Esercitazione:
Domande a risposta multipla e esercizi

8 gennaio 2021

Tempo complessivo per questionario ed esercizi (in sede d'esame scritto): 90 minuti.

1 Questionario

ISTRUZIONI In ogni quesito, il numero di affermazioni corrette può variare. Tutte le affermazioni giuste devono essere segnate. A ogni quesito è assegnato 1 punto (se si segnano correttamente *tutte* le affermazioni corrette; altrimenti 0 punti).

[**1**] Sia $\mathcal{P}$ il piano osculatore in $t = 1$ alla curva in $\mathbb{R}^3$

$$C(t) = (t, t^2, t^3), \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Allora:

1. $\mathcal{P}$ ha equazione $3x - 3y + z - 1 = 0$
2. $\mathcal{P}$ ha equazione $x - y + z - 1 = 0$
3. $\mathcal{P}$ è parallelo al vettore $(1, 2, 3)$.
4. $\mathcal{P}$ è ortogonale al vettore $(1, 2, 3)$.

[**2**] Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ tre versori (cioè, vettori di modulo 1) di $\mathbb{R}^3$.

Supponiamo: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$. Allora:

1. $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ formano lo stesso angolo con $\mathbf{u}$.
2. $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
3. La proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ lungo $\mathbf{u}$ è uguale alla proiezione ortogonale di $\mathbf{w}$ lungo $\mathbf{u}$: $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ formano lo stesso angolo con $\mathbf{w}$.

[3]

Definiamo:

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^4}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. G è pari.
2. G è dispari.
3. G non è né pari, né dispari.
4. G ha un asintoto orizzontale a $+\infty$.

---

[4] Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vettori in $\mathbb{R}^3$.

1. Se $|\mathbf{b}| = 2$, allora $\quad 4\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}\ $ è ortogonale a $\mathbf{b}$.
2. $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $|\lambda \mathbf{a}| = \lambda|\mathbf{a}|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

---

[5] L'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} x^a \sin\frac{1}{x}\, dx$$

1. converge per $a > 0$.
2. converge per $a < 0$.
3. Quando converge, il suo valore è zero.
4. Per $x \to +\infty$, $\quad x^a \sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x^{1-a}}$

---

[6]

Siano r, s rette qualunque nello spazio affine euclideo $\mathbb{R}^3$.

1. Se r, s sono rette con uno stesso vettore di direzione, $r \cap s = \emptyset$.
2. Se r, s sono rette con uno stesso vettore di direzione, $r \cap s = \emptyset$, oppure $r = s$.

3. Se r, s sono rette e $r \cap s = \emptyset$, allora r e s sono parallele.

4. Se $r \cap s = \emptyset$ e r e s non sono parallele, r e s sono sghembe.

---

[7]

Poniamo $I = \displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, dx$

1. $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, dx$

2. Con la sostituzione $\cos x = t$, si scrive: $I = -\displaystyle\int_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{dt}{t}$

3. $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, dx = \log_e \sqrt{3}$

4. $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x \, dx = -\log_e \sqrt{3}$

---

[8] Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' - 2xy = 4x \tag{2}$$

1. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata a (2) è $y = Ce^{-x^2}$

2. La funzione $y = -2$ è una soluzione particolare di (2).

3. La soluzione generale di (2) è $y = Ce^{x^2} - 2$

4. Esiste un'unica soluzione di (2) su $\mathbb{R}$ che soddisfa $y'(0) = 0$.

---

[9] Si consideri la curva $t \to C(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$.

1. La lunghezza ℓ di C è data da:

$$\ell(C) = \int_0^1 (1 + 4t^2 + 9t^4) \, dt$$

2. Se $f(x, y, z) = x + y + z$, l'integrale curvilineo di f lungo C è dato da:

$$\int_0^1 (t + t^2 + t^3)\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} \, dt$$

3. Se $f(x,y,z) = x + y + z$, l'integrale curvilineo di f lungo C è dato da:

$$\int_0^1 (t + t^2 + t^3)\,dt$$

4. La lunghezza ℓ di C è data da:

$$\ell(C) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}\,dt$$

---

[10] Nello spazio euclideo orientato $\mathbb{R}^3$, denotiamo con $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ il prodotto vettoriale dei vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ se e solo se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono paralleli.
2. Per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, vale: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$.
3. Se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, allora $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$.
4. Il prodotto vettoriale è commutativo: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

---

2 Esercizi

Istruzioni Scrivere le soluzioni motivando le risposte e riportando i calcoli, in modo conciso.

1. (2 punti)

   Stabilire se esiste finito l'integrale

   $$\int_0^1 te^{-\frac{1}{t^2}}\,dt$$

   Stabilire se la funzione

   $$G(x) = \int_0^x te^{-\frac{1}{t^2}}\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

   è pari, dispari, o né pari né dispari.

2. (2 punti) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{-1+e^{\sqrt{x}}}{(\sin x)^a}$$

e calcolarlo per $a = 0$.

3. (2 punti) Trovare un'equazione cartesiana per il piano $\mathcal{P}$ che passa per il punto $A = (1,1,1)$ e include la retta $r : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$.

4. (2 punti) Poniamo: $F(x) = \int_0^x \frac{\log_e(1+t^2)}{e^{t^2+1}}\, dt$. Motivando le risposte, disegnare un grafico qualitativo di F che mostri : (i) simmetrie di F; (ii) intervalli in cui F cresce o decresce, asintoti; (iii) pendenza di F nell'origine.

5. (2 punti) Trovare il piano osculatore in $t = \pi/2$ della curva

$$C(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in \mathbb{R}$$