1. Trovare: (i) la soluzione generale dell'equazione: $y' - 3y = \dfrac{e^{4x}}{e^x + 1}$; (ii) la soluzione soddisfacente $y(0) = 1$.
2. (i) Per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $I_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, dx$ è convergente? (ii) Calcolare, usando la definizione, il valore numerico dell'integrale I_a per $a = 1$.
3. La retta s passa per il punto $O = (0,0,0)$ con vettore di direzione $\mathbf{v} = (1,1,1)$. Tra i punti di s determinare il punto X_0 più vicino al punto $P_0 = (2,-1,1)$.
4. Trovare un'equazione cartesiana del piano $\mathcal{Q}$ che contiene il punto $A = (2,5,1)$ e include la retta $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$.
5. Poniamo: $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^3}{e^{t^4}}\, dt$. Dimostrare che F è pari.
6. Disegnare un grafico di $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^3}{e^{t^4}}\, dt$ che mostri: (a) simmetrie; (b) estremanti; (c) asintoti; (d) pendenza in 0.

Soluzioni

Esercizio 1. Soluzioni.

(i) La soluzione generale dell'equazione: $y' - 3y = \dfrac{e^{4x}}{e^x + 1}$ è

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{3x} + e^{3x} \int e^{-3x} \frac{e^{4x}}{e^x+1}\, dx \\ &= Ce^{3x} + e^{3x} \int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx \\ &= Ce^{3x} + e^{3x} \log_e (e^x + 1) \end{aligned}$$

$C \in \mathbb{R}$.

(ii) la soluzione soddisfacente $y(0) = 1$ si ottiene ponendo $C = 1 - \log_e 2$:

$$(1 - \log_e 2)e^{3x} + e^{3x} \log_e (e^x + 1)$$

ESERCIZIO 2. SOLUZIONI.

Poniamo $f_a(x) = \dfrac{x^a}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

(i) Per $x \to 0^+$, $f_a \sim x^a = \dfrac{1}{x^{-a}}$. Quindi f_a è integrabile in un intorno di $x_0 = 0$ per $-a < 1$, ossia $a > -1$. Per $x \to +\infty$, $f_a \sim \dfrac{1}{x^{3-a}}$, che è integrabile per $3 - a > 1$, ossia $a < 2$. Quindi $I_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_a$ esiste finito per $-1 < a < 2$.

(ii) Per $a = 1$, usando la definizione di integrale generalizzato, si ottiene:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-(1+x^2)^{-1/2}\right]_0^b = 1$$

Esercizio 3. Soluzione.

Il generico punto di s è $X_t = (t, t, t)$. Il punto X_t realizza la minima distanza da $P_0 = (2, -1, 1)$ se e solo se il vettore $X_t - P_0$ è ortogonale a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. Questo avviene se

$$0 = (X_t - P_0) \cdot (1, 1, 1) = (t - 2) + (t + 1) + (t - 1) = 3t - 2$$

che dà $t = 2/3$. Quindi il punto di s a minima distanza da P_0 è $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

ESERCIZIO 4. SOLUZIONE.

Una rappresentazione cartesiana di r (cioè, una rappresentazione di r come intersezione di due piani) è $r : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$

L'equazione del fascio di sostegno r è

$$\lambda(x - 1) + \mu(y + z - 5) = 0$$

Il passaggio per $A = (2, 5, 1)$ impone $\lambda + \mu = 0$. Una soluzione è: $\lambda = 1$, $\mu = -1$. Il piano cercato ha equazione $x - y - z + 4 = 0$.

ESERCIZIO 5. SOLUZIONE.

Dobbiamo dimostrare che $F(-x) = F(x)$. Operiamo il cambio di variabili $t = -u$. Il cambio di variabili nell'integrale definito dà:

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} \frac{t^3}{e^{t^4}}\, dt \\ &= \int_0^{x} \frac{(-u)^3}{e^{u^4}}\, (-du) \\ &= \int_0^{x} \frac{u^3}{e^{u^4}}\, du = F(x) \end{aligned}$$

Abbiamo sostituito $\displaystyle\int_0^{-x}$ con $\displaystyle\int_0^{x}$ e abbiamo sostituito $f(t)\,dt$ con

$$f(-u)\,(-du) = -f(u)\,(-du) = f(u)du$$

(perché f è dispari). Abbiamo allora dimostrato che F è pari.

Esercizio 6. Soluzione.

(a) F è pari. (b) $F'(x) = \dfrac{x^3}{e^{x^4}} > 0$ per ogni $x > 0$. Quindi $F'(0) = 0$, F è crescente su $[0, +\infty)$ (e decrescente su $(-\infty, 0]$). Dunque $x_0 = 0$ è punto di minimo (assoluto).

(c) Si ha definitivamente (per x sufficientemente grande) $\dfrac{x^3}{e^{x^4}} < \dfrac{1}{x^2}$ (perché questo equivale a $\dfrac{x^5}{e^{x^4}} < 1$, che è vero, in quanto $\dfrac{x^5}{e^{x^4}} \to 0$). Quindi, per il criterio del confronto asintotico, esiste finito l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^{t^4}}\, dt$. Questo equivale a dire che esiste finito il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$, cioè che F ha un asintoto $y = K$ ($K > 0$) a $+\infty$. Siccome F è pari, $y = K$ è anche asintoto a $-\infty$.

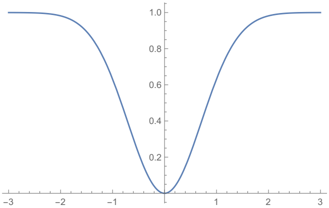

Grafico qualitativo di F