Politecnico di Milano. Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria

Esercizi su rette e piani nello spazio $\mathbb{R}^3$
Dicembre 2022

Indice

1 Esercizi su rette e piani nello spazio **1**
1.1 Normalizzare un vettore 1
1.2 Piano passante per un punto, con assegnato vettore di giacitura 2
1.3 Piano passante per un punto, parallelo a due vettori dati non paralleli: equazione cartesiana. 3
1.4 Piano passante per un punto, parallelo a due vettori dati non paralleli: equazioni parametriche. 3
1.5 Piano passante per tre punti non allineati 4
1.6 Retta passante per un punto, con vettore di direzione assegnato 5
1.7 Retta per due punti in forma parametrica 6
1.8 Passaggio da equazioni parametriche di una retta a equazioni cartesiane 7
1.9 Passaggio da equazioni cartesiane di una retta a equazioni parametriche 7
1.10 Trovare un vettore di direzione di una retta 9
1.11 Mutua posizione di due rette nello spazio: parallele, incidenti, sghembe . 10
1.12 Piano determinato da due rette incidenti 12
1.13 Piano contenente r e parallelo a s (r, s rette sghembe) 12
1.14 Parallelismo e ortogonalità 13
1.15 Piano che passa per un punto e include una retta 15
1.16 Distanza di un punto da un piano 17
1.17 Retta per un punto, incidente e ortogonale a una retta data 18
1.18 Distanza di un punto da una retta 19
1.19 Distanza tra due rette sghembe 20
1.20 Simmetrico di un punto rispetto a un piano 23
1.21 Simmetrico di un punto rispetto a una retta 24

1 Esercizi su rette e piani nello spazio

1.1 Normalizzare un vettore

Per definizione, il *normalizzato* di un vettore non nullo $\mathbf{v}$ è il vettore

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \tag{1}$$

che si ottiene dividendo il vettore $\mathbf{v}$ per la sua lunghezza. Se $\mathbf{v} = (a, b, c)$,

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right)$$
$$= (\cos\varepsilon_1, \cos\varepsilon_2, \cos\varepsilon_3)$$

Le componenti di $\hat{\mathbf{v}}$ sono i *coseni degli angoli* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ che $\hat{\mathbf{v}}$ forma con i tre vettori della base ortonormale $\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$.

Il normalizzato $\hat{\mathbf{v}}$ di $\mathbf{v}$ ha lunghezza unitaria:

$$|\hat{\mathbf{v}}|^2 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} == \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}|\mathbf{v}|^2 = 1$$

Esercizio 1.1. *(a) Normalizzare i vettori* $\mathbf{v} = (1,0,1)$ *e* $\mathbf{w} = (1,1,1)$.

(b) Con l'aiuto di una calcolatrice dotata della funzione $\cos^{-1}$*, calcolare in modo approssimato l'angolo che il vettore* $\mathbf{w} = (1,1,1)$ *forma con le direzioni positive degli assi cartesiani.*

(c) Calcolare la somma dei quadrati dei coseni degli angoli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ *che* $\mathbf{w} = (1,1,1)$ *forma con le direzioni positive degli assi cartesiani.*

Soluzione. (a)

$$\hat{\mathbf{v}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \hat{\mathbf{w}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(b) $\vartheta = \cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx \cos^{-1}(0.577350) \approx 54,7$ gradi sessagesimali.
(c) $\cos^2\varepsilon_1 + cos^2\varepsilon_2 + cos^2\varepsilon_3 = 1$ (perché $\cos^2\varepsilon_1 + \cos^2\varepsilon_2 + \cos^2\varepsilon_3 = |\hat{\mathbf{w}}|^2 = 1$).

1.2 Piano passante per un punto, con assegnato vettore di giacitura

Un'equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}$ passante per $P_0 = (x_0, y_o, z_0)$ e con giacitura $\mathbf{v} = (a, b, c)$ – cioè, ortogonale a $\mathbf{v} = (a, b, c)$ – è

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{2}$$

Esercizio 1.2. *Scrivere un'equazione del piano* $\mathcal{P}$ *che contiene il punto* $P_0 = (1, 0, -1)$ *e con vettore di giacitura* $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$

Soluzione. Un'equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}$ è

$$2(x-1)+1(y-0)+0(z+1)=0 \tag{3}$$

cioè: $2x+y-2=0$.

1.3 Piano passante per un punto, parallelo a due vettori dati non paralleli: equazione cartesiana.

Esiste un unico piano passante per un punto P_0 assegnato e parallelo a due vettori assegnati, non paralleli tra loro. Precisamente, se un piano $\mathcal{P}$ è parallelo a due vettori dati (non paralleli tra loro) $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ e $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$, un vettore di giacitura per tale piano (ossia, un vettore ortogonale al piano) è dato dal prodotto vettoriale $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Siamo allora ricondotti al problema precedente (paragrafo 1.2): trovare un'equazione cartesiana del piano passante per un punto e ortogonale a un dato vettore $\mathbf{c}(=\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

Esercizio 1.3. *Scrivere equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}$ contenente il punto $P_0=(1,0,2)$ e parallelo ai due vettori $\mathbf{a}=(1,0,-1)$ e $\mathbf{b}=(2,1,-1)$,*

Soluzione. Un vettore di giacitura del piano $\mathcal{P}$ è il prodotto vettoriale

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(1,-1,1)$$

Un'equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}$ è allora

$$1(x-1)+(-1)(y-0)+1(z-2)=0$$

ossia $x-y+z-3=0$.

1.4 Piano passante per un punto, parallelo a due vettori dati non paralleli: equazioni parametriche.

Il piano $\mathcal{P}$ contenente un punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ e parallelo a due vettori dati $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ e $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ si rappresenta mediante l'equazione vettoriale

$$X=P_0+s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$$

$s, t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.4. *Scrivere equazioni parametriche del piano* $\mathcal{P}$ *contenente il punto* $P_0 = (1, 0, 2)$ *e parallelo ai due vettori* $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ *e* $\mathbf{b} = (2, 1, -1)$,

Soluzione. Equazioni parametriche del piano $\mathcal{P}$ in forma vettoriale sono:

$$X = (1, 0, 2) + s(1, 0, -1) + t(2, 1, -1)$$

$s, t \in \mathbb{R}$. In componenti, si ottengono le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = t \\ z = 2 - s - t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Osservazione. Se volessimo passare da equazioni parametriche del piano a una sua equazione cartesiana, dovremmo eliminare i due parametri s, t nelle equazioni parametriche èqrefeqparam. A questo scopo, si ricavano s e t da due delle tre equazioni e si sostituiscono questi valori nella terza. Ad esempio, dalla seconda e terza equazione, ricaviamo:

$$t = y, \qquad s = 2 - y - z$$

Sostituendo nella prima equazione, otteniamo

$$x = 1 + (2 - y - z) + 2y$$

ossia: $x - y + z - 3 = 0$

1.5 Piano passante per tre punti non allineati

Il piano passante per tre punti distinti P, Q, R, è il piano che contiene P ed è parallelo ai vettori $Q - P$ e $R - P$. Siamo così ricondotti al caso visto nel paragrafo 1.3.

Un modo alternativo per risolvere l'esercizio consiste nello scrivere direttamente un'equazione cartesiana del piano per P, Q, R come un determinante uguagliato a zero:

$$\det \begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

Infatti, l'annullarsi di questo determinante 3×3 equivale al fatto che il parallelepipedo costruito su $X - P, Q - P, R - P$ abbia volume nullo, ovvero che i tre vettori

$$X - P, \ Q - P, \ R - P \tag{6}$$

siano paralleli a uno stesso piano (siano linearmente dipendenti). E questo fatto accade se, e soltanto se, i quattro punti X, P, Q, R appartengono a uno stesso piano.

Esercizio 1.5. *Sia $\mathcal{P}$ il piano che contiene i punti*

$$P = (1, 2, 1), \qquad Q = (-1, 0, 1), \qquad R = (2, 2, 2)$$

(a) Trovare un'equazione cartesiana di $\mathcal{P}$.
(b) Trovare una rappresentazione parametrica di $\mathcal{P}$.

Soluzione. (a) Il piano ha equazione cartesiana:

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - y - z + 2 = 0 \tag{7}$$

(b) Un'equazione parametrica, in forma vettoriale, del piano $\mathcal{P}$ è

$$X = P + t(Q - P) + u(R - P)$$

con $t, u \in \mathbb{R}$. In coordinate,

$$Q - P = (-2, -2, 0) \qquad\qquad R - P = (1, 0, 1)$$

Equazioni parametriche di $\mathcal{P}$ sono allora:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t + u \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + u \end{cases}$$

con $t, u \in \mathbb{R}$.

1.6 Retta passante per un punto, con vettore di direzione assegnato

La retta r passante per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ con vettore di direzione $\mathbf{v} = (l, m, n)$ (non nullo) ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{8}$$

Esercizio 1.6. *Trovare equazioni parametriche per le seguenti rette:*
1) Retta passante per $P_0 = (3, 5, 7)$ *e avente vettore di direzione* $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$.
2) La retta "asse delle x*."*

Soluzione. 1) La retta passante per $P_0 = (3, 5, 7)$ e avente vettore di direzione $v = (1, 2, -1)$ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 7 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2) Un vettore di direzione dell'asse x è $(1, 0, 0)$. Equazioni parametriche per l'asse x sono:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1.7 Retta per due punti in forma parametrica

La retta che contiene due punti (distinti) A e B è la retta passante per il punto A e con vettore di direzione $B - A$. Siamo così ricondotti al caso del paragrafo 1.6. In forma vettoriale, l'equazione di questa retta si scrive

$$X = A + (B - A)t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Si noti che il punto A e il punto B si ottengono rispettivamente per $t = 0$ e per $t = 1$.

In componenti, se $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $X = (x, y, z)$, equazioni parametriche per la retta che contiene A e B sono:

$$\begin{cases} x = a_1 + (b_1 - a_1)t \\ y = a_2 + (b_2 - a_2)t \\ z = a_3 + (b_3 - a_3)t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Esercizio 1.7. *Trovare equazioni parametriche della retta passante per* $A = (1, 0, -2)$ *e* $B = (2, 4, -1)$.

Soluzione.

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4t \\ z = -2 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1.8 Passaggio da equazioni parametriche di una retta a equazioni cartesiane

---

Esercizio 1.8. *Data una retta r nella forma parametrica*

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 7 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

si trovino equazioni cartesiane per r, cioè si esprima r come intersezione di due piani.

Soluzione. Si deve eliminare il parametro t. A questo scopo, basta ricavare t da una delle tre equazioni e sostituirlo nelle altre due. Per esempio, dalla terza equazione si ricava $t = 7 - z$. Sostituendo nelle prime due equazioni, si ottengono le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x = 3 + 7 - z \\ y = 5 + 2(7 - z) \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} x + z - 10 = 0 \\ y + 2z - 19 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

1.9 Passaggio da equazioni cartesiane di una retta a equazioni parametriche

---

Esercizio 1.9. *1) Data la retta r di equazioni cartesiane*

$$\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ \qquad 3y + z - 3 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

si trovino equazioni parametriche di r.

2) Data la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 3x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

si trovino equazioni parametriche di r.

Soluzione.

1) Notiamo che nella seconda equazione del sistema (10) compaiono solo la y e la z; manca la x. Allora, poniamo $z = t$ e procediamo “all'indietro” : dalla seconda equazione, ricaviamo la y (potremmo anche porre $y = t$ e ricavare la z):

$$z = t, \qquad y = -\frac{1}{3}t + 1$$

Torniamo alla prima equazione; sostituendo, otteniamo:

$$x = -2y + z + 1 = -2\left(-\frac{1}{3}t + 1\right) + t + 1 = \frac{5}{3}t - 1$$

In definitiva, otteniamo così le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{3}t - 1 \\ y = -\dfrac{1}{3}t + 1 \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2) Nel sistema èqrefretta1, in entrambe le equazioni figurano tutte e tre le incognite x, y, z. Allora, sommiamo, in modo opportuno, alla seconda riga un multiplo della prima, in modo tale da eliminare l'incognita x (Metodo di eliminazione delle incognite). Precisamente, sommando alla seconda riga la prima moltiplicata per -3, otteniamo:

$$\begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ \quad -7y + 5z + 8 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Ora procediamo come nel precedente caso 1). Poniamo $z = t$. Dalla seconda equazione, ricaviamo $y = \frac{5}{7}t + \frac{8}{7}$ e sostituendo all'indietro nella prima equazione, otteniamo

$$x = -2y + z + 3 = -2(\frac{5}{7}t + \frac{8}{7}) + t + 3 = -\frac{3}{7}t + \frac{5}{7}$$

In conclusione, troviamo le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{7}t + \dfrac{5}{7} \\ y = \dfrac{5}{7}t + \dfrac{8}{7} \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Da queste equazioni parametriche leggiamo che un vettore di direzione della retta r è $\left(-\frac{3}{7}, \frac{5}{7}, 1\right)$, oppure $(-3, 5, 7)$.

1.10 Trovare un vettore di direzione di una retta

Primo caso. Se la retta r è data mediante equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{13}$$

leggiamo subito un vettore di direzione: $\mathbf{v} = (l, m, n)$.

Secondo caso. Se invece la retta è data mediante equazioni cartesiane,

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{14}$$

possiamo trovare equazioni parametriche di r come nel paragrafo 1.9. Da queste equazioni parametriche leggiamo poi direttamente un vettore di direzione.

Possiamo anche osservare che *un vettore di direzione* $\mathbf{v}$ *della retta (14) è dato dal prodotto vettoriale*

$$\mathbf{v} = (a, b, c) \times (a', b', c')$$

Infatti, consideriamo il sistema omogeneo

$$r' : \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases} \tag{15}$$

che rappresenta la retta r' passante per l'origine e parallela a r. Le rette r e r' hanno la stessa direzione. Ora, dal sistema (15) leggiamo subito che un vettore di direzione di r' (e quindi di r) è ortogonale sia a (a, b, c), sia a (a', b', c'), e quindi è parallelo al prodotto vettoriale $(a, b, c) \times (a', b', c')$.

Esercizio 1.10. *Sia* r *la retta di equazioni cartesiane*

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Scrivere equazioni parametriche della retta r *e trovare un suo vettore di direzione.*

Soluzione. Eliminando dalla seconda equazione l'incognita x, troviamo il sistema

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ -3y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

Posto $z = t$, dalla seconda equazione ricaviamo $y = t + \dfrac{1}{3}$. Infine, sostituendo nella prima equazione, ricaviamo $x = 2/3$. Otteniamo così le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} + t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

dalle quali deduciamo che un vettore di direzione di r è $(0, 1, 1)$.

In modo alternativo, se (a, b, c) e (a', b', c') sono i vettori di giacitura dei piani che figurano nel sistema (16), un vettore di direzione di r è dato dal prodotto vettoriale

$$(a, b, c) \times (a', b', c') = (1, 1, -1) \times (2, -1, 1) = (0, -3, -3)$$

o da un qualunque suo multiplo non nullo (ad esempio, $(0, 1, 1)$).

1.11 Mutua posizione di due rette nello spazio: parallele, incidenti, sghembe

Nello spazio affine euclideo tridimensionale, due rette r e r' , rispettivamente con vettori di direzione $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$, si dicono:

- *Parallele*, se hanno la stessa direzione, cioè se i loro vettori di direzione $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono multipli uno dell'altro;
- *Sghembe*, se non sono complanari, cioè se non esiste alcun piano che le contenga entrambe.
- *Incidenti*, se la loro intersezione $r \cap r'$ è un punto (cioè, se hanno esattamente un punto in comune).

Si noti che ogni retta è parallela a se stessa.

Riassumendo: se due rette nello spazio hanno la stessa direzione, sono parallele; se invece non hanno la stessa direzione, ci sono due casi possibili: sono incidenti se la loro intersezione è un punto, sono sghembe se la loro intersezione è l'insieme vuoto.

Esercizio 1.11. *Si considerino la retta r di equazioni parametriche*

$$r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

e la retta s di equazioni parametriche

$$s : \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Stabilire se r e s sono parallele, incidenti o sghembe.

Soluzione. Cominciamo a trovare le direzioni di r e s. Dalle equazioni cartesiane di s, ponendo $z = u$, ricaviamo le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - u \\ y = 1 \\ z = u \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Le direzioni di r e s sono allora date, rispettivamente, da $(1, 3, 2)$ e $(-1, 0, 1)$. Tali vettori non sono proporzionali, quindi r e s non sono parallele. Per decidere se sono incidenti o sghembe, basta ora determinare la loro intersezione $r \cap s$: se è un punto, sono incidenti; se è l'insieme vuoto, sono sghembe. Sostituendo le equazioni parametriche di r nelle equazioni cartesiane di s, otteniamo:

$$s : \begin{cases} (3 + t) + 2t - 1 = 0 \\ 1 + 3t = 1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo:

$$s : \begin{cases} 3t + 2 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzioni. Quindi le due rette sono sghembe.

Esercizio 1.12. *Trovare la posizione reciproca delle due rette r e s rispettivamente di equazioni parametriche*

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad s : \begin{cases} x = 4 + 2u \\ y = -1 - u \\ z = 2 + u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

Soluzione La direzione di r è data dal vettore $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1)$, mentre quella di s è data da $\mathbf{v}_2 = (2, -1, 1)$. Pertanto le due rette non sono parallele ($\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono paralleli, cioè non sono multipli uno dell'altro). L'intersezione $r \cap s$ si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} t = 4 + 2u \\ 1 - t = -1 - u \\ t = 2 + u \end{cases}$$

Le cui soluzioni sono $t = 0$, $u = -2$. Sostituendo $t = 0$ nelle equazioni parametriche di r (oppure $u = -2$ nelle equazioni di s) si trova che l'intersezione di r e s è data da un punto: $r \cap s = (0, 1, 0)$. Pertanto le due rette sono incidenti.

1.12 Piano determinato da due rette incidenti

Supponiamo che r e s siano due rette incidenti. Questo significa che la loro intersezione è un punto P_0. Allora esiste uno e un solo piano $\mathcal{P}$ che include r e s. Se vettori di direzione di r e s sono rispettivamente $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, il piano $\mathcal{P}$ ha giacitura data dal prodotto vettoriale $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$.

Esercizio 1.13. *Verificare che le due rette*

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad s : \begin{cases} x = 4 + 2u \\ y = -1 - u \\ z = 2 + u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

sono incidenti e scrivere un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

Soluzione Abbiamo già visto nell'esercizio 1.12 che r e s sono incidenti: la loro intersezione è il punto $r \cap s = (0, 1, 0)$. Vettori di direzione di r e s sono dati da $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (2, -1, 1)$. Pertanto la giacitura del piano $\mathcal{P}$ che contiene r e s è data dal prodotto vettoriale

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$$

L'equazione del piano $\mathcal{P}$ è allora $0(x - 0) + 1(y - 1) + 1(z - 0)$, cioè $y + z - 1 = 0$.

1.13 Piano contenente r e parallelo a s (r, s rette sghembe)

Siano r e s rette sghembe. Si vede facilmente che esiste un unico piano $\mathcal{P}$ che include r ed è parallelo a s. Infatti, detti $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ i due vettori di direzione di r e s, e scelto in modo arbitrario un punto P_0 su r, il piano $\mathcal{P}$ è l'unico piano passante per P_0 e avente come giacitura il prodotto vettoriale $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

Un altro modo di procedere è il seguente: tra le rette del fascio di sostegno r, si determina l'unica retta che è parallela alla retta s.

Esercizio 1.14. *Date le rette*

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad s : \begin{cases} x = 4 + 2u \\ y = -1 - u \\ z = 2 + u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

scrivere un'equazione cartesiana del piano che include r ed è parallelo a s.

Soluzione Equazioni cartesiane per r sono

$$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Il fascio di sostegno r ha equazione

$$\lambda(x + y - 2) + \mu(x - z) = 0, \qquad \text{ossia} \qquad (\lambda + \mu)x + \lambda y - \mu z - 2\lambda = 0 \tag{17}$$

Una retta del fascio è parallela a s, di direzione $(2, -1, 1)$, se, e soltanto se,

$$\lambda + \mu = 0$$

Ad esempio, $\lambda = 1, \mu = -1$. Il piano $\mathcal{P}$ ha equazione

$$y + z - 2 = 0$$

Osservazione Controlliamo che la risposta sia corretta, cioè che il piano di equazione $y + z - 2 = 0$ contenga r e sia parallelo a s:

1) Per ogni $t \in \mathbb{R}$, si ha $(1-t)+(1+t)-2 = 2-2 = 0$. Quindi il piano $y+z-2 = 0$ contiene la retta r;

2) $(0, 1, 1) \cdot (2, -1, 1) = 0$, quindi $\mathcal{P}$ è parallelo a s.

1.14 Parallelismo e ortogonalità

Esercizio 1.15. *Scrivere equazioni parametriche per la retta dello spazio che contiene il punto $P = (0, 3, 5)$ ed è ortogonale al piano $x = 0$.*

Soluzione Un vettore di giacitura del piano $x = 0$ è $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$. La retta cercata ha equazione vettoriale:

$$(x, y, z) = (0, 3, 5) + t(1, 0, 0)$$

Equazioni parametriche sono date dunque da:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Esercizio 1.16. *Scrivere un'equazione cartesiana del piano ortogonale al vettore* $(1, 2, 3)$ *e passante per il punto $P = (1, -1, 4)$.*

Soluzione Un'equazione cartesiana è

$$x - 1 + 2(y + 1) + 3(z - 4) = 0, \qquad \text{cioè} \qquad x + 2y + 3z - 11 = 0$$

Esercizio 1.17. *Determinare l'equazione della retta passante per* $A\left(7, -\frac{1}{3}, 2\right)$ *e perpendicolare al piano* π *di equazione* $5x - 4y + z = 0$.

Soluzione $$\begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -\dfrac{1}{3} - 4t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Esercizio 1.18. *Determinare l'equazione cartesiana del piano* π *passante per* $P = (1, -1, 2)$ *e parallelo al piano* π' *di equazione* $x - 3y + z - 1 = 0$.

Soluzione $(x - 1) - 3(y + 1) + (z - 2) = 0$, cioè: $x - 3y + z - 6 = 0$.

Esercizio 1.19. *Dimostrare: Se l'equazione di un piano non contiene la variabile* y, *cioè se è del tipo* $ax + cz + d = 0$, *allora il piano è parallelo all'asse* y *(e similmente per le altre variabili).*

Soluzione Un vettore di direzione dell'asse y è $(0, 1, 0)$. Il piano $ax+by+cz+d = 0$ è parallelo all'asse y se, e solo se,

$$(a, b, c) \cdot (0, 1, 0) = b = 0$$

Esercizio 1.20. *Si considerino il piano* $\mathcal{P}$ *di equazione* $x + y + z + 1 = 0$ *e i punti* $P = (-1, 0, -1)$ *e* $Q = (1, 2, \alpha)$.

1. *Scrivere un vettore di direzione* v *per la retta che contiene* P *e* Q*;*
2. *Trovare un vettore* (a, b, c) *ortogonale al piano* π.
3. *Per quali valori di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *per i quali la retta* PQ *è parallela al piano* π *?*
4. *Per quali valori di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la retta* PQ *è ortogonale al piano* π *?*

Soluzione

1. Un vettore di direzione per la retta che contiene P e Q è $Q - P = (2, 2, \alpha + 1)$.
2. Un vettore ortogonale al piano $x + y + z + 1 = 0$ è $(1, 1, 1)$.
3. La retta PQ è parallela al piano $x + y + z + 1 = 0$ se
$$(2, 2, \alpha + 1) \cdot (1, 1, 1) = 2 + 2 + \alpha + 1 = 0$$
cioè se $\alpha = -5$.
4. La retta PQ è perpendicolare al piano $x + y + z + 1 = 0$ se $(2, 2, \alpha + 1)$ e $(1, 1, 1)$ sono proporzionali, cioè se $\alpha = 1$.

1.15 Piano che passa per un punto e include una retta

Dati una retta r e un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ non appartenente a r, cerchiamo un'equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}$ che contiene la retta[1] r e il punto P_0. Supponiamo che la retta r sia data come intersezione di due piani, vale a dire per mezzo di equazioni cartesiane
$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{18}$$
Allora l'equazione del *fascio di sostegno* r (cioè, le equazioni di tutti i piani che includono r, e soltanto di essi) è
$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \tag{19}$$
La condizione di appartenenza del punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ al piano di equazione (19) permette di determinare (λ, μ). (Le soluzioni non nulle (λ, μ) sono infinite, ma sono tutte proporzionali tra loro. Quindi il problema ha un'unica soluzione).

Esercizio 1.21. *Sia r la retta di equazioni parametriche*
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$
e sia $Q = (1, 1/2, 3)$. Verificare che Q non appartiene a r e determinare un'equazione cartesiana per il piano π passante per Q e contenente r.

[1] L'espressione 'piano $\mathcal{P}$ che contiene la retta r' significa che r è un *sottoinsieme* del piano $\mathcal{P}$, vale a dire tutti i punti di r appartengono al piano. Sarebbe più corretto dire che il piano *include* la retta.

Soluzione $Q \in r$ se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ per il quale si abbia $-1+t=1$, $-2t=\frac{1}{2}$, $1+3t=3$. Queste tre equazioni non sono compatibili, quindi $Q \notin r$. Esiste allora un unico piano π che contiene Q e include r. Per determinarlo, usiamo il metodo del fascio. Equazioni cartesiane di r sono:

$$\begin{cases} y=-2(x+1) \\ z=1+3(x+1) \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 2x+y+2=0 \\ 3x-z+4=0 \end{cases}$$

Un piano $\lambda(2x+y+2)+\mu(3x-z+4)=0$ del fascio di sostegno r passa per $Q=(1,1/2,3)$ se

$$0=\lambda\left(2+\frac{1}{2}+2\right)+\mu(3-3+4)=\frac{9}{2}\lambda+4\mu$$

Questa uguaglianza è verificata, ad esempio, per $\lambda=8$ e $\mu=-9$. Il piano cercato ha dunque equazione

$$11x-8y-9z+20=0$$

Esercizio 1.22. *Data la retta r di equazioni*

$$\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases}$$

determinare tutti i piani passanti:

(a) *per r e per il punto $P=(-1,-3,0)$;*

(b) *per r e per il punto $Q=(0,5,7)$.*

Soluzione

(a) Poiché $P \notin r$, esiste un unico piano che contiene P e r. I piani che includono la retta r hanno equazione

$$\lambda(x+y-z+2)+\mu(2x-y+5)=0$$

con $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli. Il passaggio per $P=(-1,-3,0)$ impone la condizione:

$$\lambda(-1-3-0+2)+\mu(-2+3+5)=0 \qquad \text{ossia} \qquad -2\lambda+6\mu=0$$

da cui si ricava, ad esempio, $\lambda=3$, $\mu=1$. Dunque, il piano cercato ha equazione $5x+2y-3z+11=0$.

(b) Poiché $Q \in r$, ogni piano passante per r passa anche per Q. I piani richiesti sono quindi quelli del fascio di sostegno r, di equazione

$$\lambda(x+y-z+2)+\mu(2x-y+5)=0 \qquad \text{ossia} \qquad (\lambda+2\mu)x+(\lambda-\mu)y-\lambda z+2\lambda+5\mu=0$$

con $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli.

1.16 Distanza di un punto da un piano

Premettiamo una definizione. In $\mathbb{R}^3$, fissiamo un piano $\mathcal{P}$ e un punto A. *La distanza* $d(A, \mathcal{P})$ *del punto* $A \in \mathbb{R}^3$ *dal piano* $\mathcal{P}$ *è l'estremo inferiore dell'insieme di tutte le distanze* $d(A, X)$*, al variare di* $X \in \mathcal{P}$*:*

$$\mathrm{d}(A, \mathcal{P}) = \inf_{X \in \mathcal{P}} \{\mathrm{d}(A, X)\} \tag{20}$$

Si dimostra facilmente che questo estremo inferiore è di fatto un *minimo*. Questo significa che: *Esiste un punto* Z_0 *appartenente al piano* $\mathcal{P}$ *che realizza la minima distanza, cioè*

$$\mathrm{d}(A, \mathcal{P}) = \mathrm{d}(A, Z_0)$$

Infatti, si vede facilmente che questo punto Z_0 è l'intersezione di $\mathcal{P}$ con la retta passante per A e ortogonale a $\mathcal{P}$. (Fig: 1.)

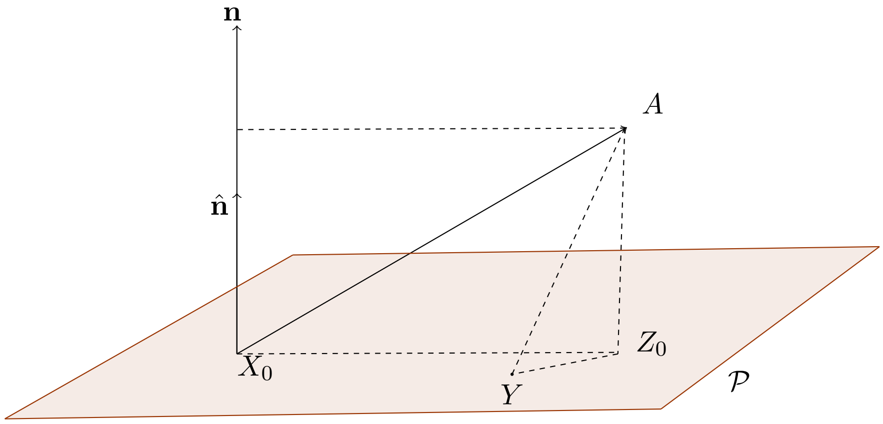


Figura 1: Il punto del piano $\mathcal{P}$ a distanza minima dal punto A è l'intersezione Z_0 del piano $\mathcal{P}$ con la retta passante per A e ortogonale a $\mathcal{P}$. Infatti, se Y è un qualunque altro punto del piano $\mathcal{P}$, distinto da Z_0, nel triangolo rettangolo AZ_0Y l'ipotenusa AY è piú lunga del cateto AZ_0. Per calcolare la distanza $\mathrm{d}(A, \mathcal{P})$ si può dunque trovare Z_0 e poi calcolare la distanza $\mathrm{d}(A, Z_0) = |A - Z_0|$. Ma per calcolare $\mathrm{d}(A, \mathcal{P})$ non è necessario trovare il punto Z_0. Infatti, se X_0 è un *qualunque* punto appartenente a $\mathcal{P}$, la distanza $|A - Z_0|$ è uguale a $|(A - X_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}|$ (valore assoluto del prodotto scalare del vettore $A - X_0$ con $\hat{\mathbf{n}}$, vettore di giacitura normalizzato del piano $\mathcal{P}$).

Per trovare la distanza tra un punto e un piano, non è necessario calcolare Z_0. Si può utilizzare il seguente teorema:

Teorema 1.23. *Nello spazio, riferito a un sistema di coordinate cartesiane, la distanza del punto* $Z = (z_1, z_2, z_3)$ *dal piano* $\mathcal{P}$ *di equazione cartesiana*

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{21}$$

è data da:

$$d(Z, \mathcal{P}) = \left| \frac{az_1 + bz_2 + cz_3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \tag{22}$$

(Per la dimostrazione, si veda la Fig: 1)

Esercizio 1.24. *Calcolare la distanza del punto $Z = (1, 0, -3)$ dal piano $\mathcal{P}$ di equazione cartesiana*

$$x + y - z + 1 = 0 \tag{23}$$

Soluzione La distanza è data da:

$$\left| \frac{1 + 0 - (-3) + 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

1.17 Retta per un punto, incidente e ortogonale a una retta data

---

Esercizio 1.25. *Scrivere equazioni parametriche per la retta r passante per il punto $P_0 = (1, 0, 1)$, incidente e ortogonale alla retta*

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

Soluzione

(a) Primo modo. Il generico punto corrente sulla retta s ha coordinate $X(t) = (t, 1 - t, 2t)$. Cerchiamo il valore di $t \in \mathbb{R}$ in corrispondenza del quale il vettore

$$X(t) - P_0 = (t - 1, 1 - t, 2t - 1)$$

è ortogonale al vettore di direzione $(1, -1, 2)$ delle retta S. A questo scopo, si deve risolvere l'equazione

$$(1, -1, 2) \cdot (t - 1, 1 - t, 2t - 1)0 = 6t - 4 = 0$$

che fornisce la soluzione $t = 2/3$. Il punto $X\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ è l'intersezione $r \cap s$ (ed è il punto di s più vicino a P_0). Quindi, la retta cercata r è la retta passante per i punti $P_0 = (1, 0, 1)$ e $X\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$. In forma parametrica,

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3u \\ y = -\frac{1}{3}u \qquad u \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \frac{1}{3}u \end{cases}$$

(b) Secondo modo. Il punto in cui le due rette r e s si intersecano si può anche trovare come l'intersezione $s \cap \mathcal{Q}$, dove $\mathcal{Q}$ è il piano passante per il punto P_0 e ortogonale a s. L'equazione di $\mathcal{Q}$ è

$$x - y + 2z - 3 = 0$$

Per trovare l'intersezione di s e $\mathcal{Q}$ sostituiamo nell'equazione di $\mathcal{Q}$ al posto di x, y, z le corrispondenti espressioni date dalle equazioni parametriche di s. Si ottiene

$$t - (1 - t) + 2(2t) - 3 = 6t - 4 = 0$$

e quindi $t = 2/3$. Dunque $r \cap s = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ e la retta cercata è la retta che passa per P_0 e $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

1.18 Distanza di un punto da una retta

Per definizione:

La distanza $d(P_0, s)$ del punto P_0 dalla retta s è l'estremo inferiore dell'insieme di tutte le distanze $d(P_0, X)$, al variare di X sulla retta s:

$$\mathrm{d}(P_0, s) = \inf_{X \in s} \{\mathrm{d}(P_0, X)\} \tag{24}$$

Questo estremo inferiore è di fatto un minimo. Questo significa che esiste un punto X_0 in s che realizza la minima distanza, nel senso che

$$\mathrm{d}(P_0, s) = \mathrm{d}(P_0, X_0)$$

Infatti, si vede facilmente, usando la disuguaglianza triangolare, che questo punto X_0 è l'intersezione di s con il piano passante per P_0 e ortogonale a s.

Esercizio 1.26. *Calcolare la distanza del punto $P_0 = (1, 0, 1)$ dalla retta*

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

Soluzione Il punto della retta s più vicino al punto P_0 è l'intersezione di s con il piano $\mathcal{Q}$ passante per P_0 e ortogonale a s. L'equazione di $\mathcal{Q}$ è

$$x - y + 2z - 3 = 0$$

Per trovare l'intersezione di s e $\mathcal{Q}$ sostituiamo nell'equazione di $\mathcal{Q}$ al posto di x, y, z le corrispondenti espressioni date dalle equazioni parametriche di s. Si ottiene

$$6t - 4 = 0 \qquad \text{e quindi} \qquad t = 2/3$$

In corrispondenza del valore $t = /3$ si ottiene il punto di s di coordinate $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Allora la distanza del punto $P_0 = (1, 0, 1)$ dalla retta s è data da:

$$\mathrm{d}(P_0, s) = \mathrm{d}((1, 0, 1), (2/3, 1/3, 4/3)) = \sqrt{3}/3$$

1.19 Distanza tra due rette sghembe

Per definizione:

Nello spazio, la distanza $d(r, s)$ tra due rette r e s è l'estremo inferiore dell'insieme di tutte le distanze $d(R, S)$, al variare di R su r e di S su s:

$$\mathrm{d}(r, s) = \inf_{R \in r,\, S \in s} \{\mathrm{d}(R, S)\} \tag{25}$$

Qualunque sia la mutua posizione di r e s (incidenti, parallele o sghembe) l'estremo inferiore che dà la distanza è di fatto un minimo. Questo significa che esistono due punti $R_0 \in r$ e $S_0 \in s$ che realizzano la minima distanza tra le due rette:

$$\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(R_0, S_0)$$

In particolare, nel caso in cui r e s siano sghembe, si dimostra che esiste una e una sola retta q che è incidente e ortogonale a entrambe. Questa retta q interseca r e s in due punti $H \in r$ e $K \in s$ che realizzano la distanza minima.

Ai fini del calcolo della distanza tra due rette sghembe, non è però necessario trovare i due punti H e K. Si possono invece seguire due metodi diversi, che ora descriviamo.

Primo metodo per calcolare la distanza tra due rette sghembe. Si trova l'equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}$ (che esiste ed è unico) che include r ed è parallelo a s. Si sceglie poi un punto X qualunque su S. La distanza tra r e s è allora uguale alla distanza di X dal piano $\mathcal{P}$. (Si potrà usare, per esempio, la formula (22)).

Secondo metodo per calcolare la distanza tra due rette sghembe. Si usa la formula seguente.

Formula della distanza tra due rette sghembe. *Nello spazio $\mathbb{R}^3$, siano*

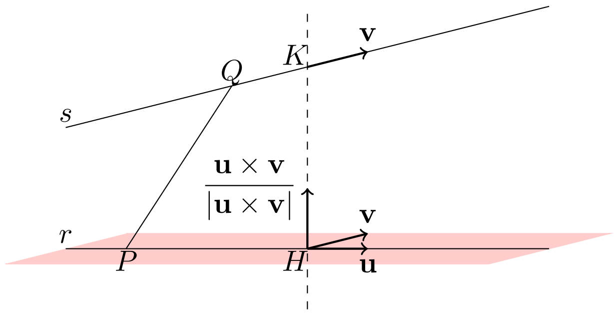
$$r: \qquad X(t) = R + t\mathbf{u}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

e

$$s: \qquad X(u) = S + u\mathbf{v}, \qquad u \in \mathbb{R}$$

due rette sghembe. (R, S sono punti su r e s; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ sono rispettivi vettori di direzione). Allora, la distanza tra di esse è data da:

$$\left| \frac{(P-Q)\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|} \right| \tag{26}$$



Spiegazione della formula della distanza (26): La distanza tra r e s è uguale alla lunghezza del segmento HK, intercettato da r e s sull'unica retta incidente e ortogonale a entrambe. Poiché P si proietta ortogonalmente su H e Q su K, il vettore HK è la proiezione ortogonale di PQ. Quindi la lunghezza di HK (cioè, la distanza tra r e s) è uguale alla lunghezza della proiezione di PQ lungo un (qualunque) vettore parallelo a HK. Ora, il prodotto vettoriale $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ è ortogonale sia a $\mathbf{u}$ sia a $\mathbf{v}$, e quindi è parallelo a HK. Quindi,

$$\mathrm{d}(r,s) = |HK| = \left| \frac{(P-Q)\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|} \right|$$

Si può dunque calcolare $\mathrm{d}(r,s)$ senza conoscere H e K, ma conoscendo soltanto due punti qualunque su r e s, e due vettori di direzione.

Terzo metodo per calcolare la distanza tra due rette sghembe. Un terzo metodo per calcolare la distanza tra due rette sghembe r e s consiste nel determinare i due punti $H \in r$ e $K \in s$ che sono le intersezioni, rispettivamente, di r e s con l'unica retta incidente e ortogonale sia a r sia a s. Trovati H e K, la distanza tra r e s è data dalla distanza tra i due punti H e K:

$$\mathrm{d}(r,s) = \mathrm{d}(H,K)$$

Esercizio 1.27. *Siano r e s le rette di equazioni parametriche*

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 2+2t \\ z = 2+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = -1 \\ y = 2+u \\ z = 3u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

Verificare che sono sghembe e calcolare la distanza tra di esse.

Soluzione Le rette non sono parallele, perché i loro vettori di direzione $\mathbf{u} = (1,2,1)$ e $\mathbf{v} = (0,1,3)$ non sono paralleli. Non sono neanche incidenti, perché il sistema

$$r : \begin{cases} t = -1 \\ 2 + 2t = 2 + u \\ 2 + t = 3u \end{cases}$$

non ha soluzioni. Pertanto sono sghembe. Un punto su r è $P = (0,2,2)$, un punto su s è $Q = (-1,2,0)$. Il prodotto vettoriale dei vettori di direzione è

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1,2,1) \times (0,1,3) = (5,-3,1)$$

e $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |(5,-3,1)| = \sqrt{35}$. Allora, per la formula (26), la distanza tra le due rette è

$$\left| \frac{(P-Q) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} \right| = \left| \frac{(1,0,2) \cdot (5,-3,1)}{\sqrt{35}} \right| = \frac{7}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{5}$$

Esercizio 1.28. *Siano r e s le rette di equazioni parametriche*

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad\qquad s : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + u \\ z = 3u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

(a) Dimostrare che r e s sono sghembe.

(b) Trovare i punti $H \in r$ e $K \in s$ intersezioni, rispettivamente, di r e s con l'unica retta incidente e ortogonale sia a r sia a s.

(c) Calcolare la distanza $d(r,s)$ $(= d(H,K))$.

Soluzione (b) Vettori di direzione di r e s sono $\mathbf{u} = (1,2,1)$ e $\mathbf{v} = (0,1,3)$. Chiamiamo $X(t) = (t, 2+2t, 2+t)$ e $Y(u) = (-1, 2+u, 3u)$ il punto generico su r e su s, rispettivamente. I valori di t e u per i quali il vettore

$$X(t) - Y(u) = (1+t, 2t-u, 2+t-3u)$$

è ortogonale sia a r sia a s si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (X(t) - Y(u)) \cdot \mathbf{u} = 0 \\ (X(t) - Y(u)) \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} 6t - 5u + 3 = 0 = 0 \\ 5t - 10u + 6 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione $t = 0, u = 3/5$ corrisponde ai due punti $H = (0,2,2)$, $K = (-1, 13/5, 9/5)$. La distanza tra le due rette r e s è allora data da

$$\mathrm{d}(r,s)^2 = \mathrm{d}(H,K)^2 = 1 + \frac{9}{25} + \frac{1}{25} = \frac{35}{25}$$

Pertanto, $\mathrm{d}(r,s) = \mathrm{d}(H,K) = \dfrac{\sqrt{35}}{5}$.

1.20 Simmetrico di un punto rispetto a un piano

Esercizio 1.29. *Determinare il simmetrico del punto* $P = (-1, 1, 3)$ *rispetto al piano* $\mathcal{P}$ *di equazione* $2x - y + z + 1 = 0$

Soluzione Il punto P non appartiene al piano π.

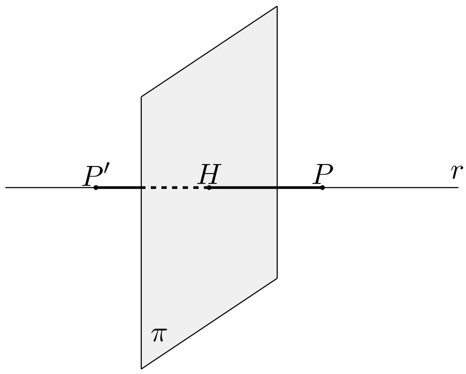


Figura 2

Le equazione parametriche della retta r passante per P e ortogonale a $\mathcal{P}$ sono

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{27}$$

Il punto H intersezione del piano $\mathcal{P}$ e della retta r, si ottiene sostituendo il generico punto $(-1 + 2t, 1 - t, 3 + t)$ di r nell'equazione del piano:

$$2(-1 + 2t) - 1 + t + 3 + t + 1 = 0$$

Si ottiene $t = -\frac{1}{6}$. Sostituendo in (27) il valore trovato di t si ricava

$$H = (\mathcal{P} \cap r) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{6}, \frac{17}{6}\right)$$

Il punto H è il punto medio del segmento di estremi P e P'

$$H = \frac{P + P'}{2}$$

Quindi

$$P' = 2H - P = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

1.21 Simmetrico di un punto rispetto a una retta

Data una retta s e un punto P, cerchiamo il punto P' simmetrico di P rispetto a s. Troviamo dapprima la proiezione ortogonale H di P su s, cioè l'intersezione di s con la retta passante per P, ortogonale e incidente a s. Poi, come nel caso del simmetrico di un punto rispetto a un piano (paragrafo 1.20) osserviamo che $H = \frac{1}{2}(P + P')$, e ricaviamo P'.

Esercizio 1.30. *Determinare il simmetrico P' del punto $P = (1, 0, 1)$ rispetto alla retta s di equazioni parametriche*

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

Soluzione Abbiamo già visto nell'esercizio 1.25 che la proiezione ortogonale H del punto $P = (1, 0, 1$ su s è $H = (2/3, 1/3, 4/3)$. Allora, da

$$\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P' = H$$

si ricava

$$P' = 2H - P = (1/3, 2/3, 5/3)$$