluzione.

Si deve formare una squadra di k giocatori, scegliendo tra n elementi a disposizione, e poi designare un giocatore capitano.

Prima strategia.

Si sceglie la squadra: ci sono $\binom{n}{k}$ scelte possibili. Decisa la squadra di k giocatori, si sceglie il capitano: ci sono k scelte possibili.

Combinatoria

Complessivamente le scelte possibili sono $k\binom{n}{k}$ (primo membro dell'identità).

Combinatoria

Complessivamente le scelte possibili sono $k\binom{n}{k}$ (primo membro dell'identità).

Seconda strategia.

Combinatoria

Complessivamente le scelte possibili sono $k\binom{n}{k}$ (primo membro dell'identità).

Seconda strategia.
Si sceglie il capitano: ci sono n modi diversi di farlo.

Combinatoria

Complessivamente le scelte possibili sono $k\binom{n}{k}$ (primo membro dell'identità).

Seconda strategia.
Si sceglie il capitano: ci sono n modi diversi di farlo.
Deciso il capitano, si scelgono gli altri $k-1$ giocatori: ci sono $\binom{n-1}{k-1}$ scelte possibili.

Combinatoria

Complessivamente le scelte possibili sono $k\binom{n}{k}$ (primo membro dell'identità).

Seconda strategia.
Si sceglie il capitano: ci sono n modi diversi di farlo.
Deciso il capitano, si scelgono gli altri $k-1$ giocatori: ci sono $\binom{n-1}{k-1}$ scelte possibili.
Complessivamente le scelte possibili sono $n\binom{n-1}{k-1}$ (secondo membro dell'identità).

Complessivamente le scelte possibili sono $k\binom{n}{k}$ (primo membro dell'identità).

Seconda strategia.
Si sceglie il capitano: ci sono n modi diversi di farlo.
Deciso il capitano, si scelgono gli altri $k-1$ giocatori: ci sono $\binom{n-1}{k-1}$ scelte possibili.

Complessivamente le scelte possibili sono $n\binom{n-1}{k-1}$ (secondo membro dell'identità).

L'identità è provata, perché il primo e il secondo membro contano, con tecniche diverse, lo stesso insieme di scelte. $\square$

Binomio di Newton

Esercizio

Trovare il coefficiente di x^3 nello sviluppo di $(3x + 2)^5$.

Binomio di Newton

Esercizio

Trovare il coefficiente di x^3 nello sviluppo di $(3x+2)^5$.

Risposta: 1080.

Principio di induzione

Esercizio

Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ si ha

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione

Per $n = 1$ (passo iniziale) l'enunciato è vero infatti, $1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione

Per $n = 1$ (passo iniziale) l'enunciato è vero infatti, $1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

Supposto che $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ (ipotesi induttiva), si ha

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n^2.$$

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione

Per $n = 1$ (passo iniziale) l'enunciato è vero infatti, $1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

Supposto che $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ (ipotesi induttiva), si ha

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n^2.$$

Con facili calcoli si scrive il secondo membro di questa uguaglianza così:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\square$

Principio di induzione

Esercizio

Fissato un numero reale $x \geq -1$ si dimostri la seguente disuguaglianza

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione.

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione.

Per $n = 1$ la disuguaglianza è vera, infatti si ha $(1 + x) \geq 1 + 1 \cdot x$.

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione.

Per $n = 1$ la disuguaglianza è vera, infatti si ha $(1 + x) \geq 1 + 1 \cdot x$. Supposta vera la disuguaglianza per $n - 1$ e cioè, supposto vero che

$$(1 + x)^{n-1} \geq 1 + (n - 1)x \tag{1}$$

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione.

Per $n = 1$ la disuguaglianza è vera, infatti si ha $(1 + x) \geq 1 + 1 \cdot x$. Supposta vera la disuguaglianza per $n - 1$ e cioè, supposto vero che

$$(1 + x)^{n-1} \geq 1 + (n - 1)x \tag{1}$$

occorre dimostrare che

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \tag{2}$$

Dimostrazione per induzione.

Per $n = 1$ la disuguaglianza è vera, infatti si ha $(1 + x) \geq 1 + 1 \cdot x$. Supposta vera la disuguaglianza per $n - 1$ e cioè, supposto vero che

$$(1 + x)^{n-1} \geq 1 + (n - 1)x \tag{1}$$

occorre dimostrare che

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \tag{2}$$

Da (1), moltiplicando entrambi i membri della disuguaglianza per $(1 + x)$

Dimostrazione per induzione.

Per $n = 1$ la disuguaglianza è vera, infatti si ha $(1 + x) \geq 1 + 1 \cdot x$. Supposta vera la disuguaglianza per $n - 1$ e cioè, supposto vero che

$$(1 + x)^{n-1} \geq 1 + (n - 1)x \tag{1}$$

occorre dimostrare che

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \tag{2}$$

Da (1), moltiplicando entrambi i membri della disuguaglianza per $(1 + x)$ (quantità certamente positiva o nulla) si ottiene:

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione (continuazione).

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione (continuazione).

$$(1+x)^{n-1}(1+x) \geq \big(1+(n-1)x\big)(1+x)$$

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione (continuazione).

$$(1+x)^{n-1}(1+x) \geq \big(1+(n-1)x\big)(1+x) = 1 + nx + (n-1)x^2$$

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione (continuazione).

$$(1+x)^{n-1}(1+x) \geq \big(1+(n-1)x\big)(1+x) = 1 + nx + (n-1)x^2$$

Poichè $(n-1)x^2 \geq 0$, risulta

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione (continuazione).

$$(1+x)^{n-1}(1+x) \geq \big(1+(n-1)x\big)(1+x) = 1 + nx + (n-1)x^2$$

Poichè $(n-1)x^2 \geq 0$, risulta

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

$\square$

Principio di induzione

Dimostrazione per induzione (continuazione).

$$(1+x)^{n-1}(1+x) \geq \big(1+(n-1)x\big)(1+x) = 1+nx+(n-1)x^2$$

Poichè $(n-1)x^2 \geq 0$, risulta

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$\square$

Osservazione. Limitatamente al caso $x > 0$, la disuguaglianza $(1+x)^n \geq 1+nx$ è un'immediata conseguenza del teorema del binomio.

Estremo superiore (inferiore)

Esercizio

Si consideri il seguente sottoinsieme di numeri reali

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n-1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

E ha estremo superiore? Ha estremo inferiore? Ha massimo? Ha minimo?

Estremo superiore (inferiore)

Esercizio

Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di numeri reali hanno estremo superiore, estremo inferiore, massimo, minimo.

1. $A = \left\{ \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$

Estremo superiore (inferiore)

Esercizio

Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di numeri reali hanno estremo superiore, estremo inferiore, massimo, minimo.

1. $A = \left\{ \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$
2. $B = \{3^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}\}$

Estremo superiore (inferiore)

Esercizio

Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di numeri reali hanno estremo superiore, estremo inferiore, massimo, minimo.

1. $A = \left\{ \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$
2. $B = \{3^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}\}$
3. $C = \left\{ 1 - \dfrac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$

Esercizio

Dimostrare che

1. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad (a \in \mathbb{R},\ a > 1)$$

Esercizio

Dimostrare che

1. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0 \qquad (a \in \mathbb{R},\ a > 1)$$

2. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \qquad (a \in \mathbb{R},\ a > 1.\ k \text{ intero positivo qualsiasi})$$

Successioni

Soluzione.

Soluzione.

1. Posto $\sqrt{a} = 1 + x$, con $x > 0$ si ha:

Soluzione.

1. Posto $\sqrt{a} = 1 + x$, con $x > 0$ si ha:

$$(\sqrt{a})^n = (1 + x)^n$$

Soluzione.

1. Posto $\sqrt{a} = 1 + x$, con $x > 0$ si ha:

$$(\sqrt{a})^n = (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Soluzione.

1. Posto $\sqrt{a} = 1 + x$, con $x > 0$ si ha:

$$(\sqrt{a})^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > nx$$

Soluzione.

1. Posto $\sqrt{a} = 1 + x$, con $x > 0$ si ha:

$$(\sqrt{a})^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > nx$$

   Elevando al quadrato si ottiene:

Successioni

Soluzione.

1. Posto $\sqrt{a} = 1 + x$, con $x > 0$ si ha:

$$(\sqrt{a})^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > nx$$

Elevando al quadrato si ottiene: $\quad a^n > n^2 x^2$, ossia

Soluzione.

1. Posto $\sqrt{a} = 1 + x$, con $x > 0$ si ha:

$$(\sqrt{a})^n = (1+x)^n \geq 1 + nx > nx$$

Elevando al quadrato si ottiene: $a^n > n^2 x^2$, ossia

$$\frac{n}{a^n} < \frac{1}{nx^2}$$

Per n che tende a $+\infty$, $\dfrac{1}{nx^2}$ tende a zero. Quindi anche $\dfrac{n}{a^n}$ (quantità positiva o nulla per ogni $n \in \mathbb{N}$) tende a zero. $\square$

Soluzione.

Successioni

Soluzione.

2 $$\frac{n^k}{a^n} = \underbrace{\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}}_{k \text{ fattori}}$$

Soluzione.

2 $$\frac{n^k}{a^n} = \underbrace{\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}}_{k \text{ fattori}}$$

Il numero $\sqrt[k]{a}$ è maggiore di 1 perché $a > 1$,.

Soluzione.

2

$$\frac{n^k}{a^n} = \underbrace{\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}}_{k \text{ fattori}}$$

Il numero $\sqrt[k]{a}$ è maggiore di 1 perché $a > 1$,. Pertanto, per n che tende a $+\infty$,

Soluzione.

2
$$\frac{n^k}{a^n} = \underbrace{\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}}_{k \text{ fattori}}$$

Il numero $\sqrt[k]{a}$ è maggiore di 1 perché $a > 1$,. Pertanto, per n che tende a $+\infty$,

$$\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \longrightarrow 0$$

Soluzione.

2
$$\frac{n^k}{a^n} = \underbrace{\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}}_{k \text{ fattori}}$$

Il numero $\sqrt[k]{a}$ è maggiore di 1 perché $a > 1$,. Pertanto, per n che tende a $+\infty$,

$$\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \longrightarrow 0$$

Poichè il limite del prodotto di successioni è il prodotto dei limiti di tali successioni si ha la tesi. □

Successioni

Esercizio

Dimostrare che:

Successioni

Esercizio

Dimostrare che:

1. $$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \qquad (a \in \mathbb{R},\ a > 1)$$

Successioni

Esercizio

Dimostrare che:

1. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad (a \in \mathbb{R},\ a > 1)$$
2. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Soluzione.

Soluzione.

2. Basta osservare che $\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n} < \dfrac{1}{n}$ e che $\dfrac{1}{n}$ tende a zero, per n che tende a $+\infty$.