Esercizi di riepilogo

21 Dicembre 2020
23 Dicembre 2020

Esercizio

(a) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{1}$$

(b) Determinare l'intervallo massimale sul quale è definita la soluzione di (1)

Soluzione

(a) $x(t) = \frac{1}{3-t}$

(b) Intervallo massimale: $J = (-\infty, 3)$

Esercizio

1. *Trovare l'integrale generale dell'equazione:*

$$y' + \frac{1}{x+1} y = 0, \qquad x \in (-1, +\infty) \tag{2}$$

2. *Verificare, facendo i conti, che la risposta data è corretta.*

Risposte

Si può vedere come equazioni a variabili separabili, oppure come equazione lineare del primo ordine, omogenea.

1) Integrale generale: $y(x) = C\frac{1}{x+1}, \quad C \in \mathbb{R}$.

2) Verifica della correttezza della risposta. Sostituiamo $y = C\frac{1}{x+1}$, $(C \in \mathbb{R})$, al posto di y in (2). Otteniamo:

$$y' + \frac{1}{x+1}y = -C\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}C\frac{1}{x+1} = 0.$$

Esercizio

Nello spazio affine euclideo $\mathbb{R}^3$, si considerino le due rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases} \tag{3}$$

e

$$s : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Scrivere un'equazione cartesiana di un piano (se esiste) che includa s e sia parallelo a r. Quanti piani di questo tipo esistono?

Soluzione

- Equazione del fascio di sostegno s:

$$\lambda(x+y+z+1)+\mu(2x-y-z)=0$$

cioè, $(\lambda+2\mu)x+(\lambda-\mu)y+(\lambda-\mu)z+\lambda=0$.

- Condizione di parallelismo tra il piano del fascio e $\mathbf{v}=(1,1,2)$:

$$(\lambda+2\mu)\,1+(\lambda-\mu)\,1+(\lambda-\mu)\,2=0, \qquad 4\lambda-\mu=0$$

Ad esempio: $\lambda=1, \mu=4$.

- Piano cercato:

$$9x-3y-3z+1=0$$

Esercizio

Sia C la cubica gobba (twisted cubic)

$$\mathbb{R} \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3, \qquad C(t) = (t, t^2, t^3)$$

1. *Calcolare $C'(t)$, $C''(t)$, $C'(t) \times C''(t)$. Dimostrare che la curva C è biregolare (cioè, C' e C'' non sono mai paralleli).*
2. *Trovare la terna fondamentale $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ in $t = 0$.*
3. *Calcolare la curvatura $\kappa(0)$ in $t = 0$.*
4. *Calcolare la curvatura $\kappa(t)$ in $t \in \mathbb{R}$.*
5. *Trovare le equazioni dei piani $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$, $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$, $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ in $t = 1$.*

Calcoli per la cubica gobba $C(t) = (t, t^2, t^3)$. (Parte 1)

1) $C'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $C''(t) = (0, 2, 6t)$, $C' \times C'' = (6t^2, -6t, 2)$.

$C'(t) \times C''(t) \neq 0$. Quindi C è biregolare.

2) $\mathbf{T}(0) = C'(0)/|C'(0)| = (1, 0, 0)$, $\qquad C''(0) = (0, 2, 0)$.
Siccome $C''(0) \perp C'(0)$, si ha: $\mathbf{N}(0) = C''(0)/|C''(0)| = (0, 1, 0)$.
Quindi $\mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(0) \times \mathbf{N}(0) = (0, 0, 1)$.

Metodo generale (da seguire quando C'' non è ortogonale a C'):
Prima: $\mathbf{B}(0) = \frac{C'(0) \times C''(0)}{|C'(0) \times C''(0)|} = (0, 0, 1)$;
Poi: $\mathbf{N}(0) = \mathbf{B}(0) \times \mathbf{T}(0)$.

3) $\kappa(0) = \frac{|C'(0) \times C''(0)|}{|C'(0)|^3} = \frac{|(1,0,0) \times (0,2,0)|}{|(1,0,0)|} = 2$

4) $\kappa(t) = \frac{|C' \times C''|}{|C'|^3} = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$

Calcoli per la cubica gobba $C(t) = (t, t^2, t^3)$. (Parte 2)

5) Attenzione. I vettori $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ si intendono ora in $t = 1$.

Per trovare i tre piani $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$, $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$, $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ in $C(1) = (1, 1, 1)$, troviamo tre vettori paralleli rispettivamente a $\mathbf{B}$, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$.

a) $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$. Un vettore parallelo a $\mathbf{T}$ è $C'(1) = (1, 2, 3)$. Quindi:
Piano normale $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$: $1(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$

b) $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$. Un vettore parallelo a $\mathbf{B}$ è
$C'(1) \times C''(1) = (1, 2, 3) \times (0, 2, 6) = (6, -6, 2)$. Quindi:
Piano osculatore $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$: $3(x-1) - 3(y-1) + 1(z-1) = 0$

c) $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$. Un vettore parallelo a $\mathbf{N}$ è $\alpha\mathbf{B} \times \beta\mathbf{T}$ $(\alpha, \beta \neq 0)$, ad esempio $(3, -3, 1) \times (1, 2, 3) = (-11, 8, 9)$.
Piano rettificante $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$: $-11(x-1) - 8(y-1) + 9(z-1) = 0$.

Esercizio

Trovare il polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine due in $x_0 = 0$ *(e il grafico qualitativo vicino a zero) della soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' - y = x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

senza trovare prima esplicitamente tale soluzione.

Soluzione. Per la condizione iniziale abbiamo: $y(0) = 1$.
Da $y' - y = x + 1$ segue: $y'(0) = y(0) + 0 + 1 = 2$.
Da $y' - y = x + 1$ segue: $y'' = y' + 1$, e quindi
$y''(0) = y'(0) + 1 = 2 + 1 = 3$.
Quindi il polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine due in zero è

$$1 + 2x + \frac{3}{2}x^2$$

Esercizio

Si consideri l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

($a \geq b > 0$) parametrizzata come

$$[0, 2\pi] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2, \qquad C(t) = (x(t), y(t)) \tag{5}$$

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}$$

(a) Dimostrare che la curvatura è data da

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

(b) Quali sono i punti sull'ellisse di minima e di massima curvatura?

Soluzione. (a) $C'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$, $C''(t) = (-a\cos t, -b\sin t)$. La curvatura è

$$k(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

(b) I punti t di minimo per la funzione $\kappa(t)$ sono i punti di massimo di

$$(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t) = (a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2$$

ossia i punti di massimo di $\sin^2 t$, che ovviamente sono $t = \pi/2$, $t = -\pi/2$. E $\kappa(t)$ assume il valore massimo se $\sin^2 t$ è minimo, cioè se $t = 0$ oppure $t = \pi$. I punti di curvatura minima e massima sono dunque i vertici dell'ellisse, cioè le intersezioni dell'ellisse con gli assi di simmetria.

Esercizio

Stabilire se è convergente l'integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+(t+t^2)^{7/2}}\, dt$$

Soluzione

Su ogni intervallo $[0, b]$ $(b > 0)$ la funzione $\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+(t+t^2)^{7/2}}$ è Riemann-integrabile. Resta da studiare l'integabilità a $+\infty$. Per $t \to +\infty$,

$$\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+(t+t^2)^{7/2}} \sim \frac{t}{t^7} \sim \frac{1}{t^6}$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la funzione $\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+(t+t^2)^{7/2}}$ è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $(0, +\infty)$, ossia l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+(t+t^2)^{7/2}}\, dt$ è convergente.

Esercizio

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_C \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2}\, ds \tag{6}$$

dove C è l'ellisse di equazione cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Risposta. Parametrizzazione: $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.
$ds = \left(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\right)\, dt$. L'integrale (6) è uguale a:
$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{ba\cos t}{a}\right)^2 + \left(\frac{ab\sin t}{b}\right)^2}\, \left(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\right)\, dt$
$= \int_0^{2\pi} \left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)\, dt = a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\, dt + b^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\, dt$
$= (a^2 + b^2)\pi$

Esercizio

Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\,dx \tag{7}$$

Soluzione

Poiché $0 < \frac{1}{\sqrt{x+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, l'integrale (7) converge per il criterio del confronto. Oppure: $\frac{1}{\sqrt{x+x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, per $x \to 0^+$, e quindi l'integrale (7) converge per il criterio del confronto asintotico.

Esercizio

1) Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx \tag{8}$$

Calcolare il valore numerico dell'integrale (8).

Soluzione

1) Converge, perché (ad esempio) $xe^{-x} < 1/x^2$ (per x grande).

2) Integrando per parti: $\int xe^{-x}\,dx = -e^{-x}(x+1) + C$. Quindi

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^b = 1$$

Esercizio

Dire se sono convergenti i seguenti integrali:

1. $\int_2^{+\infty} x^2 \sin \frac{1}{x^2}\, dx$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\, dx$

Risposte

1) Non converge, perché $x^2 \sin \frac{1}{x^2} \to 1$, per $x \to +\infty$.

2) Per $x \in (1, +\infty)$,

$$\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} \right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

Poiché $\frac{1}{x^{3/2}}$ è integrabile su $(1, +\infty)$, anche l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\, dx$ converge, per il criterio del confronto.

Esercizio

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' - 2x = 7e^{2t} \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

Risposte.

Soluzione generale: $Ce^{2t} + e^{2t} \int e^{-2t} 7e^{2t}\, dt = Ce^{2t} + 7te^{2t}$

Soluzione del problema di Cauchy: $e^{2t}(3 + 7t)$

Esercizio

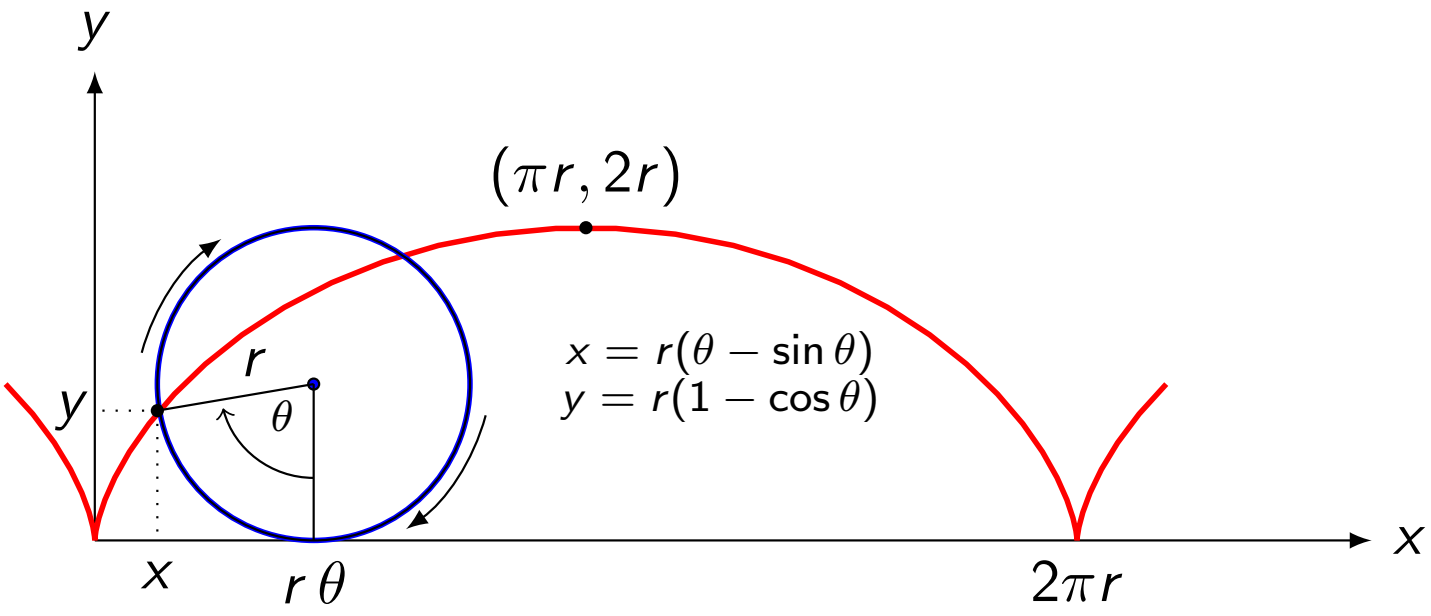
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 4y = x + 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Risposte.

Soluzione generale: $c_1 e^{-4x} + \frac{x}{4} + \frac{7}{16}$

Soluzione del problema di Cauchy: $-\frac{7}{16} e^{-4x} + \frac{x}{4} + \frac{7}{16}$



Esercizio

Calcolare la lunghezza dell'arco di cicloide

$$[0, 2\pi] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2, \qquad C(\vartheta) = (r(\vartheta - \sin\vartheta), r(1 - \cos\vartheta))$$

RISPOSTA Lunghezza dell'arco di cicloide: $8r$.

Esercizio

Trovare le coordinate del baricentro della semicirconferenza γ di equazioni parametriche:

$$x(t) = R\cos t, \qquad y(t) = R\sin t, \qquad t \in [0, \pi] \tag{9}$$

Soluzione

Per motivi di simmetria, il baricentro si deve trovare sull'asse y. Le sue coordinate $(\overline{x}, \overline{y})$ sono date, per definizione, da:

$$\overline{x} = \frac{1}{L}\int_\gamma x\, ds, \qquad \overline{y} = \frac{1}{L}\int_\gamma y\, ds$$

dove L è la lunghezza della curva. Nel nostro caso $L = \pi R$ e $ds = R\, dt$. Quindi:

$$\overline{x} = \frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R\cos t\, R\, dt = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \cos t\, dt = 0$$

$$\overline{y} = \frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R\sin t\, R\, dt = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \sin t\, dt = \frac{2}{\pi}R$$