1. Definiamo: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.
   (a) Trovare l'asintoto di f a $+\infty$, se esiste.
   (b) Trovare (eventuali) punti di massimo e di minimo locale.
   (c) Stabilire se esiste l'integrale generalizzato $\int_0^1 xe^{\frac{1}{x}}\, dx$.
2. (d) Trovare $c \in \mathbb{R}$ (se esiste) per il quale risulti continua la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} xe^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

3. (e) Trovare la soluzione y^* del problema di Cauchy $y' = 2xy^2, \;\; y(0) = 1$.
   (f) Determinare l'intervallo massimale J sul quale è definita la soluzione y^*.
   (g) La soluzione y^* è integrabile in senso generalizzato su J?
4. (h) Determinare la somma della radici complesse dell'equazione: $z^3 = 1$.

Soluzioni

1.(a) Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim x \to +\infty$. Inoltre, per $x \to +\infty$, si ha: $f(x)/x = e^{\frac{1}{x}} \to 1$ e $(f(x) - x) \to 1$. Quindi, $y = x + 1$ è asintoto obliquo a $+\infty$.

1.(b) Per ogni x nel dominio di f, $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x}$. Allora $x_0 = 1$ è punto di minimo locale. (Non ci sono altri punti di massimo o minimo locale per f, perché, per il teorema di Fermat, in tali punti la derivata si deve annullare).

1.(c) In un intorno destro di 0 si ha $xe^{\frac{1}{x}} > 1/x$. Infatti, tale disuguaglianza equivale a $x^2 e^{\frac{1}{x}} > 1$, ossia (posto $1/x = t$) $(e^t/t^2) > 1$, e quest'ultima disuguaglianza è vera, in quanto $e^t/t^2 \to +\infty$ per $t \to 0$. Allora, per il criterio del confronto, f non è integrabile in un intorno destro di 0, e quindi non è integrabile in $(0, 1)$.

1.(d) Per $x \to 0^+$, $g(x) \sim x \exp(\frac{\pi}{2}) \to 0$; per $x \to 0^-$, $g(x) \sim x \exp(-\frac{\pi}{2}) \to 0$. Quindi, per $x \to 0$, $g(x) \to 0$. Pertanto, g risulta continua se $c = 0$.

1.(e) Separando le variabili, $dy/y^2 = 2x\,dx$, $-1/y = x^2 + C$. La condizione $y(0) = 1$ impone $y^*(x) = 1/(1 - x^2)$.

1.(f) L'intervallo massimale contenente 0 sul quale è definita la soluzione $y^*(x) = 1/(1 - x^2)$ è $J = (-1, 1)$.

1.(g) y^* non è limitata su $(-1, 1)$. Per $x \to -1$, $y^*(x) \sim 1/2(1 + x)$, quindi y^* non è integrabile in un intorno destro di -1. (Analogamente, y^* non è integrabile in un intorno sinistro di 1). Quindi, y^* non è integrabile su J.

1.(h) La somma delle radici è: $1 + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$.