Politecnico di Milano. Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria

Esercitazioni su calcolo integrale e equazioni separabili.
21, 22 Novembre 2019

Indice

1 Calcolo di integrali.

1.1 Integrazione per parti

Esercizio 1.1. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti:*

1. $\int 3e^{5x-1}\,dx$
2. $\int \frac{x^3}{(x^4+5)^{\frac{7}{2}}}\,dx$
3. $\int x\cos(3x^2+1)\,dx$
4. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$
5. $\int e^{7x}\cos e^{7x}\,dx$
6. $\int xe^{-x^2}\,dx$
7. $\int \frac{2x+3}{2x^2+6x}\,dx$

Risposte.

1. $\frac{3}{5}e^{5x-1}+c.$
2. $-\frac{1}{10}(x^4+5)^{-\frac{5}{2}}+c.$
3. $\frac{1}{6}\sin(3x^2+1)+c.$
4. $\frac{\ln^3 x}{3}+c.$
5. $\frac{1}{7}\sin e^{7x}+c.$
6. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c.$
7. $\ln|2x^2+6x|+c.$

Esercizio 1.2. *Usare il metodo di integrazione per parti per calcolare i seguenti integrali:*

1. $\int \ln x \, dx$
2. $\int x^2 \sin x \, dx$
3. $\int x \arctan x \, dx \quad (\arctan = \tan^{-1})$
4. $\int \arcsin x \, dx \quad (\arcsin = \sin^{-1})$

Risposte.

Usiamo la formula di integrazione per parti. In breve:

$$\int f \, dg = fg - \int g \, df$$

(a) $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

(b) Poniamo: $f = x^2$; $dg = \sin x \, dx$; $df = 2x \, dx$; $g = -\cos x$.

Si trova:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x \, dx &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right) \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c \end{aligned}$$

(c) Poniamo: $f = \arctan x$; $dg = x \, dx$. $df = \dfrac{1}{1+x^2} \, dx$; $g = \dfrac{1}{2} x^2$.

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(d) Poniamo: $f = \arcsin x$; $dg = 1 \, dx$. Allora: $df = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$; $g = x$.

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$$

1.2 Integrali calcolati usando i numeri complessi

1.2.1 Derivata di una funzione $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ (variabile reale, valori complessi)

Abbiamo già visto la definizione di *derivata di una funzione a valori vettoriali* (a valori in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$). Ricordiamo che, data una curva piana parametrizzata $\mathbb{R} \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2$, la derivata $C'(t)$, $t \in \mathbb{R}$, è il limite (quando esso esista) del rapporto incrementale:

$$C'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(C(t+h) - C(t))$$

Dunque $C'(t) \in \mathbb{R}^2$ (vettore tangente in t, o velocità istantanea in t). Se $C(t) = (C_1(t), C_2(t))$, allora C è derivabile se, e solo se, C_1 e C_2 sono derivabili. In tal caso, si ha

$$C'(t) = (C_1'(t), C_2'(t))$$

La derivata di una funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ si definisce nello stesso modo:

$$F'(t) = \frac{1}{h}(F(t+h) - F(t))$$

Si può vedere come la derivata di una funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$, perché $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (In termini più precisi, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ sono isomorfi come spazi vettoriali reali).

La derivata di una funzione a valori complessi ha allora come parte reale la derivata della parte reale e come parte immaginaria la derivata della parte immaginaria. Ad esempio, consideriamo la funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{C}, \qquad F(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Si ha

$$De^{it} = -\sin t + i\cos t = ie^{it}$$

Più in generale, se $a, b \in \mathbb{R}$,

$$De^{(a+ib)t} = (a+ib)e^{(a+ib)t}$$

1.2.2 Un esempio di calcolo di integrali con i numeri complessi

---

Esercizio 1.3. *Usando i numeri complessi, verificare che valgono le uguaglianze seguenti (in cui le costanti arbitrarie additive sono omesse):*

$$\boxed{\int e^{at}\cos(bt)\,dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}[a\cos(bt) + b\sin(bt)]} \tag{1}$$

$$\boxed{\int e^{at}\sin(bt)\,dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}[a\sin(bt) - b\cos(bt)]} \tag{2}$$

($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$). (Allo stesso risultato si giunge, in modo un po' più laborioso, integrando per parti).

Soluzione. Partiamo dall'uguaglianza

$$\int e^{(a+ib)t}\,dt = \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)t}$$

Il significato di questa uguaglianza è ovvio: le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ la cui derivata è $e^{(a+ib)t}$ sono esattamente le funzioni $t \mapsto \dfrac{1}{a+ib}e^{(a+ib)t} + c$, dove $c = (c_1, c_2)$ è una costante complessa arbitraria. Abbiamo allora, facendo i conti con i numeri complessi:

$$\begin{aligned}
\int e^{at}\cos bt\,dt + i\int e^{at}\sin bt\,dt &= \int e^{at}(\cos bt + i\sin bt)\,dt = \int e^{(a+ib)t}\,dt \\
&= \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)t} \\
&= \frac{a-ib}{a-ib}\cdot\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)t} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)t} \\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-ib)(\cos(bt) + i\sin(bt)) \\
&= \frac{e^{at}}{a^2+b^2}\left[(a\cos(bt) + b\sin(bt)) + i(a\sin(bt) - b\cos(bt))\right] \\
&= \frac{e^{at}}{a^2+b^2}\left[a\cos(bt) + b\sin(bt)\right] + i\frac{e^{at}}{a^2+b^2}\left[a\sin(bt) - b\cos(bt)\right]
\end{aligned}$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie si ottengono gli integrali (1) e (2).

1.3 Integrali per sostituzione

1.3.1 Richiamo teorico: Cambio di Variabile negli integrali definiti

Teorema 1.4. *Siano dati:*

$$\begin{tikzcd}
[\alpha, \beta] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "f \circ \varphi"'] & {[a, b]} \arrow[d, "f"] \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

- *Una funzione continua* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$*;*
- *Un cambio di parametro* $[\alpha, \beta] \xrightarrow{\varphi} [a, b]$ *derivabile,* $\vartheta \longmapsto \varphi(\vartheta) = x$*. Supponiamo:* $\varphi(\alpha) = a, \;\; \varphi(\beta) = b$

Allora

$$\int_\alpha^\beta (f(\varphi(\vartheta))\varphi'(\vartheta)\, d\vartheta = \int_a^b f(x)\, dx$$

Dimostrazione Sia F una primitiva di f: $\quad F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b]$. Allora

$$\frac{d}{d\vartheta} F(\varphi(\vartheta)) = F'\left(\varphi(\vartheta)\right)\, \varphi'(\vartheta) = f\left(\varphi(\vartheta)\right)\, \varphi'(\vartheta)$$

Dunque $F\left(\varphi(\vartheta)\right)$ è una primitiva di $f\left(\varphi(\vartheta)\right)\, \varphi'(\vartheta)$. Allora:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (f(\varphi(\vartheta))\varphi'(\vartheta)\, d\vartheta &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\
&= F(b) - F(a) \\
&= \int_a^b f(x)\, dx \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx
\end{aligned}$$

Esercizio 1.5. *Calcolare:*

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Soluzione Poniamo: $x = \sin\vartheta = \varphi(\vartheta)$. Siccome l'intervallo di integrazione su cui varia x è $0 \leq x \leq 1$, l'intervallo su cui varia ϑ è $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$. Il differenziale dx si trasforma in $dx = \varphi'(\vartheta)\, d\vartheta = \cos\vartheta\, d\vartheta$. Allora

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\vartheta}\, \cos\vartheta\, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\, d\vartheta$$

Poiché una primitiva di $\cos^2\vartheta$ è

$$\int \cos^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta),$$

si ha

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}\left[\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta\right]_0^{\pi/2} = \pi/4$$

Esercizio 1.6. *Calcolare*

$$\int_1^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x)-4)}\, dx$$

Soluzione Poniamo $\ln(x) - 4 = t$. Allora $x = e^{t+4}$ e $dx = e^{t+4}dt$. Allora:

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x)-4)}\, dx &= \int_{-4}^{-2} \frac{1}{t}\, dt \\ &= [\ln(-t)]_{-4}^{-2} \\ &= -\ln 2 \end{aligned}$$

1.4 Integrali generalizzati

Esercizio 1.7. *Utilizzando opportuni criteri, stabilire se i seguenti integrali generalizzati convergono o meno, senza calcolarli. Calcolare poi questi due integrali usando la definizione di integrale generalizzato.*

1.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

2.
$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}\,(2x+1)}\,dx$$

Soluzione.
1. Per $x \to +\infty$,
$$\frac{\arctan x}{1+x^2} \sim \frac{\pi/2}{x^2}$$
Quindi l'integrale converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{2}(\arctan x)^2\right]_0^b = \frac{\pi^2}{8}$$

2. Per $x \to +\infty$,
$$\frac{1}{\sqrt{2x}\,(2x+1)} \sim \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{x^{3/2}}$$
Quindi l'integrale converge.

Calcoliamo ora l'integrale usando la definizione. Con la sostituzione $\sqrt{2x} = t$, otteniamo
$$2x = t^2, \qquad 2dx = 2t\,dt$$
Quindi
$$\int \frac{1}{\sqrt{2x}\,(2x+1)}\,dx = \int \frac{t}{t\,(t^2+1)}\,dt = \arctan t + c = \arctan\left(\sqrt{2x}\right) + c$$
con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Allora:
$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}\,(2x+1)}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_{1/2}^b \frac{1}{\sqrt{2x}\,(2x+1)}\,dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left[\arctan\sqrt{2x}\right]_{1/2}^b \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Esercizio 1.8. *Usando opportuni criteri, stabilire se l'integrale seguente converge (senza calcolarne il valore numerico):*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}\,(x-4)}\,dx \tag{3}$$

Soluzione.

Il punto critico è lo studio della convergenza in un intorno di $x_0 = 0$. In un intorno destro di $x_0 = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}\,(x-4)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}\,(-4)}$$

Quindi l'integrale converge in un intorno destro di $x_0 = 0$, per il criterio del confronto asintotico. Analogamente, in un intorno sinistro di $x_0 = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}\,(x-4)} \sim \frac{1}{\sqrt{-x}\,(-4)}$$

e quindi l'integrale converge anche in un intorno sinistro di $x_0 = 0$. Quindi l'integrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}\,(x-4)}\,dx$$

converge.

Esercizio 1.9. *Utilizzando la definizione di integrale generalizzato, calcolare l'integrale:*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}\,(x-4)}\,dx \tag{4}$$

Soluzione. Il calcolo è un po' laborioso. Diamo una traccia della soluzione.

(a) Se $x > 0$, dobbiamo calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-4)}\,dx$$

Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$, $dx = t\,dt$ si trova

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-4)}\,dx &= 2\int \frac{1}{(t-2)(t+2)}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right| + c
\end{aligned}$$

Si trova allora:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-4)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln 3$$

(b) Se $x < 0$, l'integrale da calcolare è

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x}\,(x-4)}\,dx$$

Con la sostituzione $\sqrt{-x} = t$, $dx = t\,dt$ si trova

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{-x}\,(x-4)}\,dx &= 2\int \frac{1}{t^2+4}\,dt \\
&= \arctan\frac{t}{2} + c \\
&= \arctan\frac{\sqrt{-x}}{2} + c
\end{aligned}$$

Allora

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}\,(x-4)}\,dx = -\arctan\frac{1}{2}$$

in conclusione,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}\,(x-4)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln 3 - \arctan\frac{1}{2}$$

2 Equazioni separabili

2.1 Equazioni separabili, problemi di Cauchy, soluzioni massimali

Esercizio 2.1. *Dimostrare che la soluzione generale dell'equazione*

$$y' + a(x)\,y = 0 \tag{5}$$

dove $a(x)$ *è una funzione continua su un intervallo* I *è*

$$c\,e^{-A(x)}, \qquad c \in \mathbb{R} \tag{6}$$

dove $A(x)$ *è una (qualunque) antiderivata di* $a(x)$ *sull'intervallo* I*.*

Soluzione. Si tratta di un'equazione a variabili separabili. (È anche un'equazione lineare del primo ordine omogenea). Cerchiamo dapprima le (eventuali) soluzioni costanti. Nel nostro caso, l'unica soluzione costante (o di equilibrio) è $y = 0$. Cerchiamo ora le altre soluzioni. Con la tecnica della separazione delle variabili, otteniamo

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -a(x)\,dx$$

Restringiamoci a un intervallo che non contenga l'origine. Allora

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Quindi otteniamo

$$\ln|y| = -A(x) + c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

dove $A(x)$ è una (qualunque) antiderivata di $a(x)$ sull'intervallo I. Allora, passando agli esponenziali,

$$|y| = e^{c_1}e^{-A(x)}, \qquad y = \pm e^{c_1}e^{-A(x)} = K\,e^{-A(x)}$$

dove $\pm e^{c_1} = K$. Qui K è un numero non nullo (perché il suo valore assoluto è un esponenziale). Ma l'espressione $K\,e^{-A(x)}$ fornisce una soluzione anche per $K = 0$: la soluzione nulla che abbiamo già trovato. Quindi l'espressione che descrive l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione $y' + a(x)\,y = 0$, cioè la sua soluzione generale, è

$$K\,e^{-A(x)}$$

con $K \in \mathbb{R}$. Si noti che in questo caso (e sempre nel caso di equazioni lineari), le soluzioni sono definite su tutto l'intervallo I sul quale è definita la funzione assegnata $a(x)$ (dato del problema).

Esercizio 2.2. *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y' + \sin(x)y = 0 \tag{7}$$

Risposta. La soluzione generale è

$$c\, e^{\cos(x)}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Le soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.3. *Risolvere l'equazione*

$$x' = 4t\, x$$

(dove l'incognita è la funzione $x = x(t)$).

Risposta. ce^{2t^2}, $\quad c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.4. *Trovare la soluzione massimale del problema di Cauchy (problema ai valori iniziali)*

$$\begin{cases} y' = (2x-4)e^{-y} \\ y(5) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Soluzione. L'equazione è del tipo $y' = g(x)h(y)$, con g di classe C^0 e h di classe C^1; quindi, per il teorema di esistenza e unicità locale, il problema di Cauchy ha un'unica soluzione massimale (cioè, definita su un intervallo massimale contenente $x_0 = 5$). Con il metodo di separazione delle variabili, otteniamo

$$\int e^y\, dy = \int (2x-4)\, dx$$

e quindi

$$e^y = x^2 - 4x + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

La condizione iniziale $y(5) = 0$ impone $e^0 = 5^2 - 4 \cdot 5 + c$, ossia $c = -4$. Dunque,

$$e^y = x^2 - 4x - 4$$

Questa è la soluzione in forma implicita. Per trovare la forma esplicita e l'intervallo massimale di definizione, scriviamo

$$y = \ln(x^2 - 4x - 4)$$

Questa espressione è definita solo se $x^2 - 4x - 4 > 0$, cioè solo se x appartiene all'unione

$$(-\infty, 2 - 2\sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$$

Il punto $x_0 = 5$ appartiene al secondo intervallo: $x \in (2+2\sqrt{2}, +\infty)$. Dunque il massimo intervallo contenente il punto $x_0 = 5$ al quale si può estendere la soluzione del problema di Cauchy è proprio $J = (2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$. In conclusione, la soluzione massimale del problema di Cauchy è

$$y = \ln(x^2 - 4x - 4), \qquad x \in (2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$$

Esercizio 2.5. *Trovare tutte le soluzioni di*

$$y' = 1 + y^2$$

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Soluzione. Da $dy/dx = 1 + y^2$, segue

$$\int \frac{1}{1 + y^2}\, dy = \int 1\, dx$$

ossia:

$$\arctan y = x + c \qquad x + c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Quindi la soluzione generale è data da

$$y = \tan(x + c)$$

con $c \in \mathbb{R}$.

La soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 0$ si ottiene ponendo $0 = \tan(0 + c)$, cioè $c = 0$. Pertanto il problema di Cauchy assegnato ha l'unica soluzione

$$y = \tan(x)$$

sull'intervallo massimale $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Esercizio 2.6. *Risolvere l'equazione*

$$y' = \frac{2x}{x^2+4}\, y$$

Risposta. $y = c(x^2 + 4), \quad c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.7. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{10}$$

Soluzione. Separiamo le variabili, scriviamo $y\,dy = -x\,dx$ e integriamo:

$$y^2 = -x^2 + C \qquad C \geq 0$$

Dunque le curve integrali sono circonferenze di centro l'origine. Imponendo la condizione $y(0) = 1$, si ricava

$$y^2 = -x^2 + 1$$

Da $y^2 = -x^2 + 1$ segue $y = \sqrt{1 - x^2}$ oppure $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Poiché la condizione inizioale è $y(0) = 1$, si deve scegliere il segno positivo. Otteniamo così la soluzione:

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Dunque, l'intervallo massimale della soluzione del problema di Cauchy è $(-1, 1)$.