Politecnico di Milano. Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria

Un modello matematico del continuo unidimensionale:
Il campo ordinato completo $\mathbb{R}$ dei numeri reali.
Successioni e serie.
10 Settembre 2022

Indice

1 I numeri reali

1.1 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

Per fissare le notazioni, ricordiamo i simboli con i quali si denotano i numeri naturali, i numeri interi e i numeri razionali.

- L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è costituito dai numeri interi maggiori o uguali a zero:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

- L'insieme $\mathbb{Z}$ è costituito dai numeri interi relativi:

$$\mathbb{Z} = \{..... - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

  (La lettera $\mathbb{Z}$ è l'iniziale della parola tedesca *Zahlen*, che significa numeri).

- L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri *razionali* (latino *ratio*, rapporto) è costituito da tutti i numeri che sono rapporti di interi $\dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Per essere più precisi, due frazioni $\dfrac{m'}{n'}$, $\dfrac{m'}{n'}$ si dicono equivalenti, e rappresentano lo stesso numero razionale, se $mn' = m'n$. (La lettera $\mathbb{Q}$ ricorda che si tratta di *quozienti* di numeri interi).

Naturalmente, valgono le inclusioni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

1.2 I numeri razionali non bastano per misurare. "Irrazionalità di $\sqrt{2}$"

I numeri reali rispondono all'esigenza di avere a disposizione una scala per la misura delle grandezze. Detto in termini geometrici, i numeri reali forniscono una descrizione matematica della linea retta, pensata come un continuo.

A questo scopo, come probabilmente è ben noto, i numeri razionali non sono sufficienti. Ad esempio, la misura della diagonale di un quadrato, quando si assuma come unità di misura il lato del quadrato stesso, non è data da un numero razionale. Questo fatto è stato scoperto nel VI secolo a.C. dalla scuola di Pitagora (in un contesto che era però diverso da quello di una teoria matematica formalizzata).

Noi enunceremo il risultato dei pitagorici nel modo seguente.

Teorema 1.1 ("Irrazionalità di $\sqrt{2}$"). *Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2.*

Dimostrazione.[1] Supponiamo, per assurdo, che esistano due numeri interi positivi p, q tali che

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \tag{1.1}$$

Non è restrittivo supporre che gli interi p e q siano primi tra loro, cioè che non abbiano fattori primi in comune. (Altrimenti, riduciamo la frazione $\dfrac{p}{q}$ ai minimi termini). Da (1.1) segue

$$p^2 = 2q^2 \tag{1.2}$$

Dall'uguaglianza (1.2) segue che p^2 è pari. Quindi anche p è pari:

$$p = 2a \tag{1.3}$$

[1]Per seguire meglio la dimostrazione, richiamiamo alcuni fatti elementari. Un numero $m \in \mathbb{N}$ è pari se è divisibile per 2, cioè se si può scrivere $m = 2h$, $h \in \mathbb{N}$; è dispari se diviso per 2 dà resto 1, cioè se si può scrivere $m = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Se un numero $m = 2h$ è pari, il suo quadrato è pari. (Infatti, $m^2 = (2h)^2 = 2(2h^2)$). Se un numero $m = 2k+1$ è dispari, il suo quadrato è dispari. (Infatti, $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$).

(Infatti, se p fosse dispari, anche il suo quadrato p^2 sarebbe dispari). Sostituendo $p = 2a$ nell'uguaglianza 1.2, si ottiene

$$(2a)^2 = 2q^2 \tag{1.4}$$

da cui

$$2a^2 = q^2 \tag{1.5}$$

Ma allora q^2 è pari e quindi anche q è pari. Ne segue che p e q sono entrambi pari (ossia, sono entrambi divisibili per il fattore 2). Assurdo, perché p e q non hanno fattori primi in comune.
Q.E.D.

Abbiamo dunque dimostrato che la diagonale d e il lato l di un quadrato sono *incommensurabili* tra loro, cioè non hanno alcun sottomultiplo in comune: non esistono numeri interi m, n per i quali $\frac{1}{m}d = \frac{1}{n}l$. Infatti, se ciò accadesse, il rapporto tra d e l sarebbe il numero razionale m/n.

1.3 Il campo ordinato completo $\mathbb{R}$ dei numeri reali

Definiamo il *campo ordinato completo* $\mathbb{R}$ dei numeri reali, attraverso un sistema di assiomi, suddivisi in tre gruppi: assiomi di campo, assiomi di ordinamento, assioma di completezza.

1.3.1 Assiomi di campo

Sono definite in $\mathbb{R}$ due operazioni, la somma e il prodotto. La somma di due numeri reali a, b si denota $a + b$ e il loro prodotto si denota $a \cdot b$ o ab. Si richiede che valgano le proprietà seguenti.

1. *Associatività della somma e del prodotto.*

   Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$,
   $$a + (b + c) = (a + b) + c \tag{1.6}$$
   $$(ab)c = a(bc) \tag{1.7}$$

2. *Commutatività della somma e del prodotto.* Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,
   $$a + b = b + a \tag{1.8}$$
   $$ab = ba \tag{1.9}$$

3. *Distributività del prodotto rispetto alla somma.*

   Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$,
   $$a(b + c) = ab + ac \tag{1.10}$$
   Ovviamente, per la proprietà commutativa, vale anche la distributività a sinistra:
   $$(b + c)a = ba + ca$$

4. *Esistenza degli elementi neutri.* Esistono (e si dimostra essere unici) due numeri reali distinti, denotati 0 e 1, che soddisfano:
   $$a + 0 = a, \qquad\qquad b \cdot 1 = b \tag{1.11}$$
   per ogni a e per ogni $b \neq 0$.

5. *Esistenza degli opposti (rispetto alla somma).* Per ogni a in $\mathbb{R}$ esiste un (unico) b in $\mathbb{R}$ tale che $a + b = 0$. Questo numero b si chiama *opposto* di a e si denota $-a$.

6. *Esistenza degli inversi (rispetto al prodotto) dei numeri diversi da zero.* Per ogni a in $\mathbb{R}$, $a \neq 0$, esiste un (unico) b in $\mathbb{R}$ tale che $ab = 1$. Questo numero b si chiama *inverso* o *reciproco* di a e si denota a^{-1} oppure $\dfrac{1}{a}$.

Gli assiomi fin qui elencati si possono riassumere dicendo che $\mathbb{R}$ è un *campo.*

Non considereremo la sottrazione e la divisione (per un elemento non nullo) come ulteriori operazioni. Si definiscono in termini di addizione e prodotto nel modo seguente:

$$a - b = a + (-b) \qquad \frac{a}{b} = ab^{-1} \quad (b \neq 0) \tag{1.12}$$

Dagli assiomi di campo seguono le ben note regole di conto dell'algebra elementare; per esempio, $a \cdot 0 = 0$, le regole dei segni ("più per meno fa meno") eccetera.

1.3.2 Assiomi di ordine, compatibile con la somma e il prodotto

In $\mathbb{R}$ è definita una *relazione d'ordine*, che si denota $a \leq b$ (si legge: a minore o uguale a b), vale a dire una relazione con le seguenti proprietà:

1. *Proprietà riflessiva.* Per ogni a in $\mathbb{R}$
$$a \leq a$$
2. *Proprietà antisimmetrica.* Per ogni a, b in $\mathbb{R}$
$$a \leq b \text{ e } b \leq a \quad \Longrightarrow \quad a = b$$
3. *Proprietà transitiva.* Per ogni a, b, c in $\mathbb{R}$,
$$a \leq b \text{ e } b \leq c \quad \Longrightarrow \quad a \leq c$$

   Inoltre si richiede che l'ordinamento sia *compatibile con la somma e il prodotto*, nel senso che valgano le due ulteriori proprietà seguenti:
4. Per ogni a, b, c, se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$
5. Per ogni a, b e per ogni $c \geq 0$, se $a \leq b$ allora $ac \leq bc$.

Useremo anche il simbolo $<$ (minore in senso stretto). La scrittura $a < b$ significa

$$a \leq b \quad \text{e} \quad a \neq b$$

Se $a > 0$, si dice che a è *positivo*; se $a < 0$, si dice che a è *negativo.*

Notazioni. Nel seguito, useremo queste notazioni:

- $$\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$
  è l'insieme dei numeri reali *maggiori o uguali* a 0 (*non negativi*);
- $$\mathbb{R}_{>0} = (0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$
  è l'insieme dei numeri reali *maggiori* di 0 (*positivi*);
- $$\mathbb{R}_{\leq 0} = (-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$
  è l'insieme dei numeri reali *minori o uguali* 0 (*non positivi*);
- $$\mathbb{R}_{<0} = (-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$
  è l'insieme dei numeri reali *minori* di 0 (*negativi*);

1.3.3 Assioma di completezza (Proprietà di Separazione).

L'assioma decisivo per la definizione dei numeri reali è l'assioma di completezza. In termini intuitivi, si tratta dell'assioma che si richiede per garantire che $\mathbb{R}$ abbia la proprietà di 'continuità'. Grazie a questo assioma, il campo ordinato dei reali sarà adeguato per esprimere le misure delle grandezze. Ne esistono diverse forme equivalenti. Ad esempio, si può formulare nel modo seguente:

Assioma di completezza. *(Nella forma di Proprietà di Separazione).*
Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ che soddisfino questa condizione:

$$a < b \tag{1.13}$$

per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$. Allora esiste almeno un numero λ in $\mathbb{R}$ che soddisfa

$$a \leq \lambda \leq b \tag{1.14}$$

per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$.

Un numero λ con tale proprietà si dice un *elemento separatore* tra A e B. [2]

Un uso fondamentale dell'assioma di completezza consiste nel *definire* (o *caratterizzare*) un numero reale attraverso due classi contigue di numeri reali. Vediamo di cosa si tatta. Sia (A, B) una coppia di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, che soddisfi la condizione richiesta dall'assioma di completezza (proprietà di separazione): ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B. Diremo che tali classi A e B sono *contigue* se, preso comunque un numero positivo ε, esistono un elemento $b \in B$ e un elemento $a \in A$ per i quali $b - a < \varepsilon$. Se (A, B) è una coppia di classi contigue, allora l'elemento separatore la cui esistenza è affermata dall'assioma di completezza, è unico. Infatti, se ci fossero due elementi separatori distinti, λ_1 e λ_2, con $\lambda_1 < \lambda_2$, la differenza $b - a$ (comunque si prendano $b \in B$ e $a \in A$) non potrebbe mai essere minore di $\lambda_2 - \lambda_1$. Abbiamo così dimostrato il seguente:

Teorema 1.2 (Classi contigue di numeri reali)**.** *Se A e B sono classi contigue di numeri reali, allora esiste un unico $\lambda \in \mathbb{R}$ che soddisfa*

$$a \leq \lambda \leq b$$

per ogni $a \in A$, per ogni $b \in B$.

Diremo che λ è il numero reale definito *dalla coppia di classi contigue* (A, B).

(Si noti che, in quest'ultimo teorema, l'assioma di completezza è essenziale per affermare l'*esistenza* dell'elemento separatore tra le due classi contigue; invece, la parte della dimostrazione che riguarda l'*unicità* dell'elemento separatore, non richiede la completezza di $\mathbb{R}$.)

Con la richiesta dell'assioma di completezza, la definizione di $\mathbb{R}$ come campo ordinato completo è conclusa. Quindi, qualunque altra proprietà di $\mathbb{R}$ si dimostra, a partire dagli assiomi (di campo ordinato completo).

1.3.4 Esistenza della radice quadrata di un numero reale non negativo

Abbiamo visto (Teorema 1.1) che nel campo razionale $\mathbb{Q}$ non esiste la radice quadrata di 2, cioè non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia 2. Invece, la proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ implica che in $\mathbb{R}$ esiste non solo la radice quadrata di 2, ma piú in generale *esiste la radice quadrata di ogni numero $y \geq 0$*. Piú precisamente, vale il seguente teorema.

[2] Si noti che l'assioma di completezza assicura l'*esistenza* di almeno un elemento separatore, non la sua unicità. Vedremo però più avanti un caso importante in cui esiste un unico elemento separatore: si tratta del caso in cui l'insieme B è costituito da *tutti* i numeri reali che sono maggiori o uguali di ogni elemento di A. In tale caso l'elemento separatore è unico ed è l'estremo superiore di A.

Teorema 1.3 (Esistenza (e unicità) della radice quadrata in $\mathbb{R}_{\geq 0}$)**.** *Per ogni $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (cioè, per ogni y non negativo) l'equazione $x^2 = y$ ha una e una sola soluzione in $\mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Dimostreremo questo teorema piú avanti, in un contesto piú generale, come conseguenza del *Teorema dei Valori Intermedi* sulle funzioni continue.

Facciamo ora qualche considerazione sulle radici quadrate. Per ogni $y \geq 0$, l'unica soluzione *maggiore o uguale a zero* dell'equazione $x^2 = y$ si denota con il simbolo $\sqrt{y}$, e si chiama la *radice quadrata* di y. Possiamo allora definire la *funzione radice quadrata*

$$[0, +\infty) \xrightarrow{g} [0, +\infty), \qquad y \longmapsto g(y) = \sqrt{y} \tag{1.15}$$

e avremo, per ogni $x, y \geq 0$,

$$x = \sqrt{y} \qquad \text{se e solo se} \qquad x^2 = y$$

Dunque, quando si considera la funzione radice quadrata nel campo reale, definita da (1.15), si ha, ad esempio, $\sqrt{9} = 3$ (non -3, o "± 3").

1.4 Osservazioni sulla definizione assiomatica del sistema dei numeri reali

Il punto di vista assiomatico, che abbiamo seguito per introdurre i reali, consiste nel definire $\mathbb{R}$ come un campo ordinato completo. Questo significa che si definisce $\mathbb{R}$ come un insieme (la natura dei cui elementi è irrilevante), munito di due operazioni (la somma e il prodotto) e di una relazione d'ordine. Si richiede, come abbiamo visto, che valgano opportune proprietà, che costituiscono gli assiomi di campo ordinato completo: gli assiomi di campo, gli assiomi di ordine, l'assioma di completezza (in una di numerose formulazioni equivalenti).

Se si volesse seguire in modo coerente il punto di vista assiomatico per definire $\mathbb{R}$, occorrerebbe esplorare due questioni:

a) (*Esistenza*). Esistono modelli di numeri reali? Vale a dire, esistono dei metodi per costruire (a partire dai razionali, o da $\mathbb{N}$) delle strutture che soddisfino tutti gli assiomi richiesti? (A priori, potrebbe infatti accadere che un sistema di assiomi sia incompatibile, ossia contraddittorio. In tal caso, staremmo parlando del nulla).

b) (*Unicità*). Esistono modelli dei reali, che siano diversi tra loro "in modo essenziale"?

Senza entrare nei dettagli[3], rispondiamo a queste domande.

Anzitutto, *esistono* metodi per costruire modelli di numeri reali, a partire dai razionali: il metodo delle sezioni (Dedekind, 1872), il metodo delle succesioni di Cauchy (Cantor, 1872), il metodo delle semirette razionali eccetera. Quanto alla questione dell'unicità, si dimostra questo notevole teorema: *Se K e K' sono due campi ordinati completi, allora esiste un* isomorfismo *(e uno solo) da K a K', ossia esiste un'unica applicazione* biunivoca $K \xrightarrow{f} K'$, *che* preserva la somma, il prodotto e l'ordinamento*:*

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(xy) &= f(x)f(y) \\ x \leq y &\implies f(x) \leq f(y) \end{aligned} \tag{1.16}$$

"This theorem brings to an end our investigation of the real numbers, and resolves any doubts about them: There is a complete ordered field and, up to isomorphism, only one complete ordered field. It is an important part of a mathematical education to follow a construction of the real

[3] Per approfondimenti: H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch et al., *Numbers*, Springer, 1991. Oppure: M. Spivak, *Calculus*, Third edition, Publish or Perish, 1994.

numbers in detail, but it is not necessary to refer ever again to this particular construction. It is utterly irrelevant that a real number happens to be a collection of rational numbers, and such a fact should never enter the proof of any important theorem about the real numbers. Reasonable proofs should use only the fact that the real numbers are a complete ordered field, because this property of the real numbers characterizes them up to isomorphism, and any significant mathematical property of the real numbers will be true for all isomorphic fields. To be candid I should admit that this last assertion is just a prejudice of the author, but it is one shared by almost all other mathematicians". (M. Spivak, *Calculus*, Third edition, Publish or Perish, 1994, p.595)

2 Altre proprietà dei numeri reali

Vediamo ora altre importanti proprietà del campo ordinato completo $\mathbb{R}$ e delle successioni in $\mathbb{R}$.

2.1 Esistenza dell'estremo superiore

Una conseguenza fondamentale della proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ è l'esistenza dell'estremo superiore. Premettiamo alcune definizioni.

Sia $E \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme (non vuoto) di $\mathbb{R}$.

- Un numero $b \in \mathbb{R}$ si chiama una *limitazione superiore* di E se
$$\forall x \in E \qquad x \leq b \tag{2.1}$$
(Si noti che non si richiede che b appartenga a E). Un insieme E si dice *superiormente limitato* se esistono limitazioni superiori di E.

- Un numero $M \in \mathbb{R}$ si chiama il *massimo* di E se è una limitazione superiore di E e inoltre appartiene a E:
$$M \in E \qquad \text{e per ogni } x \in E \qquad x \leq M \tag{2.2}$$

- Un numero $a \in \mathbb{R}$ si chiama una *limitazione inferiore* di E se
$$\forall x \in E \qquad a \leq x \tag{2.3}$$
(Si noti che non si richiede che a appartenga a E). Un insieme E si dice *inferiormente limitato* se esistono limitazioni inferiori di E.

- Un numero $m \in \mathbb{R}$ si chiama il *minimo* di E se è una limitazione inferiore di E e inoltre appartiene a E:
$$m \in E \qquad \text{e per ogni } x \in E \qquad m \leq x \tag{2.4}$$

Un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ si dice *limitato* quando è sia superiormente limitato che inferiormente limitato.

Un insieme limitato di numeri reali può non avere il minimo o il massimo (ad esempio l'intervallo aperto $(0, 1)$ non ha minimo né massimo). Ovviamente, se il minimo (o il massimo) esiste, è unico[4].

Dimostriamo ora che l'assioma di completezza, nella forma della proprietà di separazione (1.14) implica la proprietà di esistenza dell'estremo superiore.

Teorema 2.1 (Esistenza del sup)**.** *Ogni sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato possiede una minima limitazione superiore.*

Questa minima limitazione superiore si chiama estremo superiore *di E e si denota* $\sup E$.

[4]Se m, m' sono elementi minimi di un insieme E, si deve avere $m \leq m'$ e $m' \leq m$. Dunque $m = m'$.

Dimostrazione. Denotiamo

$$Z = \{z \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E \quad x \leq z\} \tag{2.5}$$

Dunque, Z è l'insieme di tutte le limitazioni superiori di E. (L'insieme Z non è vuoto, perché, per ipotesi, E è superiormente limitato). Per l'assioma di completezza (*Proprietà di Separazione*) visto nel paragrafo 1.3.3, esiste un numero λ che soddisfa le due disuguaglianze

$$(\forall x \in E) \ (\forall z \in Z) \qquad x \leq \lambda \leq z \tag{2.6}$$

La prima disuguaglianza

$$\forall x \in E \qquad x \leq \lambda \tag{2.7}$$

dice che λ è *una limitazione superiore* di E. La seconda disuguaglianza

$$\forall z \in Z \qquad \lambda \leq z \tag{2.8}$$

esprime il fatto che λ è *la minima* limitazione superiore di E, cioè che fra tutte le limitazioni superiori di E, λ è la più piccola. Tale minima limitazione superiore è ovviamente *unica*, in quanto è il minimo dell'insieme Z dei maggioranti. (Il minimo di un insieme è sempre unico).

Q.E.D.

In modo del tutto simile, si dimostra che:

Ogni sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto e inferiormente limitato possiede una massima limitazione inferiore.

Questa massima limitazione inferiore si denota $\inf E$ e si chiama *estremo inferiore* di E.

Osservazione. Abbiamo visto che la proprietà di separazione (l'assioma di completezza che abbiamo enunciato precedentemente) implica l'esistenza dell'estremo superiore. Si dimostra (si veda l'esercizio 5.15) che vale anche l'implicazione inversa: in un campo ordinato, la proprietà di esistenza dell'estremo superiore (di insiemi non vuoti e superiormente limitati) implica la proprietà di separazione. Dunque le due proprietà sono equivalenti (in un campo ordinato); una qualunque di esse può essere utilizzata per esprimere la proprietà di completezza di $\mathbb{R}$. Potremmo dunque richiedere direttamente la completezza di $\mathbb{R}$ con l'assioma seguente:

Assioma di completezza. Seconda forma: Proprietà di esistenza dell'estremo superiore. *Ogni sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato possiede una minima limitazione superiore (a cui si dà il nome di* estremo superiore*).*

2.2 Proprietà di Archimede.

Cominciamo con il dimostrare un fatto (apparentemente) ovvio: l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali non è superiormente limitato. Ricordiamo (in modo informale, senza la pretesa di dare qui una definizione rigorosa), che l'insieme $\mathbb{N}$ è costituito dai *numeri interi maggiori o uguali a zero*:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\} \tag{2.9}$$

Teorema 2.2. *L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali non è superiormente limitato.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che $\mathbb{N}$ sia superiormente limitato. Allora, per la proprietà dell'estremo superiore, esiste l'estremo superiore di $\mathbb{N}$, chiamiamolo L. Poiché L è una limitazione superiore di $\mathbb{N}$, si ha

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad\qquad n \leq L \tag{2.10}$$

E poiché L è *la minima* limitazione superiore, il numero $L-1$ non è una limitazione superiore di $\mathbb{N}$, cioè

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad L - 1 < n_0 \tag{2.11}$$

ossia

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad L < n_0 + 1 \tag{2.12}$$

Siamo arrivati a un assurdo, perché la (2.12) nega la condizione (2.10). (In altri termini, n_0+1 è anch'esso un numero naturale, ed è assurdo che un numero naturale sia maggiore dell'estremo superiore dei numeri naturali.) Q.E.D.

Una semplice, ma fondamentale, conseguenza del fatto che $\mathbb{N}$ non è superiormente limitato, è la proprietà di Archimede.

Teorema 2.3 (Proprietà di Archimede)**.** *Siano a, b numeri reali positivi. Allora esiste un numero naturale n tale che $na > b$:*

$$\exists n \in \mathbb{N} \qquad na > b \tag{2.13}$$

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo vera la negazione di (2.13):

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad na \leq b \tag{2.14}$$

o, in modo equivalente,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \leq \frac{b}{a} \tag{2.15}$$

Allora il numero $\dfrac{b}{a}$ è una limitazione superiore per $\mathbb{N}$, cioè l'insieme $\mathbb{N}$ è superiormente limitato. Questo è assurdo, per il teorema precedente.

Q.E.D.

Intuitivamente, la proprietà di Archimede assicura che fissato un numero $a > 0$ (per quanto 'piccolo' possa essere) e fissato un numero positivo b (per quanto 'grande' possa essere), esiste sempre un multiplo na di a che supera b. (Naturalmente, le espressioni numero 'grande' o 'piccolo' non hanno alcun significato).

Ne segue che vale il fatto seguente, che useremo molto spesso.

Proposizione 2.4. *Supponiamo che $c \in \mathbb{R}$ soddisfi queste due proprietà:*

1. $c \geq 0$
2. *Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $c \leq \varepsilon$.*

Allora $c = 0$.

Infatti, supponiamo $c > 0$. Per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ per il quale $nc > 1$, ossia $c > \dfrac{1}{n}$. Posto $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, non vale allora la condizione 2).

In altri termini, una conseguenza della proprietà di Archimede è che in $\mathbb{R}$ *non esistono 'numeri infinitesimi'* , se con questo termine si intendono numeri che siano maggiori di zero, ma minori o uguali di ogni numero positivo.

Attenzione. Abbiamo affermato, e dimostrato, che *nel campo ordinato completo* $\mathbb{R}$ non esistono *numeri infinitesimi* (cioè, numeri maggiori di zero, ma minori di qualunque numero positivo). Ci sono però altre teorie matematiche in cui esistono, in qualche forma, degli 'infinitesimi', ovviamente definiti in modo opportuno. Un esempio molto interessante di tali teorie è l'analisi non standard di A. Robinson, formulata nei primi anni 60 del secolo scorso. Un altro bellissimo esempio è l'approccio categoriale della *smooth infinitesimal analysis* di W. Lawvere (le cui idee fondamentali risalgono anch'esse ai primi anni sessanta del secolo scorso).

2.3 Valore assoluto e distanza

Definizione 2.5. *Il* valore assoluto *di un numero reale a, denotato $|a|$, è definito in questo modo:*

$$|a| = \begin{cases} a & \textit{se } a > 0, \\ 0 & \textit{se } a = 0, \\ -a & \textit{se } a < 0. \end{cases}$$

Definizione 2.6. *La* distanza *tra due numeri reali x, y, denotata $\mathtt{d}(x, y)$, è definita da:*

$$\mathtt{d}(x, y) = |x - y| \tag{2.16}$$

Occorre ricordare la *disuguaglianza triangolare*:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{2.17}$$

valida per ogni x, y in $\mathbb{R}$. Per la dimostrazione della disuguaglianza triangolare (2.17), si veda l'esercizio 5.19.

2.4 Limiti di successioni

Definizione 2.7. *Si chiama* successione in un insieme A *o* successione di elementi di A *una funzione*

$$\mathtt{N} \xrightarrow{a} A$$

il cui dominio è l'insieme $\mathtt{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ dei numeri naturali e il cui codominio è A.

Definizione 2.8. *Si dice che la successione a_n in $\mathbb{R}$* tende al numero reale L, *(o* converge *a L, o* ha per limite L*) e si scrive*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero naturale r tale che, per ogni n in $\mathtt{N}$,

$$n > r \Longrightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

A parole: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$ significa che la distanza $\mathtt{d}(a_n, L)$ (che è data da $|a_n - L|$) diventa arbitrariamente piccola, per tutti gli n sufficientemente grandi.

È utile introdurre questo modo di dire: i termini di una successione godono *definitivamente* di una proprietà se la possiedono a partire da un certo indice in poi. Detto altrimenti, i termini di una successione possiedono definitivamente una proprietà se a_n non soddisfa quella proprietà solo per un numero finito di indici n. Ad esempio, la successione $a_n = 10 - n$ è definitivamente negativa, perché a_n è negativo per tutti gli n maggiori di 11. Possiamo allora dire che:

Una successione a_n tende a $L \in \mathbb{R}$ quando n tende a $+\infty$ se, per ogni $\epsilon > 0$, la distanza di a_n da L è definitivamente minore di ϵ.

Esempio. Un limite fondamentale, che segue dalla proprietà di Archimede, è il seguente:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Dimostrazione. Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Per la proprietà di Archimede, esiste un numero naturale n_0 per il quale si ha $n_0\varepsilon > 1$, ossia $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Allora per tutti i numeri naturali $n > n_0$ si ha

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Quindi, per la definizione di limite, si ha $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Esempio. Un altro limite fondamentale è

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Dimostrazione. Segue dalla disuguaglianza $0 < \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n}$, che vale per ogni intero positivo n e dal fatto che $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Una successione può divergere a $+\infty$, oppure a $-\infty$. Diamo le definizioni:

Definizione 2.9. *Si dice che la successione di numeri reali a_n* diverge a $+\infty$ *(o* tende *a $+\infty$) e si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste un numero naturale r tale che

$$a_n > M$$

per ogni $n > r$.

La variante da apportare per definire le successioni divergenti a $-\infty$ è ovvia:

Definizione 2.10. *Si dice che la successione di numeri reali a_n* diverge a $-\infty$ *(o* tende *a $-\infty$) e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

se per ogni $M < 0$ esiste un numero naturale r tale che

$$a_n < M$$

per ogni $n > r$.

Esempio La successione $a_n = n^2$ dei quadrati degli interi naturali, diverge a $+\infty$. Infatti, fissato $M > 0$, la disuguaglianza $n^2 > M$ è soddisfatta da tutti gli interi n maggiori di $\sqrt{M}$.

2.5 Unicità del limite. Permanenza del segno.

Per quanto ovvio questo fatto possa sembrare, dimostriamo che una successione in $\mathbb{R}$ non può avere due limiti distinti:

Teorema 2.11 (Unicità del limite)**.** *Una successione in $\mathbb{R}$ può avere al più un limite.*

Dimostrazione. Supponiamo che L' e L'' siano entrambi limiti della successione (a_n). Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $K' \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L'| < \varepsilon/2$ per tutti gli $n \geq K'$, e esiste un $K'' \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L''| < \varepsilon/2$ per tutti gli $n \geq K''$. Chiamiamo K il più grande tra K' e K''. Allora, per ogni $n \geq K$, applichiamo la disuguaglianza triangolare (2.17) e otteniamo

$$|L' - L''| = |L' - a_n + a_n - L''| \leq |L' - a_n| + |a_n - L''| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \tag{2.18}$$

Dal momento che ε è un numero positivo arbitrario, concludiamo (usando la Proposizione 2.4) che $|L' - L''| = 0$, ossia che $L' = L''$.

Q.E.D.

Teorema 2.12 (Permanenza del segno)**.** *Sia a_n una successione convergente in $\mathbb{R}$ al numero L. Se $L > 0$, allora i termini della successione sono definitivamente positivi.*

Dimostrazione. Se ε è sufficientemente piccolo, l'intorno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ di L non contiene lo 0 (per esempio, basta prendere $\varepsilon < L/2$) e quindi è costituito interamente da numeri positivi. Fissato un tale ε, esiste un numero naturale n_0 tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ soddisfacente $n > n_0$, risulta $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$:

$$0 < L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

Dunque, per ogni $n > n_0$, a_n è maggiore di zero. Q.E.D.

In modo analogo, si dimostra che se la successione a_n converge al numero $L < 0$, allora i suoi termini sono definitivamente negativi.

2.6 Le successioni in $\mathbb{R}$ crescenti e limitate convergono.

Nel teorema seguente si usa in modo decisivo l'assioma di completezza.

Teorema 2.13 (Successioni monotone limitate)**.** *Ogni successione in $\mathbb{R}$ che sia crescente*

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots \tag{2.19}$$

e (superiormente) limitata è convergente. Precisamente, converge all'estremo superiore dell'insieme dei suoi termini.

Se invece una successione è decrescente e limitata, convergerà all'estremo inferiore dell'insieme dei suoi termini.

Dimostrazione. Sia (a_n), $n \in \mathbb{N}$, una successione crescente e limitata. Chiamiamo

$$A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

l'insieme dei suoi elementi. Per ipotesi l'insieme A è (non vuoto e) limitato. Pertanto (qui si usa la completezza dei reali) A ha un estremo superiore. Poniamo $L = \sup A$.

Ricordiamo che l'estremo superiore L di A è il numero reale caratterizzato dalle due proprietà seguenti:

1. $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. (L è una limitazione superiore per A).

2. Per ogni $L' < L$ esiste un $a_k \in A$ per il quale $L' < a_k$. (L è la minima limitazione superiore di A, ossia nessun numero L' più piccolo di L è una limitazione superiore per A).

Dimostriamo che a_n converge a L. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Siccome il numero $L - \varepsilon$ è minore di L, non può essere una limitazione superiore dell'insieme $A = \{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$. Dunque esiste un intero k per il quale $L - \varepsilon < a_k$. Poiché la successione è crescente, per tutti gli $n > k$ si ha $a_k < a_n$ e quindi $L - \varepsilon < a_n$, definitivamente. Ma per ogni n si ha $a_n \leq L$. Quindi si ha

$$L - \varepsilon < a_n \leq L$$

per tutti gli $n > k$. Per l'arbitrarietà di ε, si conclude che a_n tende a L. Q.E.D.

Un'applicazione importante. Come applicazione del teorema precedente, si consideri la successione in $\mathbb{R}$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Si dimostra (si veda il teorema 3.5) che tale successione è crescente e limitata. (Ad esempio, si dimostra che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$, per ogni $n \geq 1$). Allora per il teorema 2.13, la successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge a un limite, detto *costante di Nepero*, che si denota con la lettera e. Si pone dunque per definizione:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Si tratta di un numero irrazionale, le cui prime cifre decimali sono date da:

$$e = 2.7182818\ldots.$$

Si noti che la dimostrazione del precedente teorema 2.13 sfrutta in modo essenziale la completezza di $\mathbb{R}$, sotto la forma dell'esistenza dell'estremo superiore. Ovviamente il teorema non vale in $\mathbb{Q}$, dove si possono trovare, ad esempio, successioni crescenti e limitate di razionali che convergono in $\mathbb{R}$ a $\sqrt{2}$, e quindi in $\mathbb{Q}$ non convergono.

2.7 Proprietà degli intervalli compatti inscatolati

Dall'assioma di completezza dei numeri reali, segue la validità del seguente teorema, che utilizzeremo in seguito (ad esempio nel teorema degli zeri per le funzioni continue).

Per *intervallo* di $\mathbb{R}$ intendiamo un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di uno dei seguenti tipi (a, b sono numeri reali, $a \leq b$):

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervallo aperto);
2. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$;
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, (intervallo chiuso e limitato, o intervallo compatto);
5. $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, (semiretta aperta);
6. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$, (semiretta chiusa);
7. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, (semiretta aperta);
8. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, (semiretta chiusa);

9. L'intera retta reale $\mathbb{R}$.

Più in generale, si danno queste definizioni. Un qualunque sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ (anche non un intervallo) si dice *limitato* se esiste un numero $M \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in E$, si ha $|x| < M$. Un sottoinsieme F di $\mathbb{R}$ si dice *chiuso* in $\mathbb{R}$ se sodisfa la proprietà seguente: per ogni successione x_n di elementi di F, se $\lim_{n \to +\infty} x_n = c$, allora c appartiene a F. In altri termini, un sottoinsieme F di $\mathbb{R}$ è chiuso se contiene i limiti di tutte le successioni (convergenti) di suoi elementi.

Teorema 2.14 (Proprietà degli intervalli compatti inscatolati)**.** *Sia*

$$I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} \mid \ a_n \leq x \leq b_n\}, \qquad (a_n < b_n), \qquad n \in \mathbb{N}$$

una successione di intervalli compatti (cioè chiusi e limitati) dell'asse reale $\mathbb{R}$*, tali che ciascuno di essi includa il successivo:*

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots \tag{2.20}$$

Allora l'intersezione $\bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n$ *di tutti gli intervalli* I_n *non è vuota, cioè* esiste *(almeno) un punto* $c \in \mathbb{R}$ *che appartiene a tutti gli intervalli* I_n*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

Se inoltre le lunghezze $b_n - a_n$ *degli intervalli* I_n *tendono a zero,*

$$\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0 \tag{2.21}$$

allora è unico *il punto* $c \in \mathbb{R}$ *che appartiene a tutti gli* I_n*.*

Osservazione. Grazie a questo teorema, potremo dire che:

Ogni successione I_n *di intervalli compatti inscatolati, le cui ampiezze tendono a zero,* rappresenta un numero reale*, cioè determina uno e un solo numero reale (razionale o irrazionale).*

Ci si convince facilmente che il teorema non sussiste nel campo dei razionali[5]. Inoltre, il teorema non sussiste, nemmeno in $\mathbb{R}$, se si toglie l'ipotesi che gli intervalli siano compatti.[6]

Dimostrazione. (Teorema 2.14.) Dall'ipotesi 2.20, che possiamo scrivere, in modo equivalente, come

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots b_1 \leq b_0 \tag{2.22}$$

si vede facilmente che, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ (anche diversi tra loro)

$$a_n \leq b_m$$

Poniamo

$$A = \{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}, \qquad\qquad B = \{b_m,\, m \in \mathbb{N}\}$$

L'insieme A è superiormente limitato (un qualunque elemento di B è una limitazione superiore di A) e l'insieme B è inferiormente limitato (un qualunque elemento di A è una limitazione inferiore di A). Allora, per il teorema di esistenza del sup (teorema 2.1), esistono $\sup A$ e $\inf B$. Poniamo $\sup A = \alpha$ e $\inf B = \beta$. Ovviamente, si ha

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_m$$

[5] Ad esempio, nella retta razionale $\mathbb{Q}$, si consideri la successione di intervalli $I_n = [(1 + \frac{1}{n})^n, (1 + \frac{1}{n})^{n+1}]$. Non esiste alcun numero razionale che appartenga a tutti questi intervalli. (In $\mathbb{R}$, l'unico punto che appartiene a tutti questi intervalli I_n è la costante di Nepero e, che però non è razionale).

[6] Ad esempio, si consideri la successione di intervalli (limitati, ma non chiusi) inscatolati $A_n = (0, 1/n)$, $n \geq 1$. Ovviamente non esiste alcun numero reale che appartenga a A_n per ogni n. Esercizio: Trovare una successione J_n di intervalli inscatolati che siano chiusi e non limitati, per i quali l'intersezione $\bigcap_n J_n$ sia vuota.

In particolare, per $n = m$, abbiamo

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad\qquad a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$$

Dunque ogni punto dell'intervallo $[\alpha, \beta]$ è contenuto in ognuno degli intervalli I_n. Abbiamo così dimostrato che l'intersezione $\bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n$ di tutti gli intervalli I_n non è vuota.

Dimostriamo ora che, se le ampiezze $(b_n - a_n)$ tendono a zero, allora $\alpha = \beta$ e quindi esiste un *unico* punto $\alpha = \beta \in \mathbb{R}$ che appartiene a tutti gli I_n.

Infatti, se fosse $\alpha < \beta$, avremmo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq \alpha < \beta \leq b_n$$

Ma allora tutte le ampiezze $b_n - a_n$ sarebbero maggiori di $\beta - \alpha$:

$$b_n - a_n \geq \beta - \alpha > 0$$

Questo contraddice l'ipotesi $\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$. Q.E.D.

2.8 L'insieme dei razionali è numerabile

Si dice che due insiemi X e Y *hanno la stessa cardinalità* se si possono mettere in corrispondenza biunivoca, cioè se esiste una funzione bigettiva (cioè iniettiva e suriettiva) da X a Y.

Un insieme T si dice *numerabile* se ha la stessa cardinalità dell'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ dei numeri naturali. [7] Ad esempio, l'insieme $P = \{0, 1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$ dei quadrati perfetti è numerabile. Si noti che P ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$, anche se è un *sottoinsieme proprio* di $\mathbb{N}$.

Teorema 2.15. *L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile.*

Dimostrazione. (Cenni). Vediamo l'idea della dimostrazione. Basta dimostrare che l'insieme $\mathbb{Q}_{>0}$ dei razionali positivi è numerabile[8]. Consideriamo allora questa tabella infinita:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & . \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & . & . \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & . & . & . \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & . & . & . & . \\
\frac{5}{1} & . & . & . & . & .
\end{array}$$

L'elemento $a_{m,n}$ che si trova nell'intersezione tra la riga m e la colonna n è la frazione m/n. L'insieme costituito da tutti gli elementi $a_{m,n}$ di tale tabella è numerabile. Infatti, gli elementi $a_{m,n} = m/n$ si possono ordinare nella seguente successione:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \quad \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \quad \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \quad ....$$

[7] Si dice anche che gli insiemi numerabili *hanno cardinalità* $\aleph_0$ (aleph zero) o *hanno la cardinalità del numerabile*.

[8] Infatti, se i razionali positivi si possono ordinare nella successione $r_1, r_2, r_3, ..$, allora tutti i razionali si possono elencare come $r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, ...$

(Elenchiamo gli elementi $a_{m,n} = m/n$ scrivendo prima quello con $m+n = 2$, poi quelli con $m+n = 3$, poi quelli con $m+n = 4$ eccetera.) L'insieme $\mathbb{Q}_{>0}$ dei razionali positivi è un sottoinsieme dell'insieme degli elementi che figurano nella tabella. Quindi anche $\mathbb{Q}_{>0}$ è numerabile. Q.E.D.

2.9 L'insieme $\mathbb{R}$ non è numerabile. (Prima dimostrazione).

Teorema 2.16. *L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non è numerabile.*

Dimostrazione. Dimostriamo che l'intervallo $[0, 1]$ non è numerabile. (Questo implica ovviamente che $\mathbb{R}$ non è numerabile).

Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che l'insieme $[0, 1]$ sia numerabile, vale a dire che si possano ordinare tutti gli elementi di $[0, 1]$ in una successione

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, .. \tag{2.23}$$

Poniamo $I_0 = [0, 1]$. Sia $I_1 \subset I_0$ un qualunque intervallo chiuso di lunghezza positiva (cioè non costituito da un singolo punto) che non contenga x_1. Sia $I_2 \subset I_1$ un qualunque intervallo chiuso di lunghezza positiva che non contenga x_2. Procedendo in questo modo, costruiamo una successione di intervalli chiusi inscatolati

$$I_0 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

tali che $x_n \notin I_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per il teorema sugli intervalli inscatolati, esiste un numero reale c che appartiene a tutti gli I_n, $n \in \mathbb{N}$. Per ipotesi, questo numero c deve figurare nella successione 2.23: $c = x_k$, per un k opportuno. Ma per il modo in cui abbiamo costruito la successione I_n, l'intervallo I_k non contiene $x_k = c$. Quindi c non appartiene a tutti gli intervalli I_n. Siamo arrivati a una contraddizione. Q.E.D.

2.10 Rappresentazione binaria e rappresentazione decimale dei numeri reali

Diamo un cenno alla rappresentazione dei numeri reali in base 2 (rappresentazione binaria) o in base 10 (rappresentazione decimale). La rappresentazione dei numeri in una base b arbitraria ($b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$), si tratta in modo del tutto analogo.

Rappresentazione in base 2.

Vediamo, anzitutto, come si rappresenta un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ in base 2, utilizzando solo le due cifre 0 e 1. Limitiamoci a illustrare il concetto con un esempio, che dovrebbe bastare per capire come si procede nel caso generale. Vogliamo scrivere in base 2 il numero 21, (ossia, per essere più precisi, il numero la cui scrittura in base 10 è 21). Si tratta di scrivere 21 come somma di potenze 2^k, $k = 0, 1, 2, ...$ La più grande potenza di 2 che non supera 21 è $2^4 = 16$. Restano $21 - 2^4 = 5$ unità. La più grande potenza di 2 che non supera 5 è $2^2 = 4$. La differenza è $21 - 2^4 - 2^2 = 1 = 2^0$. Quindi, abbiamo

$$21 = 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$$

Pertanto la scrittura in base 2 di 21 è 10101.

Ora, ogni numero reale x si scrive come somma della sua *parte intera* $[x]$ (definita come il più grande intero minore o uguale a x) e di un numero (detto talvolta *mantissa* di x) che si trova nell'intervallo $[0, 1)$ (0 incluso, 1 escluso). Abbiamo già visto come si rappresenta, in base 2, la parte intera (che potrà essere anche un intero negativo). Resta allora da vedere come rappresentare, in base 2, un qualunque numero reale compreso tra 0 e 1.

Sia c un numero reale nell'intervallo $[0, 1]$. Associamo a c la sequenza di cifre 0 e 1 costruita nel modo seguente. Dividiamo l'intervallo $[0, 1]$ in due parti uguali; se c sta nella metà di sinistra, scriviamo la cifra 0, se sta in quella di destra, scriviamo la cifra 1. Poi iteriamo il procedimento. Vale a dire, dimezziamo ancora il semi-intervallo che contiene c, e scriviamo 0 se c sta nella metà di sinistra, 1 se sta nella metà di destra. E così via. Una difficoltà nasce quando c coincide con il punto di mezzo di un intervallino.[9] In questo caso, scegliamo l'intervallo di destra, ossia scriviamo la cifra 1. Il motivo di questa scelta sta nel fatto che in questo modo, nei passi successivi, avremo sempre 0; se invece scegliessimo l'intervallino di sinistra, otterremmo il periodo 1. Per esempio, scriveremo $0,10000$, e non $0,0111111....$ In questo modo, a ogni numero reale compreso tra 0 e 1 associamo una successione di cifre 0 e 1, che non è definitivamente uguale a 1.

Viceversa, una sequenza

$$0, a_1 a_2 a_3 a_4 .... a_n ... \tag{2.24}$$

di cifre 0 e 1 assegna una regola per costruire una successione di intervalli dimezzati, a partire dall'intervallo $[0,1]$, e quindi (per la proprietà degli intervalli inscatolati) determina un numero reale in $[0,1]$. Descriviamo questa regola. Dividiamo l'intervallo $I_1 = [0,1]$ in due parti uguali. Se $a_1 = 0$, scegliamo la metà di sinistra; se $a_1 = 1$, scegliamo la metà di destra. Chiamiamo I_2 l'intervallo che abbiamo scelto in questo modo. Al secondo passo, dimezziamo ancora I_2; se $a_2 = 0$, prendiamo la metà di sinistra, se $a_2 = 1$, prendiamo la metà di destra. Iterando il procedimento, otterremo una successione di intervalli dimezzati $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ....$ Ad esempio, se la sequenza inizia con $0,1001...$, i primi intervalli inscatolati saranno

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right] \supset \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \supset \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right] \supset \left[\frac{9}{16}, \frac{5}{8}\right] \supset \cdots$$

Riassumendo: i numeri reali si rappresentano, in base 2, come allineamenti di cifre uguali a 0 o 1. A sinistra della virgola, scriviamo la rappresentazione binaria della parte intera; a destra della virgola, scriviamo la rappresentazione binaria di un numero nell'intervallo $[0,1)$. *La corrispondenza tra l'insieme di tali allineamenti binari e $\mathbb{R}$ è biunivoca, pur di utilizzare sequenze* proprie*, cioè sequenze di 0 e 1 che non siano definitivamente uguali a 1.*

Rappresentazione in base 10.

In modo del tutto simile si procede se si sceglie la base 10. Ad esempio, vediamo come si costruisce la rappresentazione decimale di un numero $c \in (0.1)$. Dividiamo l'intervallo $[0,1]$ in 10 parti uguali

$$\left[0, \frac{1}{10}\right], \ \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right], \ ...., \ \left[\frac{9}{10}, 1\right]$$

Se c appartiene al primo intervallino $(0, 1/10)$, fissiamo la cifra 0; se appartiene al secondo intervallino $(1/10, 2/10)$, fissiamo la cifra 1 eccetera; se appartiene all'ultimo intervallino $(9/10, 1)$, fissiamo la cifra 9. Iterando il procedimento, costruiamo un allineamento di cifre $0, 1, 2, 3, ..., 9$. Occorre però fare attenzione al caso in cui il numero c sia estremo comune di due intervallini contigui.[10] In questo caso, sceglieremo l'intervallo di destra, in modo da evitare il periodo 9. Ad esempio, scriveremo 0,1 anziché 0,0999999... Naturalmente, se il numero c è arbitrario (non necessariamente compreso tra 0 e 1), rappresenteremo c come la sua parte intera seguita (dopo la virgola) dalla sua parte decimale (che è un numero compresa tra 0 e 1).

In definitiva: chiamiamo allineamento decimale *proprio* un allineamento decimale in cui le cifre non siano definitivamente (cioè da un certo posto in poi) uguali a 9. Allora il procedimento descritto sopra definisce *una funzione invertibile (cioè, iniettiva e suriettiva)*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} D \tag{2.25}$$

da $\mathbb{R}$ all'insieme D di tutti gli allineamenti decimali propri.

Dimostreremo più avanti (si veda il teorema 3.4) che:

[9] Questo fatto si verifica quando c è una frazione il cui denominatore è una potenza di 2. I razionali che si scrivono come $m/2^k$, $m, k \in \mathbb{N}$ si chiamano *razionali diadici.*

[10] Questo accade quando c è una frazione il cui denoinatore è una potenza di 10. I razionali il cui denominatore è una potenza di 10 si chiamano *razionali decimali.*

Un numero reale è razionale se, e solo se, è rappresentato da un allineamento decimale periodico (incluso il caso del periodo 0).

Dunque:

Un numero è irrazionale se, e solo se, è rappresentato da un allineamento decimale non periodico.

2.11 L'insieme $\mathbb{R}$ non è numerabile. (Seconda dimostrazione).

Presentiamo una seconda dimostrazione - dovuta a Georg Cantor - del fatto che l'insieme $\mathbb{R}$ non è numerabile. Il metodo della dimostrazione è chiamato procedimento della diagonale, o argomento della diagonale.

Teorema 2.17 (Georg Cantor, 1890.). *L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non è numerabile.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che l'insieme $\mathbb{R}$ sia numerabile, cioè che esista una funzione invertibile $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. La rappresentazione decimale dei numeri reali definisce una funzione invertibile $\mathbb{R} \xrightarrow{g} D$, dove D è l'insieme degli allineamenti decimali propri (quelli senza periodo 9). Dunque la funzione composta $\mathbb{N} \xrightarrow{g\circ f} D$ definisce una funzione invertibile da $\mathbb{N}$ a D. Allora tutti gli allineamenti decimali (propri) sono ordinati in una successione:

$$\begin{aligned}
&a_0 = \alpha_0^0,\ \alpha_1^0\alpha_2^0\alpha_3^0....\alpha_n^0.........\\
&a_1 = a_0^1,\ \alpha_1^1\alpha_2^1\alpha_3^1.....\alpha_n^1.........\\
&a_2 = a_0^2,\ \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2.....\alpha_n^2.........\\
&a_3 = a_0^3,\ \alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^3.....\alpha_n^3.........\\
&.....................................\\
&a_n = a_0^n,\ \alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n.....\alpha_n^n.......\\
&.....................................
\end{aligned}$$

(Qui i termini prima della virgola, cioè $\alpha_0^0, \alpha_0^1, \alpha_0^2, ...$ eccetera, sono numeri interi: rappresentano la parte intera del numero. Le cifre dopo la virgola rappresentano la parte decimale). Ora proviamo - con una tecnica dimostrativa dovuta a Georg Cantor, detta "argomento diagonale" - che esiste un allineamento decimale proprio che non compare nella lista di sopra. L'idea è di definire un tale allineamento decimale in modo tale che differisca dal primo termine a_0 dell'elenco per l'intero α_0^0, che differisca dal termine a_1 per la prima cifra α_1^1 dopo la virgola e, in generale, differisca da a_n per l'ennesima cifra decimale α_n^n. Per esempio, definiamo l'allineamento decimale

$$b = \beta_0,\ \beta_1\beta_2\beta_3..\beta_n...$$

nel modo seguente. Sia β_0 un qualunque intero diverso da α_0^0 e, per ogni $n \geq 1$, poniamo

$$\beta_n = \begin{cases} 7 & \text{se } \alpha_n^n \text{ è una delle cifre} \quad 0,1,2,3,4, \\ 3 & \text{se } \alpha_n^n \text{ è una delle cifre} \quad 5,6,7,8,9. \end{cases}$$

L'allineamento decimale b così definito è proprio (cioè non ha periodo 9) ed è diverso da ogni termine della successione $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ Infatti, differisce dal primo termine a_0 perché $\beta_0 \neq \alpha_0^0$ e, per ogni $n \geq 1$, differisce da a_n almeno per la n-esima cifra decimale α_n^n. Quindi la funzione $\mathbb{N} \longrightarrow D$, $n \mapsto a_n$, non è suriettiva. Siamo arrivati a un assurdo, perché avevamo supposto che questa funzione fosse biunivoca. Concludiamo allora che $\mathbb{R}$ non è numerabile. Q.E.D.

2.12 $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile (teorema 2.15), mentre l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non lo è (teorema 2.17). Questi due fatti insieme implicano allora (la dimostrazione non è difficile[11]) che l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dei numeri irrazionali (cioè, linsieme dei numeri reali che non sono razionali) non è numerabile.

Dunque, possiamo riassumere la situazione, in modo un po' informale, dicendo che ci sono 'più' numeri irrazionali che numeri razionali.

Malgrado il fatto che i numeri razionali siano 'meno numerosi' dei razionali, vale un'importante proprietà, che si chiama proprietà di *densità* dei razionali nell'insieme dei reali:

Ogni numero reale può essere approssimato, con ogni desiderato grado di precisione, per mezzo di numeri razionali.

Con i prossimi due teoremi, enunciamo in modo preciso la proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ in due modi diversi, ma tra loro quivalenti.

Teorema 2.18 ($\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. Prima formulazione)**.** *Se a, b sono numeri reali e $a < b$, allora esiste un numero razionale g tale che $a \leq g \leq b$*

In generale, un sottoinsieme D di un insieme ordinato X si dice *denso* in X se per tutte le coppie $x < y$ in X esiste un $d \in D$ tale che $x < d < y$. Qui abbiamo $D = \mathbb{Q}$ e $X = \mathbb{R}$.

Dimostrazione.

Primo caso. Se $a < 0 < b$, basta prendere $g = 0$.

Secondo caso. Supponiamo $0 < a < b$. Per la *Proprietà di Archimede* (teorema 2.3) (applicata alla coppia di numeri $b - a$ e 1) esiste un numero naturale n per il quale si ha $n(b - a) > 1$. Poiché

$$nb - na = n(b - a) > 1$$

(cioè i numeri na e nb distano tra loro più di 1) sicuramente tra na e nb ci deve essere (almeno) un numero intero m:

$$na < m < nb \tag{2.26}$$

Ma allora

$$a < \frac{m}{n} < b \tag{2.27}$$

Dunque abbiamo trovato un numero razionale $g = \dfrac{m}{n}$ fra a e b.

Terzo caso. Supponiamo $a < b < 0$. Allora $0 < -b < -a$ e così ci siamo ricondotti al caso precedente. Sappiamo allora che esiste un numero razionale g tale che

$$-b < g < -a$$

Passando agli opposti, abbiamo

$$a < -g < b$$

Anche in questo caso abbiamo trovato un numero razionale (il numero $-g$) che soddisfa la condizione richiesta. Q.E.D.

Ovviamente dal teorema appena dimostrato segue che ogni intervallo (a, b) contiene infiniti punti razionali. Infatti tra a e b ci deve essere almeno un punto razionale q_1; tra a e r_1 un secondo r_2 e così via.

Teorema 2.19 ($\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. Seconda formulazione)**.** *Ogni numero reale è limite di una successione di razionali.*

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia rilettura del teorema precedente. Infatti, sia α un numero reale qualsiasi. Tra $\alpha - 1$ e α c'è almeno un razionale, diciamo x_1. Tra $\alpha - \dfrac{1}{2}$ e α c'è almeno un razionale, diciamo x_2. In generale, per ogni naturale n, tra $\alpha - \dfrac{1}{n}$ e α c'è un razionale x_n. Poiché $|\alpha - x_n| < \dfrac{1}{n}$, la successione x_n tende converge ad α. (La dimostrazione che abbiamo dato è

[11]Infatti, si dimostra che *l'unione di due insiemi numerabili è numerabile.* Dunque, se, per assurdo, l'insieme degli irrazionali fosse numerabile, anche $\mathbb{R}$ (che è l'unione dei razionali e degli irrazionali) sarebbe numerabile, il che non è vero. Dunque, si conclude che l'insieme degli irrazinali è non-numerabile.

puramente esistenziale, cioè non abbiamo dato una definizione costruttiva della successione x_n).
Q.E.D.

Un'altra dimostrazione, più diretta, del fatto che ogni numero reale α sia limite di una successione di razionali si ottiene pensando alla rappresentazione di α come allineamento decimale proprio:

$$\alpha = a_0,\, a_1 a_2 a_3 .... \tag{2.28}$$

Allora è evidente che la successione di numeri razionali (più precisamente, decimali)

$$y_0 = a_0.\;\; y_1 = a_0.\, a_1,\;\; y_2 = a_0.\, a_1 a_2,\;\; ......y_k = a_0.\, a_1 a_2 a_{.} .. a_k, ...$$

tende a α, perché la distanza tra α e y_k è maggiorata da 10^{-k}:

$$|\alpha - y_k| \leq \frac{1}{10^k}$$

(e quindi tende a zero quando $k \to +\infty$).

Ad esempio, consideriamo $\alpha = \sqrt{2} = 1.41421.....$ Allora

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.4, \quad x_3 = 1.414, \quad x_4 = 1.4142, ...$$

è una successione di numeri razionali che converge a $\sqrt{2}$. Si tratta in particolare di numeri decimali, cioè di numeri razionali del tipo $\frac{m}{10^k}$. Dunque *anche l'insieme dei numeri decimali è denso in* $\mathbb{R}$. In altri termini, un qualunque numero reale si può approssimare con precisione arbitraria con numeri decimali.

3 Serie numeriche, o somme infinite.

3.1 Significato di una somma infinita

Cerchiamo di dare un significato a una "somma di infiniti numeri,"come ad esempio:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \tag{3.1}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{3.2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \tag{3.3}$$

Per dare significato a una *somma infinita*, detta anche *serie* (numerica), del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \tag{3.4}$$

procediamo come segue. Consideriamo la successione delle *somme parziali* S_n, dove, per ogni n in $\mathtt{N}$,

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

Se la successione S_n converge a un numero (finito) S, si dice che S è la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e si scrive

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Se invece la successione S_n delle somme parziali diverge a $+\infty$ (o a $-\infty$) si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$ (o a $-\infty$). Se infine la successione delle somme parziali S_n non converge e non diverge, non daremo alcun significato all'espressione 3.4.

Esempio 1. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \cdots \tag{3.5}$$

La successione S_n delle somme parziali è data da

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Poiché

$$\lim S_n = 1$$

la serie 3.5 è convergente e ha per somma 1:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Esempio 2. Si consideri la somma infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \ldots \tag{3.6}$$

in cui ogni termine $\frac{1}{n}$ è ripetuto n volte. Poiché la somma di n addendi uguali a $\frac{1}{n}$ è uguale a 1, le somme parziali S_m diventano arbitrariamente grandi, pur di prendere m sufficientemente grande. Ne segue che la somma infinita 3.6 diverge a $+\infty$. Si noti che il termine generale della serie 3.6 è infinitesimo (cioè tende a zero). Quindi questo esempio mostra che *una serie numerica può divergere a $+\infty$ anche nel caso in cui il suo termine generale a_n sia infinitesimo.* Detto altrimenti, il fatto che il termine generale di una serie sia infinitesimo, non è sufficiente a garantire la convergenza della serie.

In modo analogo si dimostra che la serie armonica

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots \tag{3.7}$$

diverge a $+\infty$.

Teorema 3.1. *Se una serie numerica* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge, allora* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = L$. Questo significa che $\lim_{k\to+\infty} S_k = L$, dove S_k è la somma parziale $S_k = a_1 + \ldots + a_k$. Ora si noti che $a_n = S_n - S_{n-1}$. Quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = L - L = 0$$

□

Si noti che l'esempio della serie armonica 3.7 mostra che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \qquad \textit{non} \text{ implica che la serie } \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \text{sia convergente.} \tag{3.8}$$

3.2 La serie geometrica

Una serie geometrica è una somma infinita del tipo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n + ... \tag{3.9}$$

Il calcolo di una serie geometrica si trova (in forma diversa da quella attuale) nel lavoro di Archimede *Sulla Quadratura della parabola.*

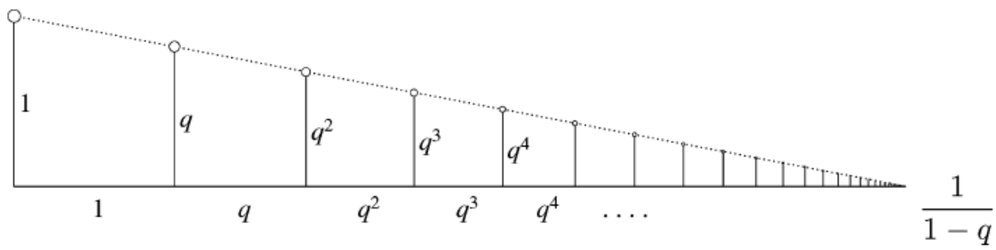

Figure 1: Serie geometrica: interpretazione geometrica. **Esercizio.** Dimostrare, con un'argomentazione geometrica, che la lunghezza della base del triangolo grande è $\frac{1}{1-q}$.

Teorema 3.2 (Carattere della serie geometrica)**.** *La serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n + ... \tag{3.10}$$

si comporta nel modo seguente:

1. *Se* $|q| < 1$*, converge a* $\frac{1}{1-q}$.
2. *Se* $q \geq 1$*, diverge a* $+\infty$.
3. *Se* $q \leq -1$*, è indeterminata.*

Dimostrazione. La somma parziale S_n è data da:

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1. Se $|q| < 1$, la successione q^n tende a zero. Quindi
$$\lim S_n = \lim \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$
2. Se $q \geq 1$, è ovvio che la successione S_n tende a $+\infty$.
3. Se $q \leq -1$, il termine q^{n+1} tende a $+\infty$ in valore assoluto, ma ha alternativamente segno positivo e negativo. Quindi la successione S_n non ha limite (oscilla). Q.E.D.

Esempio 1. La serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$ converge, e si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \qquad \text{se } |q| < 1 \tag{3.11}$$

Per interpretare geometricamente il risultato, si divida l'intervallo $[0,2]$ (la cui lunghezza è 2) nei due intervalli $[0,1]$ e $[1,2]$; si divida ancora l'intervallo di destra $[1,2]$ in due parti uguali, e così di seguito. La lunghezza dell'intervallo $[0,2]$ si può allora scrivere come somma infinita:

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...$$

Esempio 2. Achille e la tartaruga. Paradosso del filosofo greco Zenone (V secolo a.C.).

Achille insegue la tartaruga, che inizialmente ha un vantaggio di un metro. La velocità di Achille è di 10 metri al secondo; quella della tartaruga di 1 metro al secondo. Dopo un decimo di secondo, Achille raggiunge la posizione iniziale della tartaruga, ma non raggiunge la tartaruga, che nel frattempo si è spostata in avanti di dieci centimetri. Quando Achille avrà percorso anche questi dieci centimetri, non avrà comunque raggiunto la tartaruga, che nel frattempo, se pur di poco (un centimetro) si sarà spostata avanti. E così via. La tartaruga sarà sempre, se pur di poco, davanti a Achille. Dunque Achille non la raggiungerà mai.

3.3 Significato di un allineamento decimale. Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Il fatto che i numeri reali si possano approssimare, con precisione arbitraria, mediante numeri razionali (densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$), si vede bene ricorrendo alla scrittura dei numeri reali come allineamenti decimali.

Sappiamo che i numeri reali si rappresentano mediante allineamenti decimali del tipo:

$$a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5....... \tag{3.12}$$

dove a è un intero relativo e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..$ sono cifre comprese tra 0 e 9. Un tale allineamento può essere limitato (cioè con un numero finito di cifre diverse da zero; esempio: $0,5 = 0,5000..$), oppure illimitato (esempio: $0,33333...$, periodo 3; oppure:$\sqrt{2} = 1,4142...$). Gli allineamenti periodici corrispondono ai numeri razionali, quelli non periodici ai numeri irrazionali. Ad esempio: i numeri $0,\overline{3} = 0,333...$ (periodo 3) o $1,52 = 1,5200000....$ (periodo 0) sono razionali, mentre l'allineamento non periodico $\sqrt{2} = 1,4142....$ rappresenta un numero irrazionale.

I numeri razionali la cui rappresentazione decimale è periodica con periodo 0, cioè i numeri del tipo

$$a, \alpha_1\alpha_2..........\alpha_k = \frac{a\alpha_1\alpha_2..........\alpha_k}{10^k} \tag{3.13}$$

si dicono *numeri decimali.* In modo equivalente, i numeri decimali sono i numeri del tipo

$$\frac{m}{10^k}$$

dove m è in $\mathtt{Z}$ e k in $\mathtt{N}$. Ad esempio, $1,7 = \frac{17}{10}$ e $0,43 = \frac{43}{100}$ sono numeri decimali.

Se $a > 0$, il numero reale rappresentato dall'allineamento 3.12 è l'estremo superiore dell'insieme numerico

$$a \qquad a,\alpha_1 \qquad a,\alpha_1\alpha_2 \qquad a,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \qquad \text{eccetera} \tag{3.14}$$

costituito dalle approssimazioni per difetto. (Cosa succede invece se $a < 0$?). Ad esempio, il numero $0,333...$ (periodo 3) è l'estremo superiore dell'insieme numerico

$$0 \qquad 0,3 \qquad 0,33 \qquad 0,333 \qquad \text{eccetera}$$

e $\sqrt{2} = 1,4142....$ è l'estremo superiore dell'insieme numerico

$$1 \qquad 1,4 \qquad 1,41 \qquad 1,414 \qquad \text{eccetera}$$

Ora la 3.14 rappresenta una successione non decrescente (di numeri decimali). Quindi (per il teorema sulla convergenza delle successioni limitate monotòne) l'estremo superiore dell'insieme dei suoi termini coincide con il suo limite. Vediamo allora che l'allineamento decimale (magari infinito)

$$a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5....... \tag{3.15}$$

ha il seguente significato: esso è il limite (per k che tende a $+\infty$) della successione di numeri decimali

$$a \qquad a, \alpha_1 \qquad a, \alpha_1\alpha_2 \qquad ...... \qquad a, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k \qquad ......$$

Ora il significato dell'allineamento decimale finito

$$a, \alpha_1\alpha_2..........\alpha_k \tag{3.16}$$

(con $a > 0$) è ovviamente

$$a, \alpha_1\alpha_2..........\alpha_k = a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + ... + \frac{\alpha_k}{10^k} \tag{3.17}$$

Quindi, in base alla definizione di somma di una serie, un allineamento decimale può essere visto come una somma di infiniti termini:

$$a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5....... = \lim_k \quad a, \alpha_1\alpha_2..........\alpha_k \quad = a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + ... + \frac{\alpha_k}{10^k} + ... \tag{3.18}$$

Riassumendo: abbiamo visto che ogni numero irrazionale può essere approssimato, con una approssimazione piccola quanto si vuole, da numeri razionali. In termini più precisi, *ogni numero irrazionale è limite di una successione di numeri razionali.* Dunque abbiamo dato un'altra dimostrazione del fatto che l'insieme $\mathtt{Q}$ dei razionali è denso nell'insieme $\mathbb{R}$ dei reali:

Teorema 3.3. *L'insieme dei numeri razionali è denso nell'insieme dei numeri reali.*

Le considerazioni svolte sopra mostrano che anche *l'insieme dei numeri decimali è denso nell'insieme dei numeri reali.*

3.4 Numeri razionali e allineamenti decimali periodici

In questa sezione dimostriamo che i numeri razionali sono esattamente i reali che si rappresentano mediante allineamenti periodici (eventualmente con periodo zero):

Teorema 3.4. *Un numero reale è razionale se e solo se è rappresentato da un allineamento decimale periodico.*

A) Cominciamo a dimostrare che *un qualunque allineamento periodico si può sempre scrivere sotto forma di frazione* (e quindi è un numero razionale).

Per convincerci, vediamo un paio di esempi. Sarà chiaro però che il discorso è del tutto generale, vale a dire si applica a qualunque allineamento periodico (anche eventualmente preceduto da un anti-periodo).

Esempio 1 Si consideri il numero periodico $0, \overline{1} = 0, 1111$. Il suo valore è dato dalla somma infinita:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... + \frac{1}{10^n} + ...$$

Raccogliendo il fattore $\dfrac{1}{10}$ e ricordando la somma di una serie geometrica, si ottiene:

$$\frac{1}{10}(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ...) = \frac{1}{10}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

Esempio 2 Se il periodo è costituito da più di una cifra, si procede in modo del tutto analogo. Ad esempio, si consideri il numero periodico $1,\overline{34} = 1,3434...$ Il suo valore è dato da:

$$\begin{aligned}
& 1+\frac{34}{100}+\frac{34}{100^2}+\frac{34}{100^3}+\ldots\ldots \\
= \;& 1+\frac{34}{100}(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots.) \\
= \;& 1+\frac{34}{100}\,\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=1+\frac{34}{99}=\frac{133}{99}
\end{aligned}$$

B) Dimostriamo ora che *ogni numero razionale è periodico* (eventualmente con periodo zero).

Sia $\frac{p}{q}$ un numero razionale. Per trovare l'allineamento decimale che lo rappresenta, si ricorre all'algoritmo di divisione di p per q. A ogni passo di tale algoritmo, si troverà un resto, compreso tra 0 e $q-1$. Se si trova il resto 0, il procedimento finisce (Il numero è decimale). Altrimenti il procedimento va avanti all'infinito, e ogni volta si trova un resto compreso tra 1 e $q-1$. Ma allora, dopo al più dopo q passi, un certo resto r si presenterà per la seconda volta. Da quel punto in poi, tutti i resti seguenti si ripeteranno nello stesso ordine in cui si sono succeduti dopo la prima comparsa del resto r. Questo dimostra che l'espressione decimale del numero razionale $\frac{p}{q}$ è periodica.

3.5 Il numero e di Napier

Teorema 3.5. *In $\mathbb{R}$, la successione*

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{3.19}$$

è convergente, per $n\to+\infty$.

Definizione 3.6. *Si pone, per definizione,*

$$e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{3.20}$$

La costante e si chiama costante di Napier*, o anche* numero di Eulero.

Le prime cifre decimali di e sono: $e = 2.718281...$

Dimostrazione. Per dimostrare che la successione (3.19) in $\mathbb{R}$ è convergente, dimostriamo che è *crescente* e *superiormente limitata.*

1. *La successione (3.19) è crescente.*

   Per la formula della potenza n-esima del binomio,

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\
&= 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

   A parte i primi due addendi (che sono uguali a 1), i termini dello sviluppo (3.21) di u_n si scrivono

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \tag{3.22}$$

dove $k = 2, ..., n$. Da questa espressione, si deduce che si ha $u_n < u_{n+1}$. Infatti, nello sviluppo di $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}$ compariranno $n+2$ termini: a parte i primi due uguali a 1 (ottenuti per $k = 0, 1$), ci saranno gli $n-1$ termini che si ottengono da (3.22) sostituendo $n+1$ al posto di n (con $k = 2, ..., n$), e infine il termine $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$. Ora, per ogni fissato $k = 2, ..., n$, ciascuno dei fattori

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right), \cdots, \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \tag{3.23}$$

che figurano in (3.22) aumenta quando al posto di n si sostituisce $n+1$:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \quad \left(1 - \frac{2}{n}\right) < \left(1 - \frac{2}{n+1}\right), \cdots\cdots, \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)$$

Inoltre, nello sviluppo del termine u_{n+1} compare in più alla fine il termine $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$, che è positivo. Dunque $u_n < u_{n+1}$, cioè la successione (u_n) è strettamente crescente.

2. *La successione (3.19) è limitata.*

   Da (3.21), poiché ciascuno dei fattori $\left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right), \cdots, \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$ è minore di 1, si ricava

$$u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \tag{3.24}$$

   A questo punto osserviamo che la serie

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots + \tag{3.25}$$

   è convergente. Infatti, si ha:

$$2! = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 > 2^2, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2^3, \tag{3.26}$$

   e, in generale,

$$n! > 2^{n-1} \tag{3.27}$$

   Dunque la serie numerica (3.24) è minorante della serie

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots \tag{3.28}$$

   che, a parte il primo termine (uguale a 1), è una serie geometrica di ragione $1/2$. Pertanto la serie (3.28) converge e ha per somma

$$1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 3 \tag{3.29}$$

   Concludiamo allora che, per ogni n, si ha $u_n < 3$. Quindi la successione (u_n) è limitata.

Conclusione. Sappiamo che nel campo reale $\mathbb{R}$, ogni successione crescente e limitata è convergente. (Questa è una conseguenza della proprietà di completezza. Anzi, potrebbe essere assunta come un modo per esprimere la completezza di $\mathbb{R}$). Più precisamente, converge all'estremo superiore dell'insieme degli elementi della successione stessa. (Un enunciato simile vale per le successioni decrescenti e limitate). Dal momento che abbiamo dimostrato che la successione (3.19) è crescente e limitata, possiamo allora concludere che questa successione è convergente. Q.E.D.

Osservazione. Dimostreremo più avanti (utilizzando lo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale e^x) che il numero e è proprio la somma della serie (3.25):

$$\begin{aligned} e &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \end{aligned} \tag{3.30}$$

4 L'insieme $\mathbb{N}$. Il principio di induzione

Mettiamo in luce, in modo informale, alcune importanti proprietà dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Pensiamo $\mathbb{N}$ come il sottoinsieme dei numeri reali costituito dai numeri *interi maggiori o uguali a* 0:

$$\mathbb{N}: \qquad 0, 1, 2, 3, ..., \tag{4.1}$$

4.1 $\mathbb{N}$ è bene-ordinato

L'insieme $\mathbb{N}$, per quanto riguarda l'ordine, ha queste proprietà:

1. *$\mathbb{N}$ è un insieme* totalmente ordinato[12]*:*

$$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots\cdots < n < n+1 < \cdots \tag{4.2}$$

2. *(Proprietà del minimo.) Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha un elemento minimo.*

Ovviamente, la seconda condizione significa: se $S \subset \mathbb{N}$ è un qualunque sottoinsieme non vuoto, allora

$$(\exists n_0 \in S)\ (\forall n \in S) \qquad n_0 \leq n \tag{4.3}$$

Un insieme totalmente ordinato per il quale valga la proprietà del minimo si dice un insieme *bene-ordinato.* Dunque, $\mathbb{N}$ è bene-ordinato. $\mathbb{N}$ stesso ha un minimo, il numero 0. E per ogni numero naturale n, l'insieme dei numeri naturali maggiori di n ha un minimo, che è precisamente $n+1$, il *successivo* di n.

4.2 Principio d'induzione

In un approccio assiomatico (Peano, 1898), il principio di induzione è presentato come uno degli assiomi che definiscono l'insieme $\mathbb{N}$. Può essere interessante notare, però, che questo principio si può dimostrare se si assume che $\mathbb{N}$ sia un insieme bene-ordinato. Ecco l'enunciato.

PRINCIPIO D'INDUZIONE *Sia S un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ avente le seguenti proprietà:*

(α) $0 \in S$

(β) $(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad [n \in S \implies (n+1) \in S]$

Allora $S = \mathbb{N}$.

Esercizio Dimostrare che la proprietà che $\mathbb{N}$ sia un insieme bene-ordinato implica il principio d'induzione.

Soluzione Chiamiamo $P' = \mathbb{N} \setminus P$ il complemento di P rispetto a $\mathbb{N}$ (cioè, P' è l'insieme dei numeri naturali che non appartengono a P). Per dimostrare la tesi $P = \mathbb{N}$, dobbiamo allora dimostrare che $P' = \emptyset$ (l'insieme vuoto). Supponiamo che P' non sia vuoto. Allora, per la proprietà del minimo, esiste $n_0 \in P'$ che è il minimo di P'. Poiché n_0 appartiene a P', non può essere $n_0 = 0$ ($0 \notin P'$, in quanto $0 \in P$, per l'ipotesi (α)). Allora $m_0 > 0$ e quindi anche $m_0 = n_0 - 1$ è un numero naturale. Questo numero naturale $m_0 = n_0 - 1$ appartiene a P (non può appartenere a P', perché $m_0 = n_0 - 1 < n_0 = \min P'$). Quindi, per la proprietà (β), anche $n_0 = m_0 + 1$ appartiene a P. Siamo arrivati a un assurdo: $n_0 \in P'$ (cioè, $n_0 \notin P$) e $n_0 \notin P$.

[12] Un insieme ordinato X si dice *totalmente ordinato* se due elementi qualunque $x, y \in X$ sono sempre confrontabili tra loro. Questo ovviamente accade nell'insieme ordinato $\mathbb{N}$.

4.3 Dimostrazioni per induzione

Il principio di induzione 4.2 è la base teorica del metodo di dimostrazione per induzione. (Non si confonda il metodo di dimostrazione per induzione con il 'metodo induttivo' nelle scienze fisiche o naturali. Si tratta di cose del tutto diverse.)

Teorema 4.1 (Dimostrazione per induzione)**.** *Sia P_n una proposizione in cui figura come parametro un intero naturale n. Supponiamo che si verifichino entrambi i fatti seguenti:*

1. (Base dell'induzione) P_0 *è vera.*

2. (Ipotesi induttiva) *Per qualsiasi n: se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera.*

Allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Chiamiamo S l'insieme dei numeri n per i quali P_n è vera. La condizione *1.* (base dell'induzione) dice che $0 \in S$. La condizione *2.* (ipotesi induttiva) dice:

$$n \in S \implies (n+1) \in S$$

Allora S soddisfa le ipotesi del Principio di induzione 4.2. Pertanto, $S = \mathbb{N}$.

Osservazione. Sono ovvie le modifiche da apportare quando si vuole dimostrare che P_n sia vera per tutti gli $n \geq n_0$: come base dell'induzione, deve essere vera P_{n_0}, e deve valere (come ipotesi induttiva): Per ogni $n \geq n_{n_0}$, se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera.

Esempio. Vogliamo dimostrare che la proposizione:

$$\boxed{P_n : \qquad 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

è vera per ogni intero $n \geq 1$. P_n è una proposizione in cui interviene come parametro un numero naturale $n \geq 1$. Per dimostrare con il metodo di induzione che P_n è vera per ogni n, si devono effettuare i seguenti passi.

Passo 1. Si deve controllare che P_1 (cioè, la proposizione che si ottiene quando $n = 1$) sia vera. Ora, per $n = 1$, il primo membro è 1, e il secondo membro è $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$. Quindi P_1 è vera.

Passo 2. Si deve dimostrare che: $P_n \implies P_{n+1}$. Vale a dire: supponiamo che sia vera:

$$P_n : \qquad 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4.4}$$

Passiamo alla somma di $n+1$ addendi. Tenendo di conto di (4.4), abbiamo:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n+(n+1) &= (1+2+3+\cdots+n)+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Ora,

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{4.5}$$

è esattamente P_{n+1}. Quindi abbiamo dimostrato che $P_n \implies P_{n+1}$.

Riassumendo, abbiamo dimostrato anzitutto che P_1 è vera; e, inoltre, abbiamo dimostrato che se è vera P_n, è vera anche P_{n+1}. Pertanto, P_n è vera per ogni $n \geq 1$.

5 Esercizi

5.1 Esercizi sui numeri reali

Esercizio 5.1 (Un numero moltiplicato per zero dà zero)**.** *Dimostrare che* $a \cdot 0 = 0$*, per ogni* a *in* $\mathbb{R}$.

R

Esercizio 5.2. *Dimostrare che, per ogni* $a \in \mathbb{R}$*, l'opposto dell'opposto di* a *è* a*:*

$$-(-a) = a$$

R

Esercizio 5.3 ("Più per meno fa meno")**.** *Dimostrare che* $a(-b) = -(ab)$.

R

Esercizio 5.4 ("Meno per meno fa più ")**.** *Dimostrare che* $(-a)(-b) = ab$.

R

Esercizio 5.5 (Legge di annullamento del prodotto)**.** *Dimostrare: Se* $ab = 0$*, allora o* $a = 0$ *oppure* $b = 0$.

R

Esercizio 5.6. *Se* $a \leq b$ *e* $c < 0$*, si ha* $ac \geq bc$.

R

Esercizio 5.7 (I quadrati dei numeri reali sono maggiori o uguali a zero)**.** *Per ogni* $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geq 0$. *(L'uguaglianza vale solo se* $a = 0$*).*

R

Esercizio 5.8. *Si dimostri che* $\log_{10} 2$ *è irrazionale.*

R

Esercizio 5.9. *Dimostrare che, per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *che non sia un quadrato perfetto,* $\sqrt{n}$ *non è razionale.*

R

Esercizio 5.10. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *le seguenti disequazioni (cercando anche un'interpretazione geometrica):*

(a) $|x - 1| < 2|x|$

(b) $|x^2 - 3x + 2| < x + 1$

(c) $x + 1 > \sqrt{x^2 - x}$

R

Esercizio 5.11. *Trovare l'estremo inferiore e l'estremo superiore (eventualmente,* $-\infty$ *e* $+\infty$*) dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$*, specificando se l'estremo superiore è un minimo e l'estremo superiore è un massimo.*

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$
2. $\left\{\dfrac{1}{n},\ n \text{ intero positivo}\right\}$

3. $(0,1) \cup (2,5)$

4. $\left\{ y \in \mathbb{R} |\ \exists t \in (2, +\infty)\ \ y = \dfrac{t+1}{t-2} \right\}$

5. $\left\{ \sin\left(n \dfrac{\pi}{12}\right),\, n \in \mathbb{N} \right\}$

R

Esercizio 5.12 (Distanza di un punto da un insieme)**.** *Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Per ogni punto $x \in \mathbb{R}$ si definisce la* distanza $d(x,E)$ di x da E *nel modo seguente:*

$$d(x,E) = \inf\{d(x,y),\ y \in E\} \tag{5.1}$$

dove $d(x,y) = |x-y|$ è l'ordinaria distanza tra due punti $x, y \in \mathbb{R}$.

1. *Posto $E = (0,2)$, trovare $d(x,E)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$.*

2. *Sia x in $\mathbb{R}$. Trovare la distanza $d(x,\mathbb{Q})$ di x dall'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.*

R

Esercizio 5.13. *Dimostrare le seguenti disuguaglianze.*

1. *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,*
$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$
e vale l'uguaglianza solo se $a = b$.

2. *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, per ogni $\varepsilon > 0$,*
$$2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{y^2}{\varepsilon}$$

R

Esercizio 5.14. *Denotiamo con A l'area di un rettangolo e con P il suo perimetro. Dimostrare la* disuguaglianza isoperimetrica
$$16A \leq P^2$$
L'uguaglianza vale solo per il quadrato.

R

Esercizio 5.15. *Dimostrare che, in un campo ordinato $\mathbb{K}$, le due seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *(Proprietà di separazione) Siano Ae B due sottoinsiemi non vuoti di K che soddisfino la condizione*
$$\forall a \in A,\ \forall b \in B \qquad a \leq b$$
Allora esiste almeno un elemento λ in K per il quale si ha
$$\forall a \in A,\ \forall b \in B \qquad a \leq \lambda \leq b$$

2. *(Proprietà di esistenza del* sup*) Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{K}$ non vuoto e superiormente limitato. Allora E ha una minima limitazione superiore.*

Di conseguenza, una qualunque di esse può essere utilizzata come assioma per garantire la completezza di $\mathbb{K}$.

R

Esercizio 5.16.* *In un campo ordinato $\mathbb{K}$, le due seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *(Proprietà di esistenza del* sup*) Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{K}$ non vuoto e superiormente limitato. Allora E ha una minima limitazione superiore.*

2. *(Convergenza delle successioni monotòne limitate) In $\mathbb{K}$, ogni successione monotòna limitata ha un limite.*

Di conseguenza, una qualunque di esse può essere utilizzata come assioma per garantire la completezza di $\mathbb{K}$.

R

Esercizio 5.17. *Si dice che una funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, definita su un insieme $D \subset \mathbb{R}$, è* limitata superiormente *quando la sua immagine*

$$\text{Im } f = f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D \ \ f(x) = y\}$$

*è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente. Per definizione, l'*estremo superiore *di f (sul suo dominio D) è*

$$\sup_D f = \sup \text{Im } f$$

Se non c'è ambiguità sul fatto che il dominio di f sia D, al posto di $\sup_D f$ si può scrivere semplicemente $\sup f$.

Se $\sup(f) = +\infty$*, si dice che f è* illimitata superiormente.

Siano $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ e $D \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ due funzioni con lo stesso dominio D.

a) Dimostrare che si ha sempre

$$\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g)$$

Dare un esempio in cui valga il minore in senso stretto.

b) Supponiamo che $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$ e $D \xrightarrow{g} \mathbb{R}_{>0}$. Dimostrare che vale sempre

$$\sup(f \cdot g) \leq \sup(f) \cdot \sup(g)$$

Dare un esempio in cui valga il minore in senso stretto.

R

Esercizio 5.18 (Binomio di Newton)**.** *Se a, b sono numeri reali e n è un intero ≥ 0, allora:*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{5.2}$$

R

Esercizio 5.19 (Disuguaglianza triangolare)**.** *Dimostrare che, per ogni x, y in $\mathbb{R}$, il valore assoluto della somma è minore o uguale della somma dei valori assoluti:*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{5.3}$$

Dedurne la disuguaglianza triangolare*: per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$,*

$$\mathtt{d}(x, y) \leq \mathtt{d}(x, z) + \mathtt{d}(z, y) \tag{5.4}$$

dove $\mathtt{d}(u, v) = |u - v|$, è la distanza *tra i numeri reali u e v.*

R

Esercizio 5.20.* *Dimostrare che l'insieme dei numeri irrazionali è denso in $\mathbb{R}$.*

R

Esercizio 5.21. * *Se h è un numero positivo e n è un intero positivo, allora*

$$(1+h)^n > 1+nh \tag{5.5}$$

R

Esercizio 5.22. * *Dimostrare che lo sviluppo decimale del numero razionale rappresentato dalla frazione p/q (ridotta ai minimi termini) ha un numero finito di cifre non nulle (ossia, è periodico di periodo 0) se e solo il denominatore q si scrive come prodotto $q = 2^h 5^k$, h, k interi non negativi. (Ad esempio: $3/(2^2 \times 5^3)$, $7/2^4$, $13/5^4$ si scrivono come allineamenti decimali finiti; $29/(5 \times 11)$ no).*

R

5.1.1 Risposte e suggerimenti

5.1 $a \cdot 0 = a(0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Di qui, sommando a sinistra e a destra l'opposto di $a \cdot 0$, segue $a \cdot 0 = 0$.

5.2 L'uguaglianza $a + (-a) = 0$ dice che $-a$ è l'opposto di a, ma anche che a è l'opposto di $-a$, ossia $a = -(-a)$.

5.3 $ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$. Dunque, per definizione di opposto, $a(-b) = -(ab)$.

5.4 Da 5.3 sappiamo già che $(-a)(c) = -(ac)$. Poniamo $c = -b$. Si ha allora:

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-ab) = ab$$

5.5 Supponiamo $0 = ab$ e $a \neq 0$. Allora a è invertibile. Moltiplicando per a^{-1}, abbiamo: $0 = a^{-1}0 = a^{-1}ab = 1 \cdot b = b$.

5.6 Poiché $-c > 0$, per uno degli assiomi dell'ordine segue $a(-c) \leq b(-c)$, ossia $-ac \leq -bc$. Sommando $ac + bc$ a entrambi i membri, si ha la tesi $ac \geq bc$.

5.7 Se $a > 0$, allora, moltiplicando ambo imembri per a, si ha $a^2 > 0$; se invece $a < 0$, moltiplicando a sinistra e a destra per $-a$ (che è positivo), si ottiene $a(-a) < 0$, ossia $-a^2 < 0$, e quindi ancora $a^2 > 0$.

5.8 Supponiamo, per assurdo, che $\log_{10} 2$ sia razionale: $\log_{10} 2 = \dfrac{p}{q}$. Allora $10^{\frac{p}{q}} = 2$, ossia $10^p = 2^q$. Ma quest'ultima uguaglianza è assurda. Infatti, nella scomposizione in fattori primi del numero a sinisra, compare il fattore 5, mentre nella scomposizione in fattori primi del numero a destra, il fattore 5 non compare. Qui abbiamo implicitamente utilizzato il cosiddetto teorema fondamentale dell'aritmetica, secondo il quale la scrittura di un numero naturale come prodoto di numeri primi è unica (a meno dell'ordine dei fattori).

5.9 Supponiamo, per assurdo, che $\sqrt{n}$ sia razionale: $\sqrt{n} = a/b$, $a, b \in \mathbb{N}$. Elevando a quadrato, si ha

$$b^2 n = a^2$$

Dimostriamo ora che questa uguaglianza è assurda. Poiché n non è un quadrato perfetto, almeno un suo fattore primo p deve figurare, nella fattorizzazione di n, con un esponente dispari, diciamo $2h+1$. Poiché i fattori primi di b^2 hanno tutti esponenti pari (perché b^2 è un quadrato perfetto) il numero primo p compare in b^2 con un esponente pari, diciamo $2k$ (senza escludere che si possa avere $h = 0$). Allora nella fattorizzazione di $b^2 n$ il fattore primo p

compare con l'esponente dispari $2h+1+2h$. Invece, nella fattorizzazione in primi del numero a^2 (a secondo membro) il fattore primo p compare con esponente pari (magari 0). Assurdo.

5.10

(a) $(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$

(b) $(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$

(c) $(-\frac{1}{4},0]\cup[2,+\infty)$

5.11

1. Il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definito da $J=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2<2\}$ è l'intervallo aperto $J=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Quindi: $\inf J=-\sqrt{2}$, $\sup J=\sqrt{2}$. ($\inf J$ non è il minimo di J, e $\sup J$ non è il massimo di J.)

2. $\inf\left\{\frac{1}{n},\ n \text{ intero positivo}\right\}=0$ (Non è il minimo).

   $\sup\left\{\frac{1}{n},\ n \text{ intero positivo}\right\}=1$ (Massimo).

3. $(0,1)\cup(2,5)$. L'estremo inferiore è 0; l'estremo superiore è 5.

4. $\{y\in\mathbb{R}|y=\frac{t+1}{t-2},\ t\in(2,+\infty)\}$ L'estremo inferiore è 1; l'estremo superiore è $+\infty$.

5. $\left\{\sin\left(n\frac{\pi}{12}\right),\ n\in\mathbb{N}\right\}$. L'estremo inferiore è -1; l'estremo superiore è 1.

5.12 1) La distanza di $x\in\mathbb{R}$ da $E=(0,2)$ è data da:

$$d(x,E)=\begin{cases} x-2 & \text{se } x>2\\ 0 & \text{se } 0\le x\le 2\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$$

2) Per ogni x in $\mathbb{R}$ si ha $d(x,\mathbb{Q})=0$. Infatti, poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, per ogni $\varepsilon>0$ esiste un numero razionale r tale che $d(x,r)<\varepsilon$.

5.13

1. Segue subito dall'ovvia disuguaglianza $(a-b)^2\ge 0$, nella quale il segno uguale vale solo se $a=b$.

2. Segue dalla precedente disuguaglianza, ponendo $a=\sqrt{\varepsilon}|x|$, $b=\frac{|y|}{\sqrt{\varepsilon}}$.

5.14

Chiamiamo x,y i lati del rettangolo; dunque $P=2(x+y)$ e $A=xy$. La disuguaglianza $16A\le P^2$ equivale allora a $16ab\le 4(a+b)^2$, a sua volta equivalente a $(a-b)^2\ge 0$. Quest'ultima disuguaglianza è ovvia. Il segno uguale vale se, e solo se, $a=b$.

5.15

1) implica 2).

Sia E un sottoinsieme di K non vuoto e superiormente limitato. Chiamiamo B l'insieme di tutte le limitazioni superiori di E. Per la prorietà di separazione, esiste un numero λ che soddisfa le due disuguaglianze

$$\forall x\in E\ \forall y\in B \qquad x\le\lambda\le y \tag{5.6}$$

La prima disuguaglianza

$$\forall x \in E \qquad x \leq \lambda \tag{5.7}$$

dice che λ è una limitazione superiore di E. La seconda disuguaglianza

$$\forall y \in B \qquad \lambda \leq y \tag{5.8}$$

esprime il fatto che λ è la minima limitazione superiore di E.

2) implica 1). Siano $A, B \subset K$ tali che $a \leq b$, per ogni $a \in A$, $b \in B$. Dalla proprietà di esistenza dell'estremo superiore, segue che esistono $\sup A$ e $\inf B$. Poiché ogni b in B è maggiorante di A, si ha $\sup A \leq b$, per ogni $b \in B$. Pertanto, si ha

$$a \leq \sup A \leq \inf B \leq b$$

Dunque esistono senz'altro numeri λ (tutti quelli dell'intervallo $[\sup A, \inf B]$, che può eventualmente ridursi a un unico punto) che sono compresi tra A e B.

5.16

1) implica 2). Questa implicazione è già stata dimostrata (Teorema 2.13).

2) implica 1). Sia $S \subset \mathbb{K}$ un sottoinsieme (non vuoto) superiormente limitato. Dobbiamo dimostrare che dalla convergenza delle successioni monotòne limitate segue che S ha una *minima* limitazione superiore. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo b_n come la più piccola limitazione superiore razionale di S con denominatore 2^n. Ovviamente, per ogni $x \in S$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$x \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \tag{5.9}$$

Dunque b_n è una successione limitata decrescente, che (per la nostra ipotesi) deve avere un limite L. Dimostriamo ora che L è la minima limitazione superiore di S (cioè il sup di S).

(a) Per ogni $x \in S$ e per ogni n, si ha $x \leq b_n$ (per le disuguaglianze (5.9)). Ne segue che $x \leq \lim\limits_n b_n = L$, e quindi L è una limitazione superiore di S.

(b) Inoltre, L è la minima limitazione superiore di S. Infatti, supponiamo che L' sia una limitazione superiore di S e che si abbia $L' < L$. Prendiamo n sufficientemente grande, in modo che si abbia $1/2^n < L - L'$. Allora, poiché L e L' distano tra loro più di $1/2^n$, tra L' e L ci deve essere almeno un multiplo intero di $1/2^n$, cioè un numero razionale del tipo $m/2^n$. Dunque, si avrà

$$L' < \frac{m}{2^n} < L \leq b_n$$

Siamo arrivati a un assurdo: infatti, queste disuguaglianze dicono che b_n non è il minimo numero razionale con denominatore 2^n che è una limitazione superiore di S. Infatti, $\dfrac{m}{2^n}$ – che è minore di b_n – è una limitazione superiore di S (essendo maggiore della limitazione superiore L'.

5.17 Poiché, per ogni x in D, $f(x) \leq \sup f$ e $g(x) \leq \sup g$, si ha $f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g$. Dunque, $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$.

5.18 (Cenni). Lo sviluppo di

$$(a+b)^n = (a+b)\cdots(a+b) \qquad\qquad (n \text{ fattori})$$

sarà costituito da una somma di termini del tipo $a^{n-k}b^k$, con $k = 0, ..., n$. Per ogni fissato k, i termini del tipo $a^{n-k}b^k$ saranno tanti, quanti i modi di scegliere esattamente k volte il termine b (e esattamente $n-k$ volte il termine a) negli n fattori $(a+b)$, cioè tanti quanti i k-sottoinsiemi di un insieme con n elementi. Il numero di tali sottoinsiemi è, per definizione, $\dbinom{n}{k}$. Di qui la tesi. (Si osservi che nella dimostrazione della formula del binomio di Newton si utilizzano le proprietà associativa, commutativa e la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto; non si usano né la proprietà di completezza, né l'ordinamento dei numeri reali. Quindi la formula vale anche nei razionali, o nei complessi).

5.19 Dalle ovvie disuguaglianze $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$ segue

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| \tag{5.10}$$

Di qui segue

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{5.11}$$

Da $|x + y| \leq |x| + |y|$ segue poi:

$$\mathtt{d}(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = \mathtt{d}(x, z) + \mathtt{d}(z, y) \tag{5.12}$$

5.20 Siano a, b due numeri reali, $a < b$. Poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, esiste un numero razionale s per il quale $a - \sqrt{2} < s < b - \sqrt{2}$, ossia

$$a < s + \sqrt{2} < b \tag{5.13}$$

Ora $t = s + \sqrt{2}$ è irrazionale, perché se t fosse razionale, anche $\sqrt{2} = t - s$ sarebbe razionale (la differenza di due numeri razioali è razionale), il che sappiamo non essere vero. Dunque l'insieme degli irrazionali è denso in $\mathbb{R}$.

5.21 La disuguaglianza

$$(1 + h)^n > 1 + nh \tag{5.14}$$

segue immediatamente dallo sviluppo del binomio:

$$(1 + h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2}{3!}h^3 + \cdots + h^n \tag{5.15}$$

tenendo conto del fatto che tutti gli addendi a secondo membro sono positivi. Sempre dallo sviluppo (5.15) possiamo dedurre altre disuguaglianze più forti, come:

$$(1 + h)^n > 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \tag{5.16}$$

5.22 Per evitare un formalismo troppo pedante, diamo l'idea della dimostrazione ragionando su degli esempi. Lasciamo al lettore (che lo desideri) il compito di riscrivere la dimostrazione in modo più formale.

(a) Se il numero razionale α ha, per esempio, uno sviluppo finito del tipo

$$\alpha = a_0, a_1a_2....a_h$$

allora

$$\alpha = a_0, a_1a_2....a_h = \frac{a_0a_1a_2....a_h}{10^h} = \frac{a_0a_1a_2....a_h}{2^h5^h}$$

È allora ovvio che la frazione $\frac{a_0a_1a_2....a_h}{2^h5^h}$, una volta ridotta ai minimi termini, non potrà avere al denominatore potenze di numeri primi diversi da 2 e da 5.

(b) Supponiamo che il numero razionale α sia rappresentato da una frazione ai minimi termini $\frac{p}{q}$ dove $q = 2^h5^k$. Ad esempio,

$$\alpha = \frac{17}{2^35^2}$$

Per rappresentare α, si può sempre scegliere una frazione (non ridotta ai minimi termini) che abbia al denominatore i fattori primi 2 e 5 con lo stesso esponente. Si ottiene in questo modo un numero decimale:

$$\alpha = \frac{17.5}{2^35^3} = \frac{85}{10^3} = 0,085$$

il cui sviluppo è ovviamente finito.

5.2 Esercizi sui limiti di successioni

Esercizio 5.23. *Una successione in* $\mathbb{R}$ *ha la seguente proprietà:* $a_{n+1} - a_n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Qual è il suo limite per* $n \to +\infty$*?*

R

Esercizio 5.24. *Calcolare:*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} - \sqrt[3]{n} \tag{5.17}$$

R

Esercizio 5.25. *Calcolare:*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \tag{5.18}$$

R

Esercizio 5.26. *Calcolare:*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \tag{5.19}$$

R

Esercizio 5.27. *Calcolare:*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 - 2n^2 + n + 1}{2n^3 + n^2} \tag{5.20}$$

Generalizzare, determinando il limite del rapporto tra due polinomi in n *dello stesso grado:*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_h n^h + a_{h-1} n^{h-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_h n^h + b_{h-1} n^{h-1} + \cdots + b_1 n + b_0} \tag{5.21}$$

$a_h, b_h \neq 0$.

R

Esercizio 5.28. *Calcolare:*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{2n^5 + n + 2} \tag{5.22}$$

Generalizzare, determinando il limite, per $n \to +\infty$, *del rapporto tra due polinomi in* n, *quando il grado* h *del numeratore è minore del grado* k *del denominatore:*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_h n^h + a_{h-1} n^{h-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} \tag{5.23}$$

$a_h, b_k \neq 0$ *e* $h < k$.

R

Esercizio 5.29. *Calcolare:*

$$(a) \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \binom{n}{2} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \binom{n}{3} \tag{5.24}$$

R

Esercizio 5.30. *Calcolare:*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{1 + 2 + 3 + \cdots + n} \tag{5.25}$$

R

Esercizio 5.31. *Dimostrare che:*

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty \qquad \textit{se } a > 1 \tag{5.26}$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} b^n = 0 \qquad \textit{se } 0 < b < 1 \tag{5.27}$$

$\boxed{R}$

Esercizio 5.32. *Dimostrare che, per ogni fissato numero p positivo,*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{p} = 1 \tag{5.28}$$

$\boxed{R}$

Esercizio 5.33. *Dimostrare:*
Se $a > 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty \qquad (a > 1) \tag{5.29}$$

Più in generale: Se $a > 1$, per ogni fissato intero positivo k,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty \qquad (a > 1) \tag{5.30}$$

$\boxed{R}$

Esercizio 5.34. *Dimostrare:*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{(\ln n)^k} = +\infty \tag{5.31}$$

Di conseguenza,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^k}{n} = 0 \tag{5.32}$$

$\boxed{R}$

Esercizio 5.35. *Dimostrare che*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{5.33}$$

$\boxed{R}$

5.2.1 Risposte e suggerimenti

5.23 Si ha $a_n \geq n + a_0$. Quindi $\lim a_n = +\infty$.

5.24 Si tratta di un limite della forma $\infty - \infty$, quindi *a priori non si può dire nulla*. Trasformiamo l'espressione in un prodotto, raccogliendo $\sqrt{n} (= n^{1/2})$:

$$\sqrt{n} - \sqrt[3]{n} = n^{1/2}\left(1 - \frac{1}{n^{1/6}}\right)$$

In questo modo, vediamo che $\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}$ si può scrivere come prodotto di due termini: per $n \to +\infty$, il primo tende a $+\infty$, il secondo a 1. Questa non è più una forma di indeterminazione. Il limite è $+\infty$.

5.25

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Il limite è 0.

5.26

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Il limite è $1/2$.

5.27 Raccogliamo il termine di grado massimo, sia al numeratore, sia al denominatore:

$$\frac{n^3 - 2n^2 + n + 1}{2n^3 + n^2} = \frac{n^3\left(1 - 2/n + 1/n^2 + 1/n^3\right)}{n^3\left(2 + 1/n\right)}$$

Il limite vale $1/2$. Nel caso generale, il limite è a_h/b_h.

5.28 Si raccolgano i termini di grado massimo: n^h al numeratore e n^k al denominatore $h < k$). Il rapporto dei polinomi tende a 0.

5.29 (a) $1/2$. (b) $+\infty$.

5.30 Si ricordi l'uguaglianza: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. (Dimostrarla.) Il limite è 2.

5.31 Se $a > 1$, scriviamo $a = 1 + h$, con $h > 0$. Dalla disuguaglianza

$$a^n = (1+h)^n > 1 + nh \tag{5.34}$$

(che segue subito dallo sviluppo di $(1+h)^n$), si deduce che, poiché $1 + nh$ tende a $+\infty$, anche a^n tende a $+\infty$, per $n \to +\infty$.

Sia ora $0 < b < 1$. Poniamo $a = \dfrac{1}{b}$. Allora $a > 1$, e quindi $a^n = \dfrac{1}{b^n}$ tende a $+\infty$. Ne segue che b^n tende a 0.

5.32 Il caso $p = 1$ è banale. ($\sqrt[n]{1} = 1$ per ogni n, e quindi il limite di $\sqrt[n]{1}$ è 1). Distinguiamo allora due casi: $p > 1$ e $0 < p < 1$. Supponiamo dapprima $p > 1$, e quindi $\sqrt[n]{p} > 1$. (Infatti, da $\sqrt[n]{p} < 1$, moltiplicando membro a membro per n volte, si ricaverebbe $p < 1$.) Poniamo allora $\sqrt[n]{p} = 1 + h_n$, con h_n positivo. Elevando entrambi i membri dell'uguaglianza $\sqrt[n]{p} = 1 + h_n$ alla potenza n-esima, e ricordando che (per ogni $h > 0$) $(1+h)^n > 1 + nh$, si ha:

$$p = (1 + h_n)^n > 1 + nh_n \tag{5.35}$$

Di qui ricaviamo $\dfrac{p-1}{n} > h_n$. Per $n \to +\infty$, $\dfrac{p-1}{n}$ tende a 0, e quindi, da

$$\frac{p-1}{n} > h_n > 0$$

segue che anche h_n tende a 0. Dunque $\sqrt[n]{p} = 1 + h_n$ tende a 1.

Supponiamo ora $0 < p < 1$. Allora $\dfrac{1}{p} > 1$ e quindi, per quanto abbiamo dimostrato sopra, $\sqrt[n]{\dfrac{1}{p}}$ tende a 1:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt[n]{p}} \to 1$$

per $n \to +\infty$. Ma se l'inverso di $\sqrt[n]{p}$ tende a 1, anche $\sqrt[n]{p}$ tende a 1. In definitiva, abbiamo dimostrato che, per ogni p positivo,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = 1 \tag{5.36}$$

5.33 Dimostriamo che, se $a = 1 + h > 1$ $(h > 0)$, la successione a^n/n tende a $+\infty$. Usando la formula del lo sviluppo del binomio, ricaviamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}a^n = \frac{1}{n}(1+h)^n &= \frac{1}{n}\left(1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n\right) && (5.37)\\
&> \frac{1}{n}\left(\frac{n(n-1)}{2}h^2\right) && (5.38)\\
&= \frac{n-1}{2}h^2 && (5.39)
\end{aligned}$$

Per il criterio del confronto, poiché la successione $\dfrac{n-1}{2}h^2$ tende a $+\infty$ (per $n \to +\infty$), anche la successione $\dfrac{1}{n}a^n$ tende a $+\infty$.

Sia ora sempre $a > 1$, e sia k un intero positivo fissato. Allora $b = \sqrt[k]{a} > 1$, e

$$\frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{(\sqrt[k]{a})^n}{n}\right)^k = \left(\frac{b^n}{n}\right)^k$$

Per la prima parte della dimostrazione di sopra, $\dfrac{b^n}{n}$ tende a $+\infty$. Quindi (per k fissato), anche $\dfrac{a^n}{n^k} = \left(\dfrac{b^n}{n}\right)^k$ tende a $+\infty$.

5.34 Poniamo $\ln n = t$. Allora $n = e^t$. Dunque, $\dfrac{n}{(\ln n)^k} = \dfrac{e^t}{t^k}$. Quando $n \to +\infty$, anche $t \to \infty$. Allora, per il limite (5.30),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(\ln n)^k} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^k} + \infty \tag{5.40}$$

5.35 Scriviamo $\sqrt[n]{n}$ come esponenziale:

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\ln\left(n^{1/n}\right)} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$$

Poiché $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ (per il limite (5.31)), si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^0 = 1$$

5.3 Esercizi sul metodo d'induzione

Esercizio 5.36. *Dimostrare che Se $a \neq 1$,*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \tag{5.41}$$

Esercizio 5.37. *Dimostrare che*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{5.42}$$

Esercizio 5.38. *Dimostrare che*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{5.43}$$

Esercizio 5.39. *Dimostrare che*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \tag{5.44}$$

per tutti gli $n \geq 1$.

Esercizio 5.40. *Se la cardinalità di X è n, la cardinalità dell'insieme $\mathcal{P}(X)$ delle parti di X è 2^n.*

Esercizio 5.41. *(*Gioco della torre di Hanoi) Spostare la torre su un altro piolo seguendo queste regole: (a) spostare un disco per volta; (b) non mettere mai un disco più grande su uno più piccolo.

Dimostrare che, detto n il numero di dischi, il minimo numero di mosse per spostare l'intera torre su un altro piolo è $2^n - 1$. (Nel caso $n = 100$, supponendo di fare 1 mossa al secondo, dare una stima del tempo che occorre per spostare la torre.)

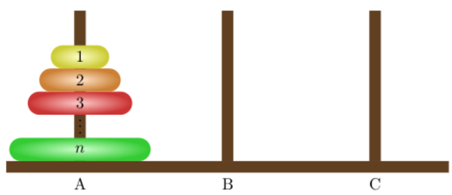

Figure 2: Torre di Hanoi