Esercitazione per la Seconda Prova

QUESTIONARIO (TOTALE: 6 PUNTI)

1. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione integrabile soddisfacente:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1.$$

   (a) Se f è continua in $[0,1]$ allora esiste almeno un $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = 1$.
   (b) Esiste sempre almeno un $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = 1$.
   (c) f è non-negativa.
   (d) f è costante e vale 1.
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

2. La funzione $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \sin t\, dt$, $x \in \mathbb{R}$:

   (a) F è monotòna. ○
   (b) F ha un asintoto orizzontale a $+\infty$. ○
   (c) F non ha punti di massimo o minimo locali. ○
   (d) F' è pari. ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

3. L'equazione cartesiana del piano passante per $A = (1, -2, 1)$ e parallelo ai vettori $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ è

   (a) $2x - 3y + z - 9 = 0$. ○
   (b) $2x + 3y + z - 9 = 0$. ○
   (c) $2x - 3y - z - 9 = 0$. ○
   (d) $2x + 3y + z + 9 = 0$. ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

4. Siano $\vec{u}, \vec{v}$ due vettori in $\mathbb{R}^3$ tali che $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 3$. Allora $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ vale

   (a) 1. ○
   (b) 2. ○
   (c) 0 ○
   (d) 3. ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

5. Nel piano $\mathbb{R}^2$, sia C la curva parametrizzata

$$[0, 2\pi] \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2, \quad F(t) = (\ t - \sin(t),\ 1 - \cos(t))$$

   Chiamiamo L la lunghezza di C.

   (a) C non è rettificabile. ○
   (b) $L = 4$ ○
   (c) $L = 8$ ○
   (d) $L = 8\pi$ ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

6. In $\mathbb{R}^3$, siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tre vettori qualunque. Denotiamo con $\times$ il prodotto vettoriale.

   (a) Se ϑ è l'angolo tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, allora $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\, |\mathbf{b}| \cos \vartheta$. ○
   (b) Vale la proprietà associativa: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. ○
   (c) Vale la proprietà commutativa: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ○
   (d) Il prodoto scalare $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ vale 0. ○
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta. ○

$\boxed{\text{Esercizi}}$ (Totale: 6 punti)

Inserire le risposte nelle caselle. *Riportare sinteticamente* **i calcoli e le motivazioni di ogni ogni esercizio** *qui sotto, sul retro di questo foglio e sul retro del foglio precedente, se necessario. (Riferitevi ai quesiti nominandoli: Esercizio 1,2,3).*

Esercizio 1 Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ converge l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a}{e^x}\, dx$

Esercizio 2 Stabilire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! 3^n}{n^n}$ converge, oppure diverge a $+\infty$.

Esercizio 3 In $\mathbb{R}^3$, sia s la retta di equazioni parametriche

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Scrivere equazioni parametriche per la retta r passante per il punto $P_0 = (1, 0, 0)$, incidente la retta s e ad essa ortogonale.

$\boxed{\text{Teoria}}$ (Totale: 6 punti)

1. Enunciare con precisione e dimostrare ....