Cenni sulle iterazioni di Newton nel piano complesso. Frattali e caos deterministico.

Federico Lastaria[1]

Parte finale del seminario sul metodo di Newton, tenuto presso:
Istituto d'Istruzione Superiore "Cremona"
con sezioni associate
L.S.S. "Luigi Cremona" e I.T.E. "Gino Zappa" (Milano).
8 Aprile 2021

[1]Dipartimento di Scienze e Tecnologie Aerospaziali, Politecnico di Milano.

Metodo iterativo di Newton nel piano complesso. Frattali di Newton e caos deterministico.

- Iterazioni di Newton nel piano complesso (Idea: Cayley, 1879).
- Il polinomio $z^2 + 1$.
- I casi dei polinomi $z^3 - 1$ e $z^4 - 1$.
- Bacini di attrazione. Il loro complementare: l'insieme di Julia. Frattali di Newton.
- Comportamenti caotici in sistemi dinamici deterministici. 'Caos deterministico'.

Il metodo di Newton in $\mathbb{C}$. (Dinamica complessa)

- Nel 1879, Arthur Cayley suggerisce di esplorare l'estensione del metodo iterativo di Newton-Raphson-Fourier al campo complesso: `https://www.jstor.org/stable/2369201`
- Fissati un polinomio e una sua radice w_0, i punti del piano complesso le cui orbite, nella iterazione del metodo di Newton, convergono a w_0, costituiscono il bacino di attrazione di quella radice. Come sono fatti i bacini di attrazione?
- "*The solution is easy and elegant in the case of a quadric equation, but the next succeeding case of the cubic equation appears to present considerable difficulty*" (A. Cayley, 1879).
- Solo a partire dal 1980, grazie alla computer graphics, è stato possibile visualizzare la stupefacente complessità (e bellezza) delle forme geometriche che si generano.
- I punti le cui orbite non convergono ad alcuna radice (insieme di Julia) danno origine a comportamenti caotici, sebbene il sistema dinamico sia deterministico. (Caos deterministico).

Metodo di Newton per $f(z) = z^2 + 1$ in $\mathbb{C}$.

- Seguendo il suggerimento di Cayley, applichiamo il metodo di Newton a $f(z) = z^2 + 1$ nel piano complesso.
- Funzione da iterare: $N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = z - \frac{z^2+1}{2z}$.
- N ha due punti fissi: $i, -i$ (le radici di $f(z) = z^2 + 1$).
- L'orbita di $z_0 \in \mathbb{C}$ è data da:

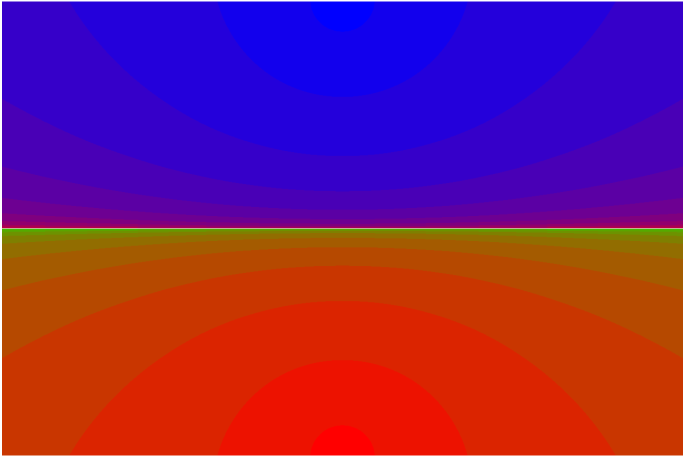
$$\boxed{z_{n+1} = N(z_n) = z_n - \frac{z_n^2+1}{2z_n} \quad (n \geq 1)}$$

- Bacino di attrazione di un punto fisso w_0: è l'insieme dei punti le cui orbite convergono a w_0.

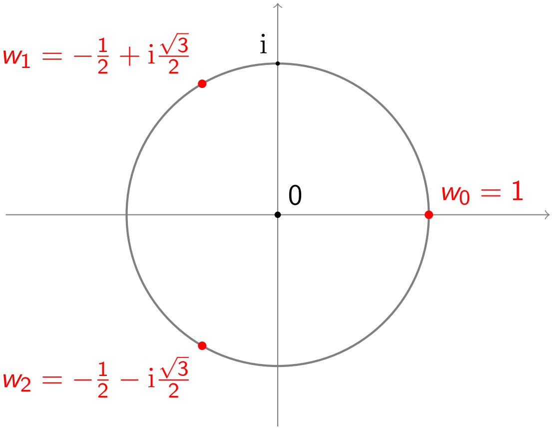
Problema Come sono fatti i bacini di attrazione per la funzione N associata a $f(z) = z^2 + 1$?

Iterazioni di Newton associate a $f(z) = z^2 + 1$ in $\mathbb{C}$

Le radici di f sono $i, -i$. Il punto iniziale z_0 andrà a convergere alla radice piú vicina. I bacini di attrazione sono i due semipiani:



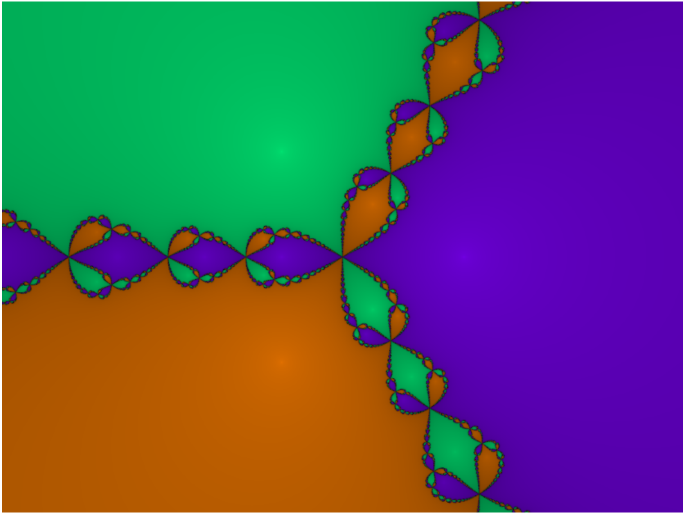
Metodo di Newton per $f(z) = z^3 - 1$ in $\mathbb{C}$.



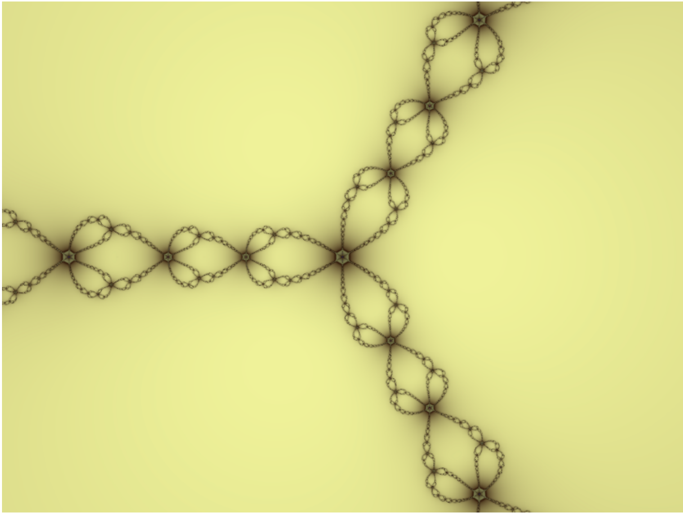
Le radici di f sono w_0, w_1, w_2.
Funzione da iterare: $N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = z - \frac{z^3-1}{3z^2}$

Orbita di z_0 (per $n \geq 1$): $\boxed{z_{n+1} = N(z_n) = z_n - \frac{z_n^3-1}{3z_n^2}}$

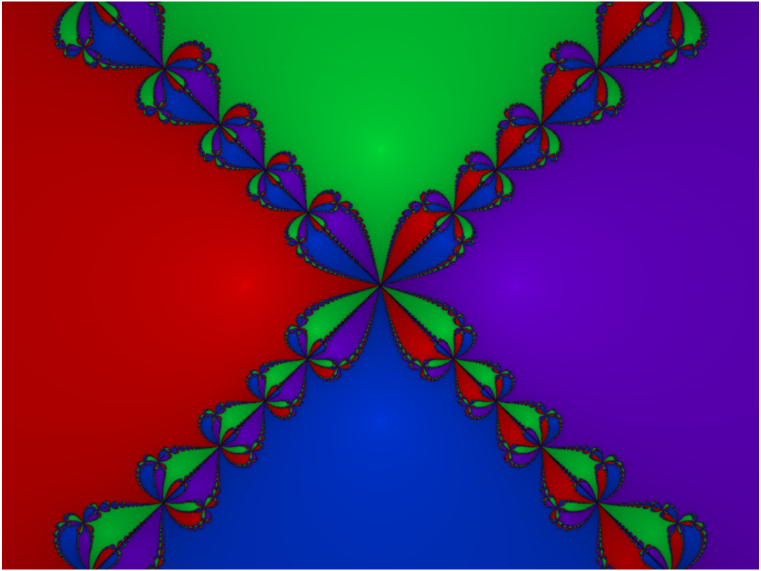
Iterazioni di Newton associate a $f(z) = z^3 - 1$ in $\mathbb{C}$. Bacini di attrazione.



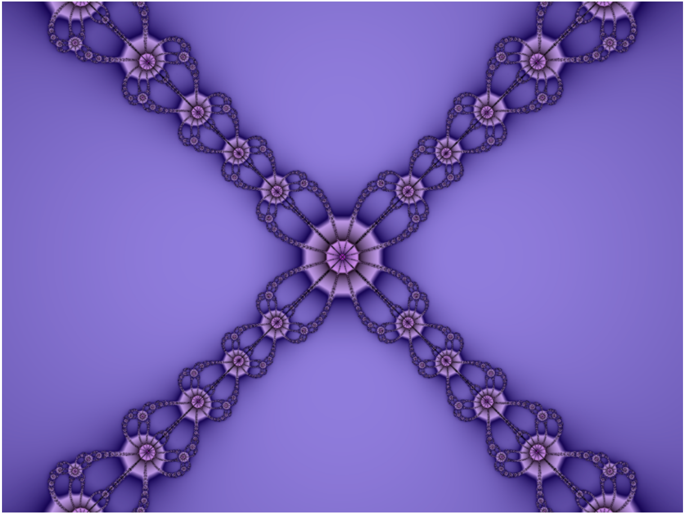
Iterazione di Newton associate a $f(z) = z^3 - 1$. Insieme di Julia (bordo dei bacini di attrazione). Caos.



Bacini di attrazione per $f(z) = z^4 - 1$.



Insieme di Julia (bordo dei bacini di attrazione) per $f(z) = z^4 - 1$. Comportamento caotico.



Stabile (prevedibile) o caotico? Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Caos deterministico.

Temi chiave da approfondire (Un ottimo riferimento è [1]).

1. Orbite stabili (o predicibili): Ogni orbita vicina si comporta in modo simile.
2. Orbite caotiche: Non stabili. Esistono orbite arbitrariamente vicine che si comportano in modo essenzialmente diverso.
3. Un sistema dinamico deterministico (come l'iterazione del metodo di Newton) può generare comportamenti caotici.
4. Quando si fanno misure, si fanno errori; inoltre, il computer fa sempre 'errori'. Se l'orbita è stabile (predicibile, prevedibile), nessun problema. Se è caotica, le previsioni, anche eseguite da un computer, non sono affidabili.
5. "*Chaos: When the present determines the future, but the approximate present does not approximately determine the future*". (E. Lorenz.)

Per approfondimenti:

- R. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*, Perseus Book Publishing 1992. Second Edition, CRC Press, 2020.
- R. Devaney, *Mastering Differential Equations: The Visual Method*, The Great Courses, 2011.
- P. D. Straffin Jr., *Newton's Method and Fractal Patterns*, COMAP, 1991. (Reperibile online).

Video:
`https://www.rigb.org/christmas-lectures/watch/1997/the-magical-maze/chaos-and-cauliflowers`