Esercitazione per la seconda prova

Domande a risposta multipla e esercizi

Soluzioni

12 Gennaio 2021

1 Questionario

Istruzioni In ogni quesito, il numero di affermazioni corrette può variare. Tutte le affermazioni giuste devono essere segnate. A ogni quesito è assegnato 1 punto (se si segnano correttamente *tutte* le affermazioni corrette; altrimenti 0 punti).

[**1**] Sia $\mathcal{P}$ il piano osculatore in $t = 1$ alla curva in $\mathbb{R}^3$

$$C(t) = (t, t^2, t^3), \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Allora:

1. $\mathcal{P}$ ha equazione $3x - 3y + z - 1 = 0$ [Vero]
2. $\mathcal{P}$ ha equazione $x - y + z - 1 = 0$ [Falso]
3. $\mathcal{P}$ è parallelo al vettore $(1, 2, 3)$. [Vero]
4. $\mathcal{P}$ è ortogonale al vettore $(1, 2, 3)$. [Falso]

[**2**] Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ tre versori (cioè, vettori di modulo 1) di $\mathbb{R}^3$.

Supponiamo: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$. Allora:

1. $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ formano lo stesso angolo con $\mathbf{u}$. [Vero]
2. $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. [Falso]
3. La proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ lungo $\mathbf{u}$ è uguale alla proiezione ortogonale di $\mathbf{w}$ lungo $\mathbf{u}$: $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ [Vero]
4. $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ formano lo stesso angolo con $\mathbf{w}$. [Falso]

[**3**]

Definiamo:

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^4}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. G è pari. [FALSO]
2. G è dispari. [VERO]
3. G non è né pari, né dispari. [FALSO]
4. G ha un asintoto orizzontale a $+\infty$. [VERO]

---

[4] Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vettori in $\mathbb{R}^3$.

1. Se $|\mathbf{b}| = 2$, allora $\quad 4\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}\ $ è ortogonale a $\mathbf{b}$. [VERO]
2. $(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. [VERO]
3. $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. [VERO]
4. $|\lambda\mathbf{a}| = \lambda|\mathbf{a}|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. [FALSO]

---

[5] Si consideri l'integrale generalizzato

$$I_a = \int_1^{+\infty} x^a \sin\frac{1}{x}\, dx$$

1. I_a converge per $a > 0$. [FALSO]
2. I_a converge per $a < 0$. [VERO]
3. Quando converge, il valore di I_a è zero. [FALSO]
4. Per $x \to +\infty$, $\quad x^a \sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x^{1-a}}$ [VERO]

---

[6]
Siano r, s rette qualunque nello spazio affine euclideo $\mathbb{R}^3$.

1. Se r, s sono rette con uno stesso vettore di direzione, $r \cap s = \emptyset$. [FALSO]
2. Se r, s sono rette con uno stesso vettore di direzione, allora $r \cap s = \emptyset$, oppure $r = s$. [VERO]
3. Se r, s sono rette e $r \cap s = \emptyset$, allora r e s sono parallele. [FALSO]
4. Se $r \cap s = \emptyset$ e r e s non sono parallele, r e s sono sghembe. [VERO]

[7]

Poniamo $I = \int_{-\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, dx$

1. $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, dx$ [Vero]

2. Con la sostituzione $\cos x = t$, si scrive: $I = -\int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{dt}{t}$ [Vero]

3. $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, dx = \log_e \sqrt{3}$ [Vero]

4. $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, dx = -\log_e \sqrt{3}$ [Falso]

[8] Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' - 2xy = 4x \tag{2}$$

1. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata a (2) è $y = Ce^{-x^2}$. [Falso]

2. La funzione $y = -2$ è una soluzione particolare di (2). [Vero]

3. La soluzione generale di (2) è $y = Ce^{x^2} - 2$ [Vero]

4. Esiste un'unica soluzione di (2) su $\mathbb{R}$ che soddisfa $y'(0) = 0$. [Falso] (*Per tutte le soluzioni vale* $y'(0) = 0$.)

[9] Si consideri la curva $t \to C(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$, di classe C^1.

1. La lunghezza ℓ di C è data da:

$$\ell(C) = \int_0^1 (1 + 4t^2 + 9t^4) \, dt$$

[Falso]

2. Se $f(x, y, z) = x + y + z$, l'integrale curvilineo di f lungo C è dato da:

$$\int_0^1 (t + t^2 + t^3)\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} \, dt$$

[Vero]

3. Se $f(x, y, z) = x + y + z$, l'integrale curvilineo di f lungo C è dato da:

$$\int_0^1 (t + t^2 + t^3)\, dt$$

[Falso]

4. La lunghezza ℓ di C è dato da:

$$\ell(C) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}\, dt$$

[Vero]

---

[10] Nello spazio euclideo orientato $\mathbb{R}^3$, denotiamo con $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ il prodotto vettoriale dei vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ se e solo se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono paralleli. [Vero]
2. Per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, vale: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$. [Vero]
3. Se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, allora $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$. [Vero]
4. Il prodotto vettoriale è commutativo: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. [Falso]

---

2 Esercizi

Istruzioni Scrivere le soluzioni motivando le risposte e riportando i calcoli, in modo conciso.

1. (2 punti)

   (a) Stabilire se esiste finito l'integrale

$$\int_0^1 te^{-\frac{1}{t^2}}\, dt$$

   (b) Stabilire se la funzione

$$G(x) = \int_0^x te^{-\frac{1}{t^2}}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

è pari, dispari, o né pari né dispari.

Soluzione (a) La funzione integranda $te^{-\frac{1}{t^2}}$ non è definita in $t = 0$, ma ha un'estensione continua all'intervallo compatto $[0, 1]$, perché $te^{-\frac{1}{t^2}} \to 0$ per $t \to 0$. Pertanto, l'integrale di Riemann $\int_0^1 te^{-\frac{1}{t^2}}\,dt$ esiste (finito).

(b) G è pari. Infatti, calcoliamo $G(-x) = \int_0^{-x} te^{-\frac{1}{t^2}}\,dt = \int_0^{-x} g(t)\,dt$, dove $g(t) = te^{-\frac{1}{t^2}}$ è una funzione dispari. Con la sostituzione $t = -u$, $dt = -du$ (e la conseguente sostituzione del simbolo $\int_0^{-x}$ con $\int_0^{x}$), otteniamo:

$$G(-x) = \int_0^{-x} g(t)\,dt = \int_0^{x} g(-u)\,(-du) = \int_0^{x} -g(u)\,(-du) = \int_0^{x} g(u)\,du = G(x)$$

In modo del tutto analogo si dimostra:

Se g è dispari, $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ è pari.

Ancora più in generale: *Se g è una funzione dispari (integrabile) su un intervallo centrato nell'origine, ogni antiderivata H di g (cioè, ogni H tale che $H' = g$) è pari.* Infatti (avendo la stessa derivata, uguale a g) H e $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ differiscono per una costante:

$$H(x) = G(x) + c$$

Siccome G e c sono pari, anche la loro somma H lo è.

2. (2 punti) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{-1 + e^{\sqrt{x}}}{(\sin x)^a}\,dx$$

e calcolarlo per $a = 0$.

Soluzione Per $x \to 0$, $\frac{-1+e^{\sqrt{x}}}{(\sin x)^a} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^a} = \frac{1}{x^{a-\frac{1}{2}}}$. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale generalizzato converge per $a - \frac{1}{2} < 1$, cioè per $a < \frac{3}{2}$.

Per $a = 0$, dobbiamo calcolare $\int_0^1 (-1 + e^{\sqrt{x}})\,dx$. Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, si ottiene alla fine:

$$\int_0^1 (-1 + e^{\sqrt{x}})\,dx = \Big[-x + 2e^{\sqrt{x}}(-1 + \sqrt{x})\Big]_0^1 = 1$$

3. (2 punti) Trovare un'equazione cartesiana per il piano $\mathcal{P}$ che passa per il punto $A = (1, 1, 1)$ e include la retta $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Soluzione Troviamo una rappresentazione cartesiana di r come intersezione di due piani. Basta ricavare t, per esempio da $z = 3 + t$, e sostituire in $x = 1 - t$ e $y = 2 + t$. Otteniamo: $x = 1 - z + 3$ e $y = 2 + z - 3$, cioè

$$r : \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Il fascio di piani di sostegno r è

$$\lambda(x+z-4)+\mu(y-z+1)=0$$

Il passaggio per $A=(1,1,1)$ impone $\lambda=1$, $\mu=2$. Si ottiene il piano

$$x+2y-z-2=0$$

4. (2 punti) Poniamo: $F(x)=\int_0^x \frac{\log_e(1+t^2)}{e^{t^2+1}}\,dt$. Motivando le risposte, disegnare un grafico qualitativo di F che mostri : (i) simmetrie di F; (ii) intervalli in cui F cresce o decresce, asintoti; (iii) pendenza di F nell'origine.

Soluzione (i) $F(x)=\int_0^x \frac{\log_e(1+t^2)}{e^{t^2+1}}\,dt$ è dispari. Per dimostrarlo, chiamiamo f la funzione integranda: $f(t)=\frac{\log_e(1+t^2)}{e^{t^2+1}}$. Si noti che f è pari. Ora calcoliamo

$$F(-x)=\int_0^{-x}\frac{\log_e(1+t^2)}{e^{t^2+1}}\,dt=\int_0^{-x} f(t)\,dt$$

Operiamo la sostituzione $u=-t$, $du=-dt$. Il simbolo $\int_0^{-x}$ deve essere sostituito da $\int_0^x$ (perché se t va da 0 a $-x$, u va da 0 a x. Quindi:

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt=\int_0^x f(-u)\,(-du)=-\int_0^x f(u)\,du=-F(x)$$

Nello stesso modo, si dimostra che:

Se f è pari, allora la funzione integrale $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ è dispari.

Attenzione. Si noti che $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ non è una qualunque primitiva di f, bensì l'unica primitiva che nel punto $x=0$ vale zero. Questa è l'unica primitiva dispari (le funzioni dispari in zero valgono zero). Tutte le altre primitive della funzione pari f sono somma di $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ e di una costante e (non annullandosi in 0, non sono dispari.

Riassumendo (sempre assumendo che le funzioni siano definite su intervalli simmetrici centrati all'origine), nel presente esercizio e nell'esercizio 1 abbiamo dimostrato questi due fatti:

- Se g è dispari, tutte le primitive di g (in particolare, $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$, la primitiva che vale zero nell'origine) sono pari;
- Se f è pari, la primitiva che vale zero nell'origine, vale a dire $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, è dispari, mentre tutte le altre primitive non sono dispari.

(ii) Per il teorema fondamenale del calcolo integrale,

$$F'(x)=\frac{\log_e(1+x^2)}{e^{x^2+1}}\geq 0$$

($F'(x)=0$ solo per $x=0$.) Quindi F è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

In $x=0$ si ha $F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$ (F è dispari) e la pendenza di F in zero è $F'(0)=0$ (la retta tangente è $y=0$).

(iii) Per vedere se esiste un asintoto a $+\infty$, si deve anzitutto determinare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\log_e(1+t^2)}{e^{t^2+1}}\, dt \tag{3}$$

Per *definizione* di integrale generalizzato, tale limite è l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log_e(1+t^2)}{e^{t^2+1}}\, dt \tag{4}$$

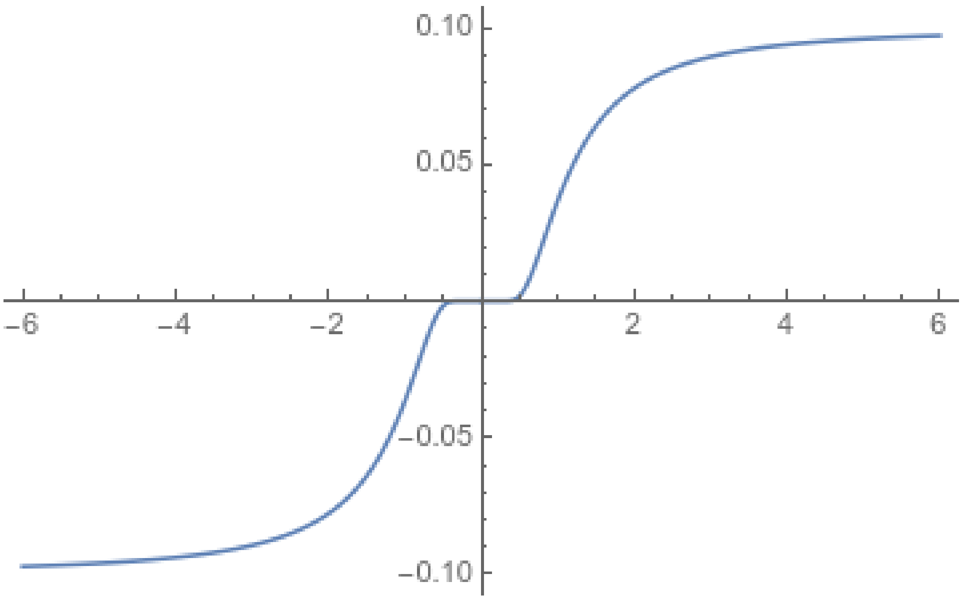
Abbiamo (per $t \to +\infty$):

$$\frac{\log_e(1+t^2)}{e^{t^2+1}} < \frac{1+t^2}{e^t} \sim \frac{t^2}{e^t} < \frac{1}{t^2}$$

(Spieghiamo l'ultima disuguaglianza. L'esponenziale e^t tende a $+\infty$ più velocemente di qualunque potenza t^m. In particolare, per $t \to +\infty$, $t^4/e^t \to 0$. Quindi vale definitivamente la disuguaglianza $t^4/e^t < 1$, da cui segue $\frac{t^2}{e^t} < \frac{1}{t^2}$.) Siccome è ben noto che la funzione $\frac{1}{t^2}$ è integrabile a $+\infty$, per i criteri del confronto e del confronto asintotico, anche $\frac{\log_e(1+t^2)}{e^{t^2+1}}$ è integrabile a $+\infty$. Questo significa che esiste una costante $K > 0$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\log_e(1+t^2)}{e^{t^2+1}}\, dt = K \tag{5}$$

e quindi F ha un asintoto orizzontale $y = K$ a $+\infty$. Siccome F è dispari, ha anche un asintoto $y = -K$ a $-\infty$.



5. (2 punti) Trovare il piano osculatore in $t = \pi/2$ della curva

$$C(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Soluzione $P_0 = C(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$.

$C'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$; $\qquad C'(\pi/2) = (-1, 0, 1)$

$C''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$; $\qquad C''(\pi/2) = (0, -1, 0)$

Un vettore di giacitura del piano osculatore in P_0:

$C'(\pi/2) \times C''(\pi/2) = (1, 0, 1)$

Piano osculatore in P_0: $\qquad x + z - \frac{\pi}{2} = 0$