Segnare le risposte corrette

1. Poniamo: $(0,1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x^7 e^{-\frac{1}{x}}$ per ogni $x \in (0,1)$.

   (a) $\operatorname{Im} f = \big(0, e^{-1}\big]$ ○
   (b) $\operatorname{Im} f = \big[0, e^{-1}\big)$ ○
   (c) $\operatorname{Im} f = \big(0, e^{-1}\big)$ ✓
   (d) $\operatorname{Im} f = \big[0, e^{-1}\big]$ ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

---

2. Il numero complesso $(1 + i\sqrt{3})^6$ è uguale a

   (a) 2^6 ✓
   (b) 2^3 ○
   (c) $i(2^3)$ ○
   (d) $-(2^6)$ ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

---

3. Consideriamo la trasformazione $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$, $F(z) = -iz + 1$. Chiamiamo $\mathcal{S}$ l'insieme dei punti fissi di F: $\quad \mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid F(z) = z\}$

   (a) $\mathcal{S} = \emptyset$ ○
   (b) $\mathcal{S} = \{1 - i\}$ e F è una rotazione. ○ ○
   (c) $\mathcal{S} = \{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\}$ e F è una rotazione. ✓
   (d) $\mathcal{S} = \{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\}$ e F non è una rotazione. ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

---

4. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, poniamo:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} (\alpha + 1)\log(x^2 + 1) & \text{se } x < 0 \\ 2\alpha(e^x - 1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

   (a) f_α è derivabile in $x = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. ○
   (b) Non esiste alcun $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale f_α sia derivabile in $x = 0$. ○
   (c) f_α è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 1$. ○
   (d) f_α è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 0$. ✓
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

$\boxed{\text{ESERCIZI}}$ (TOTALE: 6 PUNTI)

(A) Definiamo $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ponendo: $\boxed{f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}}$

(A).1 f è derivabile in 0? $\boxed{}$ (Motivare la risposta sotto).

(A).2 Calcolare il limite: $L = \lim_{x \to 0} f'(x)$. $\boxed{L = }$

(A).3 Determinare l'immagine Im (f). $\boxed{\text{Im } (f) = }$

(B) Calcolare il limite: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^4} - \cos(x^2)}{\sin(x^4)}}$ *Risposta:* $\boxed{}$

<u>Inserire le risposte finali nelle 4 caselle di sopra.</u> Riportare sinteticamente i calcoli e <u>le motivazioni.</u> (Scrivere qui sotto, sul retro di questo foglio e sul retro del foglio precedente, se necessario). Riferitevi ai quesiti nominandoli: (A).1, (A).2, (A).3, (B).

(A).1 Il rapporto incrementale di f in 0 è $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$. Dalla regola generale sul confronto tra infinitesimi sappiamo che, per $x \to 0$, l'infinitesimo $e^{-\frac{1}{x^2}}$ è di ordine superiore rispetto a x, e quindi possiamo già concludere che la derivata $f'(0)$ esiste e vale 0. Vediamo comunque i dettagli.

Per $x \to 0^+$, $\frac{1}{x} = u \to +\infty$ e quindi la derivata destra è data (per la gerarchia tra infiniti) da

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{u \to +\infty} \frac{u}{e^{u^2}} = 0$$

In modo del tutto analogo, per $x \to 0^-$, $\frac{1}{x} = u \to -\infty$. Pertanto, anche la derivata sinistra esiste ed è nulla:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{u \to -\infty} \frac{u}{e^{u^2}} = 0$$

Concludiamo allora che f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$. (Anziché calcolare entrambe le derivate da destra e da sinistra, avremmo potuto osservare le simmetrie: f è pari, quindi se la derivata destra in 0 è nulla, anche la derivata sinistra in 0 è nulla.)

(A).2 Per ogni $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$. Quindi (come nel precedente esercizio),

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} = 0$$

Si osservi allora che la funzione $f'(x)$ è continua, cioè $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

(A).3 Poiché f è pari, basta studiarla su $(0, +\infty)$. In $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} > 0$, e quindi f è strettamente crescente. Inoltre, per $x \to +\infty$, $f(x) \to 1$ (mantenendosi sempre minore di 1. Inoltre, il minimo assoluto di f è ovviamente $f(0) = 0$. Pertanto, Im $(f) = [0, 1)$.

(B) Con gli sviluppi di Taylor, otteniamo, per $x \to 0$:

$$\frac{e^{x^4} - \cos(x^2)}{\sin(x^4)} = \frac{1 + x^4 + o(x^4) - 1 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{3}{2}x^4 \left(1 + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)}{x^4 \left(1 + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)} \to \frac{3}{2}$$

In alternativa, si può usare l'Hospital. Calcoliamo il rapporto delle derivate, per $x \to 0$:

$$\frac{4x^3 e^{x^4} + 2x \sin(x^2)}{4x^3 \cos(x^4)} \sim \frac{4x^3 e^{x^4} + 2x^3}{4x^3} = e^{x^4} + \frac{1}{2} \to \frac{3}{2}$$

$\boxed{\text{Teoria}}$ (Totale: 4 punti)

Dimostrare il teorema................(Uno dei teoremi della lista pubblicata in rete.)
(Possono essere chiesti anche esempi/controesempi eccetera, relativi a quel teorema.)