Esercitazione per la Seconda Prova

21/12/2022

Indice

1 Questionario

QUESTIONARIO (TOTALE: 6 PUNTI)

Per ogni quesito, c'è una sola risposta corretta.

1. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione integrabile soddisfacente:
$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1.$$
   (a) Se f è continua in $[0,1]$ allora esiste almeno un $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = 1$.
   (b) Esiste sempre almeno un $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = 1$.
   (c) f è non-negativa.
   (d) f è costante e vale 1.
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

2. La funzione $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \sin t\,dt$, $x \in \mathbb{R}$:
   (a) F è monotòna. ○
   (b) F ha un asintoto orizzontale a $+\infty$. ○
   (c) F non ha punti di massimo o minimo locali. ○
   (d) F' è pari. ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

3. L'equazione cartesiana del piano passante per $A = (1, -2, 1)$ e parallelo ai vettori $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ è
   (a) $2x - 3y + z - 9 = 0$. ○
   (b) $2x + 3y + z - 9 = 0$. ○
   (c) $2x - 3y - z - 9 = 0$. ○
   (d) $2x + 3y + z + 9 = 0$. ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

4. Siano $\vec{u}, \vec{v}$ due vettori in $\mathbb{R}^3$ tali che $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 3$. Allora $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ vale
   (a) 1. ○
   (b) 2. ○
   (c) 0 ○
   (d) 3. ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

5. Nel piano $\mathbb{R}^2$, sia C la curva parametrizzata
$$[0, 2\pi] \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2, \quad F(t) = (\ t - \sin(t),\ 1 - \cos(t))$$
   Chiamiamo L la lunghezza di C.
   (a) C non è rettificabile. ○
   (b) $L = 4$ ○
   (c) $L = 8$ ○
   (d) $L = 8\pi$ ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

6. In $\mathbb{R}^3$, siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tre vettori qualunque. Denotiamo con $\times$ il prodotto vettoriale.
   (a) Se ϑ è l'angolo tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, allora $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\vartheta$. ○
   (b) Vale la proprietà associativa: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. ○
   (c) Vale la proprietà commutativa: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ○
   (d) Il prodoto scalare $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ vale 0. ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

2 Esercizi

$\boxed{\text{ESERCIZI}}$ (TOTALE: 6 PUNTI)

ESERCIZIO 1 Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ converge l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a}{e^x}\,dx$

ESERCIZIO 2 Stabilire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$ converge, oppure diverge a $+\infty$.

ESERCIZIO 3 In $\mathbb{R}^3$, sia s la retta di equazioni parametriche

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Scrivere equazioni parametriche per la retta r passante per il punto $P = (1, 0, 0)$, incidente la retta s e ad essa ortogonale.

3 Risposte al Questionario

Risposte al Questionario

1. Risposta giusta: (a).
Per il *Teorema della Media Integrale*, applicato alla funzione continua f su $[a,b] = [0,1]$,

$$\exists c \in [0,1] \qquad f(c) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \times 1 = 1$$

2. Risposta giusta: (b).
Affermare che $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \sin t\,dt$ ha un asintoto orizzontale a $+\infty$ significa che

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2} \sin t\,dt$$

esiste finito, il che a sua volta equivale a dire che l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin t\,dt$$

è convergente. Ricordiamo che se $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ è assolutamente convergente, cioè l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$$

è convergente, allora anche l'integrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ è convergente. (Un enunciato analogo vale per le serie numeriche). Dunque, per dimostrare che $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin t\,dt$ è convergente, basta dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} |\sin t|\,dt$$

è convergente. A questo scopo, si noti che, per tutti i t sufficientemene grandi,

$$e^{-t^2}|\sin t| \leq e^{-t^2} < \frac{1}{t^2}$$

perché $\frac{t^2}{e^{t^2}} < 1$ (dal momento che $\frac{t^2}{e^{t^2}} \to 0$ per $t \to +\infty$). Dunque, per il criterio del confronto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}|\sin t| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} < +\infty$$

3. Risposta giusta: (a).
Sia $ax + by + cz + d = 0$ un'equazione cartesiana del piano cercato. Il vettore di giacitura (a,b,c) del piano cercato deve essere ortogonale sia a $\vec{u}$ sia a $\vec{v}$. Dunque, si deve avere

$$a + b + c = 0 \qquad -a + 2c = 0$$

L'unico piano che soddisfa queste condizioni è il piano della risposta (a). Resta da controllare che il punto $A = (1,-2,1)$ appartenga a tale piano:

$$2 \times 1 - 3 \times (-2) + 1 - 9 = 0$$

4. Risposta giusta: (a).

Con i dati assegnati, dall'identità

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

ricaviamo il prodotto scalare: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2$. Allora

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 1 - 2\times 2 + 4 = 1$$

5. Risposta giusta: (c).

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 2\times 4 = 8$$

Abbiamo usato la formula di bisezione:

$$\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} = \sin\frac{t}{2}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

La risposta "C non è rettificabile " è da scartare, perché le curve di classe C^1 su un intervallo compatto sono rettificabili.

6. Risposta giusta: (d).
Il prodotto vettoriale $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ è ortogonale sia al vettore $\mathbf{a}$ sia al vettore $\mathbf{b}$. Dunque,

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} + (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{b} = 0$$

Il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Ad esempio,

$$-\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\times\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{e}_1\times(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2) = 0$$

4 Risposte agli Esercizi

RISPOSTE AGLI ESERCIZI

ESERCIZIO 1 Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ converge l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a}{e^x}\,dx$

SOLUZIONE Fissiamo un qualunque $a \in \mathbb{R}$. Dico che, per tutti gli x sufficientemente grandi (cioè, in un intorno di $+\infty$), vale la disuguaglianza

$$\frac{x^a}{e^x} < \frac{1}{x^2}$$

Infatti, questa disuguaglianza equivale a

$$\frac{x^{a+2}}{e^x} < 1 \qquad \text{(per } x \text{ sufficientemente grande)}$$

e quest'ultima disuguaglianza è vera, perché, per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a+2}}{e^x} = 0$$

Pertanto, l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a}{e^x}\,dx$ converge per ogni $a \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2 Stabilire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$ converge, oppure diverge a $+\infty$.

SOLUZIONE Usiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!\,3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!\,3^n} \\
&= 3(n+1)\frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} \\
&= 3\frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= 3\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{3}{e} > 1
\end{aligned}$$

Quindi la serie diverge.

ESERCIZIO 3 In $\mathbb{R}^3$, sia s la retta di equazioni parametriche

$$s: \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Scrivere equazioni parametriche per la retta r passante per il punto $P = (1,0,0)$, incidente la retta s e ad essa ortogonale.

SOLUZIONE Una soluzione è la seguente. Chiamiamo $X(t) = (t, 1+t, t)$ un punto qualunque sulla retta s. Consideriamo il vettore

$$\overrightarrow{P\,X(t)} = X(t) - P = (t-1, 1+t, t)$$

dal punto P al generico punto $X(t)$. Cerchiamo il valore di t per il quale il vettore $\overrightarrow{P\,X(t)}$ è ortogonale alla retta s. Siccome un vettore di direzione di s è dato da $\mathbf{u} = (1,1,1)$, la condizione di ortogonalità tra i vettori $\mathbf{u}$ e $\overrightarrow{P\,X(t)}$ è

$$0 = \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{P\,X(t)} = 3t$$

Il punto H sulla retta s corrispondente al valore $t = 0$ è $H = (0, 1, 0)$. Dunque la retta passante per $P = (1, 0, 0)$, incidente e ortogonale alla retta s è

$$r : \begin{cases} x = 1 + u \\ y = -u \\ z = 0 \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R}$$

Un'altra soluzione consiste nel trovare:
(a) il piano $\mathcal{Q}$ per P ortogonale a s:

$$\mathcal{Q} : \qquad x + y + z - 1 = 0$$

(b) l'intersezione del piano $\mathcal{Q}$ con la retta s:

$$H = (0, 1, 0)$$

(c) la retta PH:

$$r : \begin{cases} x = 1 + u \\ y = -u \\ z = 0 \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R}$$