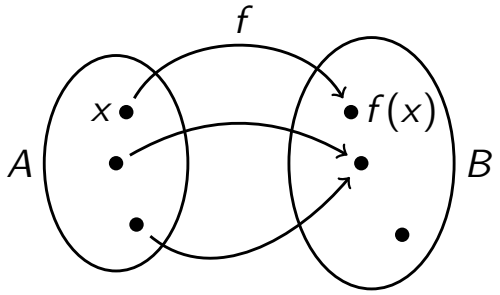
Indice

- Funzioni iniettive, suriettive, invertibili.
- $\mathbb{Q}$ è numerabile.
- $\mathbb{R}$ non è numerabile.
- $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

Funzioni



Definizione

Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ *consiste dei seguenti tre dati:*

1. *Un insieme A, detto dominio di f, e denotato* $\mathrm{dom}(f)$;
2. *Un insieme B, detto codominio di f, e denotato* $\mathrm{codom}(f)$;
3. *Una legge che a ogni elemento $x \in A$ associa esattamente un elemento (cioè, un elemento e uno soltanto) $f(x) \in B$.*

Immagine di un sottoinsieme $S \subseteq A$

Definizione

Data $A \xrightarrow{f} B$, *l'immagine di* f *(denotata* $\mathrm{Im}(f)$ *o* $f(A)$*) è*

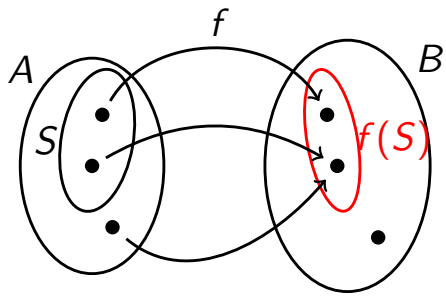
$$\mathrm{Im}(f) = f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A \quad f(x) = y\}$$

Se $S \subseteq A$, *l'immagine di* S *tramite* f *è*

$$f(S) = \{y \in B \mid \exists x \in S \quad f(x) = y\}$$

In breve: $\qquad f(S) = \{f(x),\ x \in S\}$

Esempio 1.



Esempio 2. $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad x \to f(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(f)$

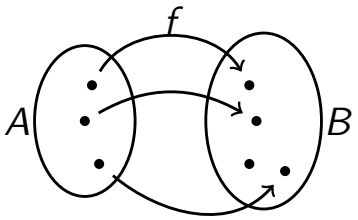
Se $S = (0, +\infty)$, $f(S) = (0, +\infty)$

Definizione (Funzioni inettive, suriettive, bi-iettive)

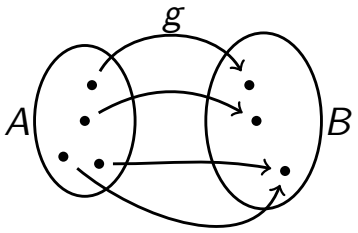
Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ *è:*

- *iniettiva se è soddisfatta la condizione:*
$$\boxed{\forall x, x' \in A \qquad f(x) = f(x') \implies x = x'}$$
In altri termini: f *è iniettiva se, e solo se, per ogni* $y \in B$, *esiste al più un* x *in* A *tale che* $f(x) = y$.
- *suriettiva se è soddisfatta la condizione:*
$$\boxed{\forall y \in B \ \ \exists x \in A \qquad f(x) = y}$$
In altri termini: f *è suriettiva se, per ogni* $y \in B$, *esiste almeno un* x *in* A *tale che* $f(x) = y$, *ovvero se, e solo se,* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{codom}(f)$.
- *bi-iettiva (o invertibile) se è sia iniettiva, sia suriettiva:*
$$\boxed{\forall y \in B \ \ \exists! x \in A \qquad f(x) = y}$$

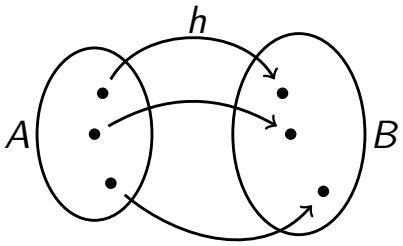
Esempi



f iniettiva, non suriettiva



g suriettiva, non iniettiva.



h sia suriettiva, sia iniettiva. (bi-iettiva, o invertibile)

Esercizi

Denotiamo con $[n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$ un insieme con n elementi.

Esercizio

1. *Contare tutte le funzioni da $[n]$ a $[m]$.*
2. *Contare tutte le funzioni iniettive da $[k]$ a $[m]$.*
3. *Contare le funzioni invertibili da $[n]$ a $[n]$.*

Esercizio

Contare i k-sottoinsiemi (sottoinsiemi con k elementi) di $[m]$.

Esercizio

*Contare tutti i sottoinsiemi di $[n]$. (*SUGGERIMENTO. *Sono tanti quante le funzioni da $[n]$ a $[2]$. Perché?)*

Insiemi numerabili

Definizione (Insieme numerabile)

Si dice che un insieme S è numerabile, o che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$, se esiste una funzione bi-iettiva (o invertibile; cioè iniettiva e suriettiva) $\mathbb{N} \xrightarrow{f} S$.

Esercizio

Dire se sono numerabili:

1. *I numeri positivi pari:* $A = \{0, 2, 4, 6, ...\}$.
2. *I numeri interi relativi pari:* $B = \{.... - 6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$.
3. *I numeri positivi dispari:* $C = \{1, 3, 5, 7, ..., \}$.
4. *I quadrati perfetti:* $D = \{0, 1, 4, 9, ...\}$.

(Risposta: Sono tutti numerabili.)

$\mathbb{Q}$ è numerabile

Teorema

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile.

Dimostrazione. ($\mathbb{Q}$ è numerabile.)

Ordiniamo i numeri razionali positivi in questo modo:

$$
\begin{array}{cccccc}
\boxed{\frac{1}{1}} & \boxed{\frac{1}{2}} & \boxed{\frac{1}{3}} & \boxed{\frac{1}{4}} & \boxed{\frac{1}{5}} & \boxed{\frac{1}{6}} & \cdots \\
\boxed{\frac{2}{1}} & \frac{2}{2} & \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{2}{4} & \boxed{\frac{2}{5}} & \frac{2}{6} & \cdots \\
\boxed{\frac{3}{1}} & \boxed{\frac{3}{2}} & \frac{3}{3} & \boxed{\frac{3}{4}} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \cdots \\
\boxed{\frac{4}{1}} & \frac{4}{2} & \boxed{\frac{4}{3}} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \cdots \\
\boxed{\frac{5}{1}} & \boxed{\frac{5}{2}} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \frac{5}{6} & \cdots \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot &
\end{array}
$$

Aggiungiamo lo zero e eliminiamo i numeri che figurano già in precedenza. Otteniamo:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{1}{5} & \ldots
\end{array}
$$

Dimostrazione. ($\mathbb{Q}$ è numerabile; continuazione)

Ora modifichiamo la successione che abbiamo trovato

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{1}{5} & \ldots
\end{array}
$$

introducendo i razionali negativi:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{1} & -\frac{2}{1} & \frac{3}{1} & -\frac{3}{1} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots
\end{array}
$$

In questo modo abbiamo costruito una funzione bi-iettiva $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}$. Dunque $\mathbb{Q}$ è numerabile.

Teorema (G. Cantor, 1890. Prima dimostrazione.)

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non è numerabile.

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, supponiamo che esista una successione $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to x_n$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots..$$

suriettiva (cioè: $(\forall z \in \mathbb{R})\,(\exists k \in \mathbb{N})\; z = x_k$).
ogni numero reale è uno degli x_h, $h \in \mathbb{N}$). Siano:

- I_1 un intervallo compatto tale che $\boxed{x_1 \notin I_1}$
- $I_2 \subset I_1$ un intervallo compatto tale che $\boxed{x_2 \notin I_2}$
- $I_k \subset I_{k-1}$ un intervallo compatto tale che $\boxed{x_k \notin I_k}$
- eccetera .....

L'intersezione $I = \bigcap I_n$, $n \in \mathbb{N}$, non è vuota (teorema degli intervalli inscatolati). Sia $c \in I$. Dico che: $(\forall k)\; c \neq x_k$. Infatti, supponiamo che esista un k per il quale $c = x_k$. Per costruzione, $c = x_k \notin I_k$. Quindi c (non appartenendo a I_k) non appartiene all'intersezione $I = \bigcap I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Contraddizione.

Teorema (G. Cantor. Argomento diagonale. Seconda dimostrazione.)

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non è numerabile.

Basta provare che $[0,1]$ non è numerabile. Supponiamo il contrario, e sia $\mathbb{N} \xrightarrow{f} [0,1]$ una funzione biettiva:

$$\begin{array}{lcl}
1 & \leftrightarrow & f(1) = 0.\,\alpha_1^1\alpha_2^1\alpha_3^1.....\alpha_n^1..... \\
2 & \leftrightarrow & f(2) = 0.\,\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2.....\alpha_n^2..... \\
\multicolumn{3}{l}{.....} \\
n & \leftrightarrow & f(n) = 0.\,\alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n.....\alpha_n^n..... \\
\multicolumn{3}{l}{.....}
\end{array}$$

Questo significa che ogni numero reale in $[0,1]$ figura una volta (suriettività) e una sola (iniettività) nella colonna di destra. Definiamo $b = 0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots \in [0,1]$, ponendo:

$$\beta_n = \begin{cases} 7 & \text{se } \alpha_n^n \text{ è una delle cifre } \quad 0,1,2,3,4, \\ 3 & \text{se } \alpha_n^n \text{ è una delle cifre } \quad 5,6,7,8,9. \end{cases}$$

Il numero b non figura nella lista di sopra (La n-esima cifra di b e $f(n)$ sono diverse). Contraddizione. Q.E.D.

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. (Prima forma.)

La proprietà di Archimede implica la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, ossia il fatto che ogni numero reale può essere approssimato, con arbitraria precisione, con numeri razionali.

Teorema ($\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$)

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste un numero razionale r tra essi compreso:

$$a < r < b$$

Dimostrazione. ($\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$. Prima forma.)

Dimostrazione Ci sono tre casi.

Primo caso: $0 \leq a < b$. Scegliamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(b-a) = nb - na > 1$ (Esiste per Archimede). Siccome nb e na distano più di 1, deve esserci (almeno) un numero intero positivo m tra nb e na: $na < m < nb$. Dividendo per n, si ha $a < \frac{m}{n} < b$.

Secondo caso: $a < b \leq 0$. Ci si riconduce al primo caso scambiando i segni:$0 \leq -b < -a$. Esiste allora un razionale m/n tale che $-b < \frac{m}{n} < -a$. Dunque, $a < -\frac{m}{n} < b$

Terzo caso: $a < 0 < b$. Basta prendere il numero 0, che è razionale.

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. (Seconda forma.)

Teorema ($\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$)

Ogni numero reale è limite di una successione di razionali. (Di più, è limite di una successione di numeri decimali.)

Esempio. Il numero irrazionale

$$\pi = 3,141592653589793... \tag{1}$$

è il limite della successione (y_n) di numeri razionali (decimali):

$$\begin{aligned} y_0 &= 3 \\ y_1 &= 3.1 \\ y_2 &= 3.14 \\ y_3 &= 3.141 \\ y_4 &= 3.1415 \\ ... &= ..... \end{aligned}$$

Poiché $|\pi - y_k| \leq \frac{1}{10^k}$, si ha: $\lim_{n\to+\infty} y_n = \pi$.

Dimostrazione. ($\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$. Seconda forma.)

DIMOSTRAZIONE Il numero reale

$$\alpha = a_0 . a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 ..... \tag{2}$$

è il limite della successione (y_n) di numeri razionali (decimali):

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 \\ y_1 &= a_0 . a_1 \\ y_2 &= a_0 . a_1 a_2 \\ . &= ..... \\ y_k &= a_0 . a_1 a_2 a_3 .....a_k ..... \end{aligned}$$

Poiché $|\alpha - y_k| \leq \frac{1}{10^k}$, si ha: $\lim_{n\to+\infty} y_n = \alpha$.

Esercizi

Esercizio

*Dimostrare che l'insieme dei numeri irrazionali $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. (*Suggerimento. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $a/\sqrt{2} < r < b/\sqrt{2}$.)*

Esercizio

In ogni intervallo $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ci sono infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali.

Serie numeriche

Vogliamo dare significato a una "somma infinita." Esempi:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \tag{3}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{4}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \tag{5}$$

Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots \tag{6}$$

consideriamo la successione delle somme parziali

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

Serie convergenti, divergenti, indeterminate

Definizione

Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, *poniamo:* $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

- *Si dice che la serie è convergente se la successione* S_n *converge a un numero (finito)* S. *Si scrive*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

- *Si dice che la serie è divergente a* $+\infty$ *(o a* $-\infty$*) se la successione* S_n *diverge a* $+\infty$ *(o a* $-\infty$*).*
- *Se infine la successione delle somme parziali* S_n *non converge e non diverge, si dice anche che la serie è indeterminata.* □

La serie geometrica

Teorema

Carattere della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n + ... \tag{7}$$

1. *Se* $|q| < 1$ *converge a* $\frac{1}{1-q}$.
2. *Se* $q \geq 1$ *diverge a* $+\infty$.
3. *Se* $q \leq -1$ *è indeterminata.*

Dimostrazione (Serie geometrica)

La somma parziale S_n è data da:

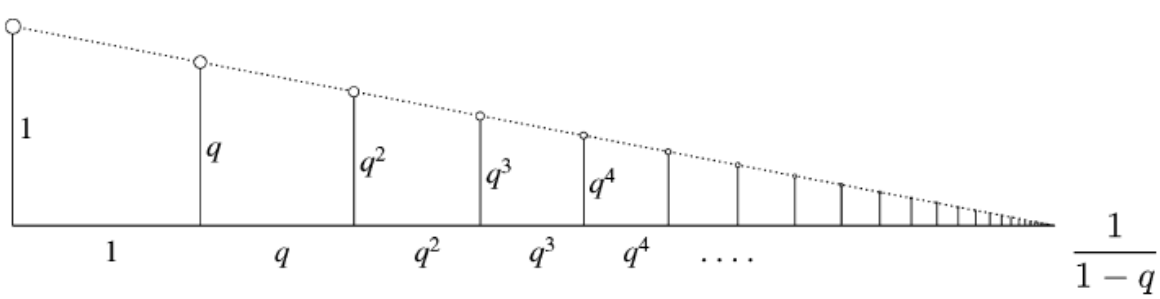
$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1. Se $|q| < 1$, la successione q^n tende a zero. Quindi

$$\lim S_n = \lim \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

2. Se $q \geq 1$, è ovvio che la successione S_n tende a $+\infty$.
3. Se $q \leq -1$, il termine q^{n+1} tende a $+\infty$ in valore assoluto, ma ha alternativamente segno positivo e negativo. Quindi la successione S_n non ha limite (oscilla). $\square$

Serie geometrica: una interpretazione geometrica



Esempio: i numeri come somme di serie

La successione

$$\begin{array}{lllll} 0,3 & = & & = & 3/10 \\ 0,33 & = & 0,3+0,03 & = & 3/10+3/100 \\ 0,333 & = & 0,3+0,03+0,003 & = & 3/10+3/100+3/1000 \\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

tende a $0,\overline{3} = 0,333333.....$:

$$\begin{aligned} 0,\overline{3} &= \frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\cdots \\ &= \frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots\right) \\ &= \frac{3}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{10^n} \\ &= \frac{3}{10}\left[\frac{1}{1-1/10}\right]=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Numeri e allineamenti decimali

Teorema

Un numero reale è

1. *razionale se e solo se è rappresentato da un allineamento decimale periodico (magari con periodo zero).*
2. *irrazionale se e solo se è rappresentato da un allineamento decimale illimitato (cioè, con infinite cifre decimali dopo la virgola) non periodico.*

Esempi:
1) Sono razionali:
$\frac{1}{3} = 0,\overline{3} = 0,3333333333....$;
$\frac{1}{5} = 0,2 = 0,20000000....$

2) Sono irrazionali:
$\pi = 3.14159265.....$
$\sqrt{2} = 1.4142135....$

Serie armoniche generalizzate

Teorema (Serie armoniche generalizzate)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} \quad \begin{cases} \textit{converge} & \textit{se } a > 1 \\ \textit{diverge } a \ \ +\infty & \textit{se } a \leq 1 \end{cases}$$

Daremo una dimostrazione più avanti, usando il calcolo integrale.

Condizione necessaria per la convergenza

Teorema (Condizione necessaria per la convergenza)

Se una serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge, allora* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Supponiamo che la serie converga: $\lim_{k\to+\infty} S_k = L$
Il termine n-esimo della serie è dato da

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} \\ &= L - L = 0 \qquad \square \end{aligned}$$

La condizione non è sufficiente

Controesempio

La serie armonica divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty$$

mostra che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \qquad \text{non implica} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ convergente.}$$