Politecnico di Milano. Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria

Esercitazioni sulla geometria differenziale delle curve
12, 13 Dicembre 2019

Indice

1 Geometria differenziale delle curve nello spazio

1.1 La cubica gobba

A titolo di esempio, studiamo la curva parametrizzata

$$\mathbb{R} \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3, \qquad t \longmapsto C(t) = (t, t^2, t^3) \tag{1}$$

detta *cubica gobba* (inglese: *twisted cubic*).

Per vedere com'è fatta grosso modo questa curva, si cominni con il seguente esercizio. Si consiglia di usare anche un software (Mathematica, matlab eccetera).

Esercizio 1.1. *1. Disegnare le proiezioni ortogonali di C sui piani coordinati (x, y), (y, z), (x, z).*

2. Disegnare, approssimativamente, la curva C (cioè, disegnare la sua immagine nello spazio).

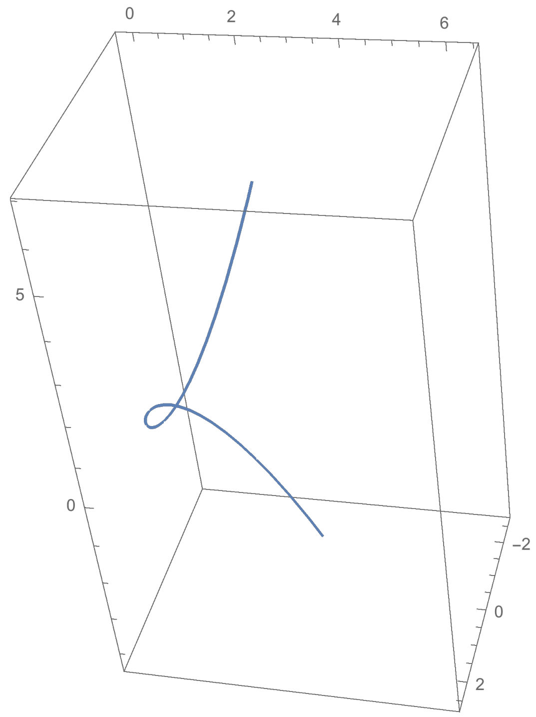

Figura 1: Cubica gobba.

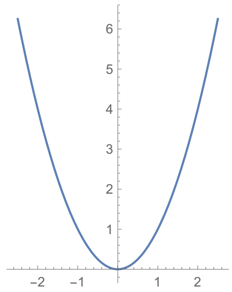

Figura 2: Proiezione della cubica gobba sul piano $z = 0$.

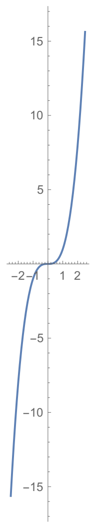

Figura 3: Proiezione della cubica gobba sul piano $y = 0$.

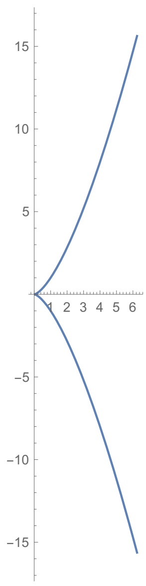

Figura 4: Proiezione della cubica gobba sul piano $x = 0$.

Esercizio 1.2. *Si consideri la cubica gobba*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3, \qquad t \longmapsto C(t) = (t, t^2, t^3) \tag{2}$$

(a) Dimostrare che C è regolare (cioè, $C'(t) \neq 0$ per ogni t) e biregolare. (Cioè, per ogni t, $C(t)'$ e $C''(t)$ non sono paralleli.)

(b) Dimostrare che non è una curva piana. (Cioè, dimostrare che non esiste alcun piano che la contenga per intero. Per meglio dire: non esiste alcun piano che contenga per intero l'immagine di C.)

Soluzione.

(a) Siccome $C'(t) = (1, 2t, 3t^2) \neq (0, 0, 0)$ per ogni t, la curva C è regolare. Questo significa che il vettore tangente unitario $\mathbf{T}$ ($C'(t)$ normalizzato) è definito per ogni t. Il vettore accelerazione è $C''(t) = (0, 2, 6t)$. Si vede subito che, per ogni t, $C'(t)$ e $C''(t)$ non sono paralleli, e dunque C è biregolare. Questo significa che esiste il piano osculatore in ogni punto $t \in \mathbb{R}$.

(b) *La cubica C non è piana.*

Prima argomentazione. Per definizione, una curva si dice *piana* se esiste un piano che la contiene; cioè, se esiste un piano $ax + by + cz + d = 0$, con almeno uno dei coefficienti a, b, c diversi da zero, che include la sua immagine. Dunque, la cubica C è piana se esiste un piano $ax + by + cz + d = 0$ per il quale valga la condizione:

$$at + bt^2 + ct^3 + d = 0 \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

Ora, per il *Principio di identità dei polinomi*, questa condizione implica

$$a = b = c = d = 0$$

Quindi la cubica C non è piana.

Seconda argomentazione. Se una curva biregolare $\Gamma = \Gamma(t)$, $t \in J$, è piana, e $\mathcal{P}$ è il piano che la contiene, i piani osculatori in t, per ogni t, coincidono tutti con $\mathcal{P}$. Dunque, per stabilire se una curva è piana, basta trovare il piano osculatore $\mathcal{P}_0$ in un qualunque fissato $t_0 \in J$, e controllare se Γ è contenuta in quel piano $\mathcal{P}_0$.

Nel caso della cubica C, abbiamo $C'(0) = (1, 0, 0)$ e $C''(0) = (0, 2, 0)$. Il piano osculatore in $t = 0$ è parallelo a $C'(0)$ e $C''(0)$ e contiene il punto $C(0) = (0, 0, 0)$. Un vettore di giacitura di tale piano è il prodotto vettoriale

$$C'(0) \times C''(0) = (1, 0, 0) \times (0, 2, 0) = (0, 0, 2)$$

Dunque il piano osculatore in $t = 0$ è il piano di equazione

$$z = 0$$

Ora, i punti $C(t) = (t, t^2, t^3)$ non appartengono al piano $z = 0$ (a meno che t sia nullo). Quindi la cubica C non è piana.

Esercizio 1.3. *Calcolare la curvatura della cubica* $C(t) = (t, t^2, t^3)$ *in* $t = 0$.

Soluzione. I vettori velocità e accelerazione in un generico $t \in \mathbb{R}$ sono

$$C'(t) = (1, 2t, 3t^2), \qquad C''(t) = (0, 2, 6t)$$

e quindi

$$C'(0) = (1, 0, 0), \qquad C''(0) = (0, 2, 0)$$

Allora,

$$\kappa(0) = \frac{|C'(0) \times C''(0)|}{|C'(0)|^3} = \frac{|(1,0,0) \times (0,2,0)|}{|(1,0,0)|} = 2$$

Esercizio 1.4. *Calcolare la terna di Frenet* $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ *della cubica* $C(t) = (t, t^2, t^3)$ *in* $t = 0$.

Soluzione.

- Si calcolano $C'(t)$ e $C''(t)$, per un generico $t \in \mathbb{R}$:

$$C'(t) = (1, 2t, 3t^2), \qquad C''(t) = (0, 2, 6t)$$

- Si pone $t = 0$, e così si trovano

$$C'(0) = (1, 0, 0), \qquad C''(0) = (0, 2, 0)$$

- Si calcola

$$\mathbf{B}(0) = \frac{C'(0) \times C''(0)}{|C'(0) \times C''(0)|} = (0, 0, 1)$$

- Il vettore tangente unitario $\mathbf{T}$ in $t = 0$ è

$$\mathbf{T}(0) = C'(0)/|C'(0)| = (1, 0, 0)$$

- Si calcola

$$\mathbf{N}(0) = \mathbf{B}(0) \times \mathbf{T}(0) = (0, 0, 1) \times (1, 0, 0) = (0, 1, 0)$$

Quindi la terna di Frenet $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ in $t = 0$ coincide con la base ortonormale canonica $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

Osservazione Si noti che per calcolare la terna fondamentale $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ in $t = 0$, *non è necessario trovare prima* $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ *in un generico* $t \in \mathbb{R}$ e poi sostituire, nelle espressioni trovate, $t = 0$. Si può procedere in modo più diretto, come abbiamo visto in questo esercizio.

Esercizio 1.5. *Calcolare la terna di Frenet* $\mathbf{T}(1), \mathbf{N}(1), \mathbf{B}(1)$ *della cubica* $C(t) = (t, t^2, t^3)$ *in* $t = 1$. *Il vettore* $C''(1)/|C''(1)|$ *(vettore accelerazione normalizzato) è uguale a* $\mathbf{N}(1)$*?*

Soluzione.

- Si calcolano $C'(t)$ e $C''(t)$, per un generico $t \in \mathbb{R}$:

$$C'(t) = (1, 2t, 3t^2), \qquad C''(t) = (0, 2, 6t)$$

- Si pone $t = 1$, e così si trovano

$$C'(1) = (1, 2, 3), \qquad C''(1) = (0, 2, 6)$$

- **ATTENZIONE.** Si noti subito che il vettore accelerazione $C''(1) = (0, 2, 6)$ *non è ortogonale a* $C'(1) = (1, 2, 3)$ (il loro prodotto scalare non è zero) e quindi $C''(1)$ *non è un multiplo di* $\mathbf{N}(1)$. Detto altrimenti, il vettore unitario $C''(1)/|C'(1)|$ *non è uguale a* $\mathbf{N}(1)$. Allora, anziché trovare subito $\mathbf{N}(1)$, troviamo prima $\mathbf{B}(1)$.

- Calcoliamo:

$$\mathbf{B}(1) = \frac{C'(1) \times C''(1)}{|C'(1) \times C''(1)|} = \frac{(1, 2, 3) \times (0, 2, 6)}{|(1, 2, 3) \times (0, 2, 6)|} = \frac{(6, -6, 2)}{\sqrt{76}}$$

  Perché $\dfrac{C'(1) \times C''(1)}{|C'(1) \times C''(1)|} = \mathbf{B}(1)$? Ricordiamoci che l'accelerazione $C''(t)$ sta sul piano (detto *piano osculatore*) generato da $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$. Precisamente vale la decomposizione

$$C''(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T}(t) + v^2 \kappa \mathbf{N}(t) \tag{3}$$

  dove $v = v(t) = |C'(t)|$. Quindi il piano generato da $C'(t), C''(t)$ *coincide con il piano osculatore*, generato da $\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t)$. Quindi, $C'(t) \times C''(t)$ è parallelo a $\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t)$:

$$C'(t) \times C''(t) = \lambda \mathbf{B}(t)$$

  Inoltre, siccome la componente $v^2\kappa$ di $C''(t)$ lungo $\mathbf{N}(t)$ è positiva (cioè, nel piano osculatore, $C''(t)$ sta, rispetto al vettore tangente $C'(t)$, dalla stessa parte di $\mathbf{N}$), i prodotti vettoriali $C'(t) \times C''(t)$ e $\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t)$ sono orientati nello stesso modo, cioè $\lambda > 0$. Ne segue che

$$\frac{C'(t) \times C''(t)}{|C'(t) \times C''(t)|} = \mathbf{B}(t)$$

- Il vettore tangente unitario $\mathbf{T}$ in $t = 1$ è

$$\mathbf{T}(1) = C'(1)/|C'(1)| = (1, 2, 3)/\sqrt{14}$$

- Si calcola infine

$$\mathbf{N}(1) = \mathbf{B}(1) \times \mathbf{T}(1) = \frac{(6, -6, 2)}{\sqrt{76}} \times (1, 2, 3)/\sqrt{14} = (-22, -16, 18)/\sqrt{1064}$$

Esercizio 1.6. *Si consideri la cubica gobba*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3, \qquad t \longmapsto C(t) = (t, t^2, t^3) \tag{4}$$

1. *Trovare la terna fondamentale* $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ *in un generico* $t \in \mathbb{R}$.
2. *Calcolare la curvatura* $\kappa(t)$ *in* $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione.

1. I vettori velocità e accelerazione sono: $C'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $C''(t) = (0, 2, 6t)$.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{C'(t)}{|C'(t)|} = \frac{(1, 2t, 3t^2)}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{C'(t) \times C''(t)}{|C'(t) \times C''(t)|} = \frac{(1, 2t, 3t^2) \times (0, 2, 6t)}{|(1, 2t, 3t^2) \times (0, 2, 6t)|} = \frac{(6t^2, -6t, 2)}{\sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}(-4t - 18t^3, 2 - 18t^4, 6t + 12t^3)$$

2. La curvatura in $t \in \mathbb{R}$ è data da

$$\kappa(t) = \frac{|C'(t) \times C''(t)|}{|C'(t)|^3} = \frac{|(1, 2t, 3t^2) \times (0, , 2, 6t)|}{|(1, 2t, 3t^2)|^3} = \frac{\sqrt{4 + 36t^2 + 36t^4}}{(\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4})^3}$$

Esercizio 1.7. *Data la cubica* $C(t) = (t, t^2, t^3)$, *trovare le equazioni cartesiane dei seguenti piani, in* $t = 1$*:*
(a) il piano osculatore $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$*;*
(b) il piano normale $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$*;*
(c) il piano rettificante $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$*;*

Soluzione.

Per trovare i tre piani $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$, $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$, $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ in $C(1) = (1, 1, 1)$, dobbiamo trovare i loro vettori di giacitura, che sono paralleli, rispettivamente, a $\mathbf{B}$, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$.

a) *Piano osculatore* $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$. Un vettore di giacitura è

$$C'(1) \times C''(1) = (1, 2, 3) \times (0, 2, 6) = (6, -6, 2)$$

Dunque, il piano osculatore ha equazione

$$3(x - 1) - 3(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \quad \text{cioè} \quad 3x - 3y + z - 1 = 0$$

b) *Piano normale* $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$. Un vettore di giacitura è $C'(1) = (1, 2, 3)$. Quindi, il piano normale $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$ ha equazione

$$1(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0, \quad \text{cioè} \quad x + 2y + 3z - 6 = 0$$

c) *Piano rettificante* $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$. Un vettore di giacitura è parallelo a $\mathbf{N}$, e quindi è del tipo $\alpha\mathbf{B} \times \beta\mathbf{T}$ $(\alpha, \beta \neq 0)$. Ad esempio, un vettore di giacitura è

$$(3, -3, 1) \times (1, 2, 3) = (-11, -8, 9)$$

Un'equazione cartesiana del piano rettificante è allora:

$$-11(x-1) - 8(y-1) + 9(z-1) = 0 \quad \text{cioè} \quad -11x - 8y + 9z + 10 = 0$$

1.2 Altre curve nello spazio e nel piano. Cerchio osculatore.

Esercizio 1.8. *Si consideri la curva*

$$C(t) = (t + \cos t)\mathbf{e}_1 + (t - \cos t)\mathbf{e}_2 + (\sqrt{2} \sin t)\mathbf{e}_3, \qquad t \in mathbbR$$

Calcolare:
(a) La curvatura $\kappa(t)$*;*
(b) $\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t)\mathbf{B}(t)$*,* $t \in \mathbb{R}$*.*

Soluzione.
$C'(t) = (1 - \sin t, 1 + \sin t, \sqrt{2} \cos t)$; $\quad C''(t) = (-\cos t, \cos t, -\sqrt{2} \sin t)$
$C'(t) \times C''(t) = (-\sqrt{2}(1 + \sin t), -\sqrt{2}(1 - \sin t), 2 \cos t)$
$|C'(t) \times C''(t)| = 2\sqrt{2}$
$v = v(t) = |C'(t)| = 2.$
Allora:
(a)

$$\kappa(t) = \frac{C'(t) \times C''(t))}{v^3} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(b)

$$\mathbf{T}(t) = \left(\frac{1 - \sin t}{2}, \frac{1 + \sin t}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right)$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{C'(t) \times C''(t)}{|C'(t) \times C''(t)|} = \left(-\frac{1 + \sin t}{2}, -\frac{1 - sint}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right)$$

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\sin t \right)$$

Esercizio 1.9. *Si consideri la curva parametrizzata nello spazio* $\mathbb{R}^3$

$$\alpha(t) = \left(\arctan 2t\,,\ -5\,,\ \frac{\ln\left(1 + 4t^2\right)}{4} \right)$$

con $t \in [0, +\infty)$*.*
(a) Stabilire se la curva è piana.
(b) Determinare il piano osculatore in $t = 0$*.*
(c) Determinare la terna intrinseca $\mathbf{T}(t)$*,* $\mathbf{N}(t)$ *e* $\mathbf{B}(t)$ *in* $t = 0$*.*
(d) Determinare il valore della curvatura in $t = 0$ *e il centro del cerchio osculatore in* $t = 0$*.*

Soluzione.

(a), (b) Poiché la seconda componente di $\alpha(t) = \left(\arctan 2t\,,\ -5\,,\ \dfrac{\ln\left(1+4t^2\right)}{4}\right)$ è costante ($y = -5$), la curva è piana: sta tutta sul piano $y = -5$. Pertanto, in ogni suo punto il piano osculatore coincide con il piano $y = -5$.

(c)

$$\alpha'(t) = \left(\frac{2}{1+4t^2}, 0, \frac{2t}{1+4t^2},\right) \qquad \alpha''(t) = \left(\frac{-16t}{(1+4t^2)^2}, 0, \frac{2-8t^2}{(1+4t^2)^2}\right)$$

$$\alpha'(0) = (2,0,0) = 2\mathbf{e}_1 \qquad \alpha''(0) = (0,0,2) = 2\mathbf{e}_3$$

Nel punto $\alpha(0)$,

$$\mathbf{T} = \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|} = (1,0,0) = \mathbf{e}_1 \tag{5}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\alpha'(0) \times \alpha''(0)}{|\alpha'(0) \times \alpha''(0)|} = \frac{2\mathbf{e}_1 \times 2\mathbf{e}_3}{4} = -\mathbf{e}_2 \tag{6}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{e}_3 \tag{7}$$

Dunque la terna fondamentale $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ nel punto $\alpha(0)$ è $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_2)$

(d) La curvatura in $t = 0$ è data da

$$\kappa(0) = \frac{|\alpha'(0) \times \alpha''(0)|}{|\alpha'(0)|^3} = \frac{|2\mathbf{e}_1 \times 2\mathbf{e}_3|}{|2\mathbf{e}_1|^3} = \frac{1}{2} \tag{8}$$

Il centro del cerchio osculatore nel punto corrispondente a $t = 0$ è

$$\alpha(0) + \frac{1}{\kappa(0)}\mathbf{N} = (0,-5,0) + 2(0,0,1) = (0,-5,2)$$

1.3 Curvature di curve piane e di grafici

1. A una curva nel piano $\mathbb{R}^2$

$$J \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2, \qquad C(t) = (x(t), y(t)) \tag{9}$$

(J intervallo di $\mathbb{R}$) si può associare la curva nello spazio $\mathbb{R}^3$, che denoteremo ancora C,

$$J \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3, \qquad C(t) = (x(t), y(t), 0) \tag{10}$$

(con $z = z(t) = 0$ per ogni t). Allora si vede facilmente che la formula della curvatura κ ($\kappa \geq 0$) diventa:

$$k(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \tag{11}$$

2. Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale (I intervallo di $\mathbb{R}$) di classe C^2. Ricordiamo che il *grafico* di f è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ così definito:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\ y = f(x)\}$$

Cioè, l'insieme di tutti i punti del piano del tipo $(x, f(x))$. Il grafico G_f si può vedere come l'immagine della curva parametrizzata

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

$t \in I$. La curvatura è data allora dalla formula:

$$k(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}} \tag{12}$$

Esercizio 1.10. *Si consideri l'ellisse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

($a \geq b > 0$) parametrizzata come

$$[0, 2\pi] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2, \qquad C(t) = (x(t), y(t)) \tag{13}$$

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$$

(a) Dimostrare che la curvatura è data da

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

(b) Quali sono i punti sull'ellisse di minima e di massima curvatura?

Soluzione. (a) $C'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$, $C''(t) = (-a\cos t, -b\sin t)$. La curvatura è

$$k(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

(b) I punti t di minimo per la funzione $\kappa(t)$ sono i punti di massimo di

$$(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t) = (a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2$$

ossia i punti di massimo di $\sin^2 t$, che ovviamente sono $t = \pi/2$, $t = -\pi/2$. E $\kappa(t)$ assume il valore massimo se $\sin^2 t$ è minimo, cioè se $t = 0$ oppure $t = \pi$. I punti di curvatura minima e massima sono dunque i vertici dell'ellisse, cioè le intersezioni dell'ellisse con gli assi di simmetria.

Esercizio 1.11. *Si consideri la parabola*

$$y = ax^2$$

($a > 0$) parametrizzata come

$$\mathbb{R} \xrightarrow{C} \mathbb{R}^2, \qquad C(t) = (x(t), y(t)) \tag{14}$$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = at^2 \end{cases}$$

(a) Trovare la curvatura $\kappa(t)$.
(b) Scrivere l'equazione del cerchio osculatore nel punto $(0, 0)$.

Soluzione. (a) La curvatura del grafico di $y = f(x) = ax^2$, $a > 0$, è dalla formula:

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} = \frac{2a}{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}} \tag{15}$$

(b) Per $x = 0$, $\kappa(0) = 2a$. Il raggio di curvatura R_0 in $x = 0$, cioè il reciproco della curvatura, è

$$R_0 = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{1}{2a}$$

Il cerchio osculatore nel punto $(0, 0)$, corrispondente al valore $x = 0$, ha centro in $(0, 1/2a)$ e raggio $R_0 = \dfrac{1}{2a}$. La sua equazione è dunque

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a^2}$$

Esercizio 1.12. *Calcolare la curvatura e il raggio di curvatura del grafico di $y = \sqrt{x}$ in $x = 1$.*

Soluzione.

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right|}{\left[1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{4\sqrt{x^3}}}{\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Il raggio di curvatura R in $x = 1$ è

$$R(1) = \frac{1}{\kappa(1)} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$