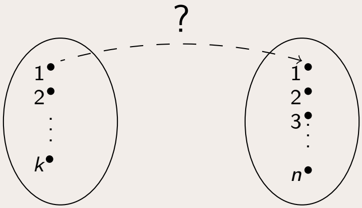
Esercitazione

16 settembre 2021

Contare funzioni da un insieme ad un altro

Esercizio

Escogitare un metodo per contare tutte le funzioni $[k] \longrightarrow [n]$.



Risposta

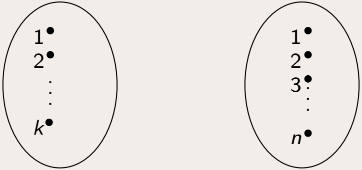
Le funzioni da $[k]$ a $[n]$ sono n^k.

Esercizio

Escogitare un metodo per contare tutte le funzioni iniettive

$$[k] \longrightarrow [n]$$

?



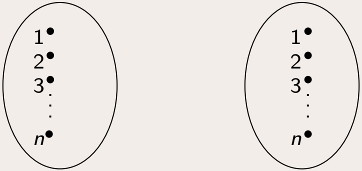
Risposta

Le funzioni iniettive da $[k]$ a $[n]$ sono $n^{\underline{k}}$.

Contare funzioni biettive

Esercizio

Quante sono le funzioni biettive $[n] \longrightarrow [n]$?



Risposta

Le funzioni biettive da $[n]$ a $[n]$ sono $n^{\underline{n}} = n!$.

Contare i sottoinsiemi di un insieme

Definizione

Siano n e k due interi $0 \leq k \leq n$. Chiamiamo coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ il numero dei sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi. In altre parole:

$$\binom{n}{k} = \#\{k\text{-sottoinsiemi di un } n\text{-insieme}\}.$$

Formule per calcolare il coefficiente binomiale

Valgono le seguenti uguaglianze

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esercizi di combinatoria enumerativa

Esercizi

1. In quanti modi diversi si può valorizzare una stringa di n bytes con i numeri $0, 1$?
2. Calcolare il numero di cinquine che si possono realizzare con i 90 numeri del lotto.
3. Trovare il numero delle parole di lunghezza 4 che si scrivono nell'alfabeto $\{a, b, c, d, e, f\}$ e in cui non ci sono lettere ripetute.

Esercizi di combinatoria enumerativa

Esercizi

4. Quanti anagrammi anche privi di significato si possono scrivere della parola "DOMENICA"? e della parola "SCEICCO"?

5. Diciotto squadre partecipano a un torneo. Quante sono le possibili classifiche per quanto riguarda le prime tre classificate?

6. Diciotto persone partecipano ad un concorso e soltanto le prime tre saranno assunte. Quante sono le possibili terne (non ordinate) di concorrenti assunti?

Binomio di Newton

Teorema (Potenza del binomio)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Dimostrazione.

Per ottenere lo sviluppo di

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\,(a+b)\cdots(a+b)}_{n\ volte}$$

si deve:

Binomio di Newton

Dimostrazione (continuazione).

- scegliere in ciascuno dei fattori il termine a oppure il termine b, in tutti i modi possibili;
- moltiplicare i termini scelti;
- sommare tutti i risultati.

Se si sceglie k volte il termine b (e quindi $n-k$ volte il termine a) e moltiplichiamo i termini scelti, otteniamo $a^{n-k}b^k$. Una scelta di tale tipo si può effettuare in $\binom{n}{k}$ modi diversi. Quindi, nello sviluppo del binomio, il coefficiente di $a^{n-k}b^k$ è $\binom{n}{k}$. □

Contare gli oggetti dell'insieme delle parti

Esercizio

Dato un qualunque insieme finito X, quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(X)$?

Risposta

Il numero di tutti i sottoinsiemi di un n-insieme si ottiene sommando il numeri dei sottoinsiemi con k elementi, per $k = 0, \ldots, n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n,$$

per la formula del binomio di Newton. $\square$

Binomio di Newton

Esercizi

1. Trovare il coefficiente di x^4 nello sviluppo di $(2-x)^6$.
2. Trovare il coefficiente di x^3 nello sviluppo di $(3x+2)^5$.
3. Trovare il numero di sottoinsiemi di $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Principio di induzione

L'enunciato:

$$P_n : \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

è vero per ogni $n \geq 1$.
L'enunciato

$$P_n : \qquad 2^n > 2n$$

è vero per ogni $n \geq 3$.
In entrambi i casi si tratta di dimostrare infinite uguaglianze (disuguaglianze).

Ovviamente, verificare il valore di verità di P_n per qualche intero n prescelto, non costituisce una tecnica dimostrativa valida.

Principio di induzione

Sia n_0 un intero non negativo e P_n $(n \geq n_0)$ una successione di proposizioni dipendenti dall'indice n. Se si dimostra che

Passo iniziale: P_{n_0} è vera;

Passo induttivo: $P_{n-1} \Rightarrow P_n$ per ogni $n \in n_0$,

allora

$$P_n \text{ è vera per ogni } n \geq n_0.$$

Principio di induzione

Esercizi

1. Dimostrare che $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Dimostrare che $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

3. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ si ha

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Esercizi

4. Fissato un numero reale $x \geq -1$ si dimostri la seguente disuguaglianza

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

5. Dimostrare che definitivamente (cioè, da un certo indice n_0 in poi) valgono le seguenti disuguaglianze

$$a) \quad 2^n > 2n \qquad\qquad b) \quad 3^n > n^3 \qquad\qquad c) \quad n! > 3^n$$