Politecnico di Milano. Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria

Esercitazioni di ripasso su integrali e equazioni differenziali
19, 20 Dicembre 2019

Indice

1 Integrali impropri

1.1 Esercizi

Esercizio 1.1. *Studiare la convergenza dell'integrale*

$$\int_0^3 \frac{1}{9-x^2}\,dx \tag{1}$$

Soluzione. La funzione integranda $\dfrac{1}{9-x^2}$ non è limitata in un intorno sinistro del punto $b = 3$. In un intorno sinistro di $b = 3$, per $x \to 3^-$ (cioè, con $x < 3$), vale l'equivalenza asintotica:

$$\frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{(3-x)(3+x)} \sim \frac{1}{6(3-x)}$$

Quindi, l'integrale $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{9-x^2}\,dx$ non converge (diverge a $+\infty$).

Esercizio 1.2. *Studiare la convergenza dell'integrale*

$$\int_{-3}^0 \frac{1}{9-x^2}\,dx \tag{2}$$

Soluzione. La funzione integranda $\dfrac{1}{9-x^2}$ non è limitata in un intorno destro del punto $a = -3$. In un intorno destro di $a = -3$, per $x \to -3^+$ (cioè, con $x > -3$), vale l'equivalenza asintotica:

$$\frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{(3-x)(3+x)} \sim \frac{1}{6(3+x)}$$

Quindi, l'integrale $\displaystyle\int_{-3}^0 \frac{1}{9-x^2}\,dx$ non converge (diverge a $+\infty$).

Esercizio 1.3. *Studiare la convergenza dell'integrale*

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{(9-x^2)^p}\,dx \tag{3}$$

$p \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Valgono le equivalenze asintotiche:

$$\frac{1}{(9-x^2)^p} \sim \frac{1}{6^p(3-x)^p} \qquad x \to 3^-$$
$$\frac{1}{(9-x^2)^p} \sim \frac{1}{6^p(3+x)^p} \qquad x \to -3^+$$

Allora, in un intorno destro di $a = -3$, per il criterio del confronto asintotico, la funzione integranda $\dfrac{1}{(9-x^2)^p}$ è integrabile se, e solo se, $p < 1$. Per lo stesso criterio, in un intorno sinstro di $a = 3$ la funzione integranda $\dfrac{1}{(9-x^2)^p}$ è integrabile se, e solo se, $p < 1$. Ne segue che l'integrale $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{1}{(9-x^2)^p}\, dx$ è convergente se, e solo se, $p < 1$.

Esercizio 1.4. *Usando la definizione di integrale improprio, calcolare*

$$\int_0^1 \ln x \, dx \tag{4}$$

Soluzione. Troviamo dapprima una primitiva di $\ln x$ sull'intervallo $(0,1)$. Integrando per parti,

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

Allora,

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[x \ln x - x\right]_\varepsilon^1 = -1$$

Esercizio 1.5. *Stabilire se sia convergente o meno l'integrale*

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2-9}\, dx \tag{5}$$

Prima soluzione. La funzione integranda $\dfrac{x}{x^2-9}$ ha un asintoto verticale per $x \to 3^-$. Per $x \to 3^-$, si ha:

$$\frac{x}{x^2-9} = \frac{x}{(x-3)(x+3)} \sim \frac{3}{(x-3)6} = \frac{1}{2(x-3)}$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale non è convergente.

Seconda soluzione. Una primitiva di $\dfrac{x}{x^2-9}$ sull'intervallo $(0,3)$ è $\dfrac{1}{2}\ln(9-x^2)$. Allora, per la definizione di integrale improprio,

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2-9}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{2}\ln(9-x^2)\right]_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(9-(3-\varepsilon)^2) - \ln 9\right) = -\infty$$

Quindi l'integrale diverge a $-\infty$.

Esercizio 1.6. *Stabilire se l'integrale*

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

esiste finito. In caso affermativo, calcolarne il valore.

Soluzione. Per $x \to 2^-$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{(2-x)^{1/2}}$$

e quindi l'intergrale è convergente. Con la sostituzione $2 - x = u$, $dx = -du$, abbiamo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \int \frac{1}{u}\,(-du) = -2\sqrt{u} + C = -2\sqrt{2-x} + C$$

Allora,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx &= \lim_{a\to 2^-} \int_1^a \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx \\ &= \lim_{a\to 2^-} -2\sqrt{2-x}\Big|_1^a \\ &= 2\end{aligned}$$

Esercizio 1.7. *Stabilire se l'integrale improprio*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{(x^2)\arctan\sqrt{x}}\,dx$$

è convergente.

Soluzione. Per $x \to 0^+$, $\dfrac{\sin^2 x}{x^2} \to 1$ e $\arctan\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$. Quindi, per $x \to 0^+$,

$$\frac{\sin^2 x}{(x^2)\arctan\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Dunque $\dfrac{\sin^2 x}{(x^2)\arctan\sqrt{x}}$ è integrabile in un intorno destro di 0 (per il criterio del confronto asintotico).

Per ogni x, la funzione integranda $\dfrac{\sin^2 x}{(x^2)\arctan\sqrt{x}}$ è positiva o nulla e, per $x \to +\infty$, si ha

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{(x^2)\arctan\sqrt{x}} \leq \frac{1}{(x^2)\arctan\sqrt{x}} \sim \frac{1}{(\pi/2)(x^2)}$$

Quindi $\dfrac{\sin^2 x}{(x^2)\arctan\sqrt{x}}$ è integrabile anche in un intorno di $+\infty$ (per il criterio del confronto e del confronto asintotico).

In conclusione, l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{(x^2)\arctan\sqrt{x}}\,dx$ è convergente, cioè esiste finito.

Esercizio 1.8. *Stabilire se l'integrale improprio*

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x^2}\,dx$$

è convergente.

Soluzione. Sull'intervallo $(-\infty,-1)$ la funzione integranda $\dfrac{e^x}{x^2}$ è continua e limitata (non ha asintoti verticali) e $e^x < 1$. Quindi

$$0 < \frac{e^x}{x^2} < \frac{1}{x^2}$$

Allora, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x^2}\,dx$ converge.

Esercizio 1.9. *Stabilire se l'integrale improprio*

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2\ln(1+\sqrt{x})}\,dx.$$

esiste finito.

Soluzione. Per $x \to 0^+$,

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \sim \frac{1}{2}, \qquad \ln(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$$

e dunque

$$\frac{1-\cos x}{x^2\ln(1+\sqrt{x})} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

In un intorno destro di $x_0 = 0$, l'integrale di $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ è convergente. Ne segue, per il criterio del confronto asintotico, che l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2\ln(1+\sqrt{x})}\,dx$ è convergente.

2 Equazioni differenziali del primo ordine

2.1 Esercizi

Esercizio 2.1. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \dfrac{x}{x^2-1}y = \dfrac{1}{3}x \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{6}$$

Specificare qual è l'intervallo massimale sul quale la soluzione del problema di Cauchy (6) *è definita.*

Soluzione. L'equazione è lineare del primo ordine, non omogenea. Il coefficiente $a(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ è definito sull'unione di tre intervalli:

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

Il termine a secondo membro $f(x) = \dfrac{1}{3}x$ è definito su tutto $\mathbb{R}$. Quindi, *il più grande intervallo contenente* $x_0 = 0$ (si veda la condizione iniziale del problema di Cauchy) *sul quale sono definite sia* $a(x)$ *sia* $f(x)$ *è l'intervallo* $J = (-1, 1)$. Quindi, dobbiamo fare i conti *restringendoci all'intervallo* $(-1, 1)$.

Fatto importante. Poiché l'equazione è *lineare* e *l'intervallo massimale sul quale sono definiti entrambi i dati* del problema di Cauchy $a(x)$ e $f(x)$ è $J = (-1, 1)$, allora *l'intervallo massimale sul quale è definita la soluzione (unica) del problema di Cauchy è tutto* $J = (-1, 1)$.

Questo fatto segue dall'espressione esplicita delle soluzioni dell'equazione lineare. (Si ricordi che questo fatto *non è più garantito per le equazioni separabili non lineari*).

A questo punto si procede usando la formula per trovare la *soluzione generale sull'intervallo* $(-1, 1)$, dipendente da una costante arbitraria $C \in \mathbb{R}$. Infine, si determina la costante C in modo che sia soddisfatta la condizione iniziale di Cauchy.

Da $a(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ segue che una primitiva $A(x)$ di $a(x)$ sull'intervallo $(-1, 1)$ è

$$A(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

Controllo: $D\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(-2x)}{1-x^2} = \dfrac{x}{x^2-1}$.

L'espressione della soluzione generale è

$$Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int e^{A(x)}f(x)\,dx \qquad C \in \mathbb{R}$$

Nel nostro caso, abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int \sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{3}x\,dx &= \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(-\frac{1}{9}(1-x^2)^{3/2}\right) \\ &= \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{9}(1-x^2) \end{aligned}$$

La condizione iniziale impone $C = \dfrac{10}{9}$.

Esercizio 2.2. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2}{x} y = \sqrt{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Specificare qual è l'intervallo massimale sul quale la soluzione del problema di Cauchy (6) *è definita.*

Soluzione. È un'equazione lineare del primo ordine, non omogenea. I coefficienti $a(x) = 2/x$ e $f(x) = \sqrt{x}$ sono definiti rispettivamente sull'unione di due intervalli $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e su $[0, +\infty)$. Quindi l'intervallo massimale che contiene il punto $x_0 = 1$ che figura nella condizione iniziale ($y(1) = 0$) è l'intervallo $(0, +\infty)$. Quindi (essendo l'equazione lineare) $(0, +\infty)$ è anche l'intervallo massimale sul quale è definita la soluzione (unica) del problema di Cauchy.

Restringiamoci allora all'intervallo massimale $(0, +\infty)$. Poiché una primitiva di $a(x) = 2/x$ su $(0, +\infty)$ è $A(x) = 2 \ln x$, la soluzione generale su $(0, +\infty)$ è data da:

$$\frac{C}{x^2} + \frac{1}{x^2} \int x^2 \sqrt{x}\, dx = \frac{C}{x^2} + \frac{2}{7} x^{3/2}$$

La soluzione soddisfacente $y(1) = 0$ è

$$-\frac{2}{7x^2} + \frac{2}{7} x^{3/2}$$

definita sull'intervallo massimale $(0, +\infty)$.

Esercizio 2.3. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = x^2 y^3 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

specificando qual è il massimo intervallo sul quale la soluzione è definita.

Soluzione. Si tratta di un'equazione separabile (non lineare). L'equazione $y' = x^2 y^3$ ha la soluzione costante $y = 0$, che però non è soluzione del problema di Cauchy (non soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 3$).

Scartata la soluzione $y = 0$, separando le variabili, otteniamo

$$\frac{dy}{y^3} = x^2\, dx$$

Allora $\displaystyle\int \frac{dy}{y^3} = \int x^2\,dx$, e quindi

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{3}x^3 + C \tag{8}$$

La condizione $y(1) = 3$ dà $-1/18 = 1/3 + C$, da cui $C = -7/18$. Sostituendo questo valore di C nell'equazione (8), otteniamo la soluzione

$$y(x) = \frac{3}{\sqrt{7 - 6x^3}} \tag{9}$$

Si noti che la condizione $y(1) = 3$ impone la scelta del segno + davanti alla radice. L'intervallo massimale sul quale è definita la soluzione del problema di Cauchy è il più grande intervallo sul quale il radicando $7 - 6x^3$ è positivo, cioè $\left(-\infty, \sqrt[3]{7/6}\right)$.

3 Esercizi vari. Ripasso.

3.1 Esercizi

Esercizio 3.1. *Risolvere la seguente* equazione integrale*:*

$$f(x) = 2 + \int_1^x f(t)\, dt \tag{10}$$

Quante sono le soluzioni?

(*Suggerimento:* Derivare primo e secondo membro.)
Risposta. C'è un'unica soluzione: $f(x) = 2e^{x-1}$.

Esercizio 3.2. *Calcolare l'integrale*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\, dx$$

Soluzione. Poniamo $u = \sqrt{x} + 1$. Allora $x = (u-1)^2$ e $dx = 2(u-1)\, du$. Dunque:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\, dx = \int \frac{1}{(u-1)u} 2(u-1)\, du = 2\ln|u| + C = 2\ln|\sqrt{x}+1| + C$$

Esercizio 3.3. *Calcolare l'integrale*

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\, dx$$

Soluzione.

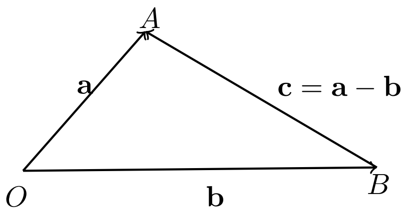
$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C$$

Esercizio 3.4. *Calcolare l'integrale*

$$\int \frac{1}{x^2+9}\, dx$$

Soluzione.
$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$$

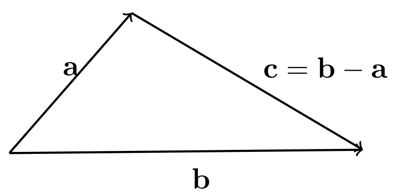
Esercizio 3.5. *Dimostrare il* Teorema di Carnot*: in un triangolo i cui lati sono lunghi a, b, c,*
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta$$
dove ϑ è l'angolo tra il lato a e il lato b. In particolare, vale il Teorema di Pitagora*: In un triangolo rettangolo di catti a e b e ipotenusa ϑ,*
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Soluzione. Chiamiamo O, A, B i vertici del triangolo. Fissiamo O come origine e Descriviamo il triangolo con tre vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. I quadrati delle lunghezze dei lati sono
$$a^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}, \qquad b^2 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}, \qquad c^2 = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c},$$
Usando le proprietà di bilinearità e simmetria del prodotto scalare, otteniamo:
$$\begin{aligned} c^2 &= \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta \end{aligned} \tag{11}$$

Esercizio 3.6. *In un triangolo, il segmento che congiunge i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato ed è la metà di quest'ultimo.*

Soluzione. Con riferimento alla figura, i due punti medi sono $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ e $\frac{1}{2}\mathbf{b}$. La loro differenza è $\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, cioè un vettore parallelo a $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ e lungo la metà.



Esercizio 3.7 (Teorema di Varignon)**.** *I punti medi dei lati di un quadrilatero qualunque, sono vertici di un parallelogramma.*

Soluzione. Segue facilmente dall'esercizio precedente. Perché? (*Suggerimento.* Si conduca una diagonale.)