Politecnico di Milano. Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria

Esercitazioni sulle equazioni lineari.
28, 29 Novembre 2019
(Versione 02/12/2019: Corretto un segno nel testo dell'esercizio 4)

Indice

1 Equazioni lineari del primo ordine

Un'equazione *lineare del primo ordine* è del tipo

$$y' + a(x)\, y = f(x) \tag{1}$$

dove $a(x)$ e $f(x)$ sono funzioni definite e continue su uno stesso intervallo I di $\mathbb{R}$. Se la funzione f è identicamente nulla,

$$y' + a(x)\, y = 0, \tag{2}$$

l'equazione si dice *omogenea*. L'equazione (2) si chiama equazione omogenea *associata* all'equazione (1).

1.1 Riassunto dei fatti fondamentali sulle equazioni lineari del primo ordine

$$\boxed{y = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int f(x) e^{A(x)}\, dx}$$

La *soluzione generale* dell'equazione lineare del primo ordine

$$y' + a(x)\, y = f(x) \tag{3}$$

è data da

$$\boxed{y = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int f(x) e^{A(x)}\, dx} \tag{4}$$

dove $A(x)$ è una qualunque primitiva di $a(x)$, C è una costante reale arbitraria e $\int f(x)e^{A(x)}\, dx$ denota una qualunque antiderivata di $f(x)e^{A(x)}$.

Osservazioni.

- L'espressione $Ce^{-A(x)}$, $(C \in \mathbb{R})$, descrive lo *spazio lineare* (o *vettoriale*) delle soluzioni dell'equazione omogenea associata $y' + a(x)\, y = 0$.
- L'espressione $e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}\, dx$ descrive una *soluzione particolare* della stessa equazione non omogenea (3).
- Nel suo complesso, l' espressione (4) descrive lo *spazio affine* ("*spazio vettoriale traslato.*")
- La soluzione generale dipende da *un'unica* costante arbitraria C. (La soluzione generale di un'equazione differenziale lineare di ordine n contiene esattamente n costanti arbitrarie). Si dice allora che le soluzioni sono ∞^1, oppure che lo spazio (affine) delle soluzioni *ha dimensione* 1. (Nell'integrale che figura in (4) non bisogna aggiungere un'altra costante additiva C_1. Del resto, anche se la si aggiungesse, si otterrebbe alla fine il termine $(C + C_1)e^{-A(x)}$; quindi le due costanti si ingloberebbero in un'unica costante $K = C + C_1$.)

1.2 Esercizi

Richiamiamo un esercizio di base:

Esercizio 1.1. *Trovare tutte le soluzioni dell'equazione*

$$y' + a(x)y = 0 \tag{5}$$

dove $a(x)$ è una funzione continua.

Soluzione. $y(x) = Ce^{-A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$, dove $A(x)$ è una (qualunque) primitiva di $a(x)$: $A'(x) = a(x)$.

Esercizio 1.2. *Si consideri l'equazione*

$$y' = x - y \tag{6}$$

a) Risolvere l'equazione omogenea associata: $y' = -y$.
a) Esistono soluzioni costanti? Esistono soluzioni del tipo $y(x) = ax + b$?
b) Trovare la soluzione generale.
c) Disegnare i grafici delle quattro soluzioni che soddisfano le condizioni iniziali $y(0) = K$, dove $K = -2, -1, 0, 1$.

Soluzione.
a) $y(x) = Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.
b) Non esistono soluzioni costanti. Infatti, consideriamo una funzione del tipo: per ogni x, $y(x) = K$ (dove K è una costante fissata). Sostituendo in $y' = x - y$, si ottiene $0 = x - K$, assurdo. Cerchiamo soluzioni del tipo: $y(x) = ax + b$. Sostituendo, si ottiene $a = x - (ax + b)$, da cui si ricava $a = 1$, $b = -1$. Dunque $y = x - 1$ è una soluzione particolare.
c) Avendo trovato la soluzione generale $y(x) = Ce^{-x}$ dell'equazione omogenea associata e una soluzione particolare $y = x - 1$, possiamo concludere che la soluzione generale dell'equazione $y' = x - y$ è

$$Ce^{-x} + x - 1, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Ovviamente, si può trovare la soluzione generale usando la formula generale.
d) Le 4 soluzioni sono rispettivamente $y = -e^{-x} + x - 1$, $y = x - 1$, $y = e^{-x} + x - 1$, $y = 2e^{-x} + x - 1$. I grafici sono riportati qui sotto.

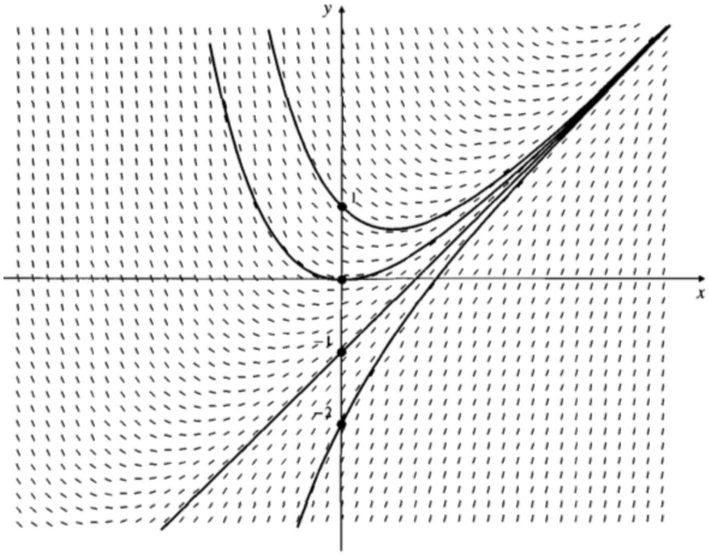

Figura 1: Campo di direzioni (slope field) di $y' = x - y$ con quattro soluzioni. Tutte le soluzioni tendono all'asintoto $y = x - 1$, che è una soluzione particolare.

Esercizio 1.3. *Trovare la soluzione generale dell'equazione*

$$y' - y = xe^x \tag{7}$$

e la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = xe^x \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{8}$$

Soluzione. Soluzione generale: $Ce^x + e^x\left(\frac{x^2}{2}\right)$. Soluzione del problema di Cauchy: $e^x + e^x\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

Esercizio 1.4. *Trovare la soluzione generale dell'equazione*

$$y' + y = \frac{1}{(1+e^x)^2} \tag{9}$$

Stabilire se esiste una soluzione che sia limitata su $\mathbb{R}$.

Soluzione. Soluzione generale:

$$y(x) = Ce^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^x}$$

Vediamo se esistono soluzioni limitate su $\mathbb{R}$. Siccome le soluzioni sono continue su $\mathbb{R}$, basta studiare le soluzioni in un intorno di $-\infty$ e di $+\infty$.

A $+\infty$ tutte le soluzioni vanno a zero, qualunque sia C:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[Ce^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^x}\right] = 0$$

Poniamo

$$y_C(x) = \left[Ce^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^x}\right] = e^{-x}\left[C - \frac{1}{1+e^x}\right]$$

Per $x \to -\infty$, e^{-x} tende a $+\infty$ e $\left[C - \dfrac{1}{1+e^x}\right]$ tende a $C-1$. Distinguiamo allora due casi. Se $C - 1 \neq 0$, per $x \to -\infty$

$$y_C(x) \sim e^{-x}(C-1)$$

e quindi $y_C(x) \to \pm\infty$, a seconda che sia $C > 1$ o $C < 1$. Se invece $C = 1$,

$$y_1(x) = e^{-x}\left[1 - \frac{1}{1+e^x}\right] = \frac{1}{1+e^x} \to 1$$

per $x \to -\infty$. Quindi l'unica soluzione limitata è quella che corrisponde al valore $C = 1$:

$$y_1(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

Esercizio 1.5. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + y = \sin(x) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Soluzione. La soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$$

La soluzione del problema di Cauchy:

$$\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$$

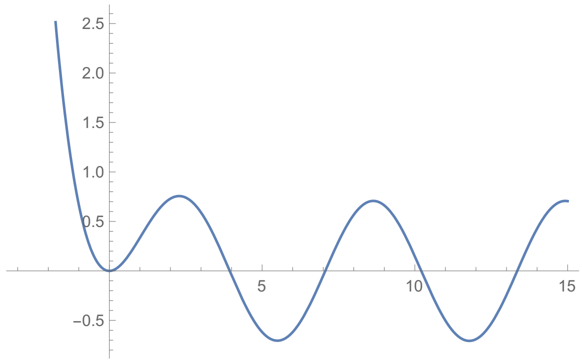

Figura 2: La soluzione $\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$ del problema di Cauchy dell'equazione (10). Quando x è grande, si confonde con $\frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$. Quando $x \to -\infty$, è asintotica a $\frac{1}{2}e^{-x}$.

Esercizio 1.6. *(a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione*

$$y' + \frac{1}{x}\,y = x \tag{11}$$

sull'intervallo $I = (0, +\infty)$. Disegnare il grafico qualitativo di tre soluzioni.

(b) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' + \frac{1}{x}\,y = x \tag{12}$$

sull'intervallo $J = (-\infty, 0)$.

(c) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x}\,y = x \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

sull'intervallo $I = (0, +\infty)$.

Soluzione.

(a) Soluzione generale: $y(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{1}{3}x^2, \quad C_1 \in \mathbb{R}$.

(b) Soluzione generale: $y(x) = \frac{C_2}{x} + \frac{1}{3}x^2, \quad C_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Soluzione del problema di Cauchy: $y(x) = \frac{-1 + x^3}{3x}$.

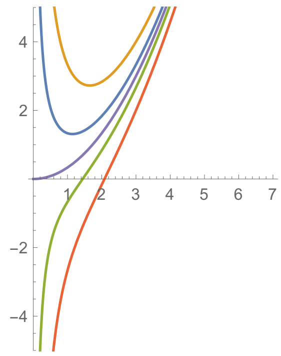

Figura 3: Soluzioni particolari del tipo $y(x) = \dfrac{C}{x} + \dfrac{1}{3}x^2$, con $C = 1, 3, 0, -1, -3$, sull'intervallo $(0, +\infty)$. Si noti che i grafici delle soluzioni non si intersecano mai, per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy. Infatti, se due grafici si intersecassero in un punto (x_0, y_0), la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ non sarebbe più unica.

1.3 Applicazioni alla fisica

1.3.1 Caduta libera

Si cerca di determinare la velocità di un corpo di massa m in caduta libera nell'aria. Descriviamo la situazione con un modello matematico, in cui le forze in gioco sono le seguenti:

- Il peso del corpo: $m\overrightarrow{g}$.
- Una forza di attrito: $-k\overrightarrow{v}$.

  Questa forza si oppone al moto ($k < 0$) ed è proporzionale alla velocità del corpo. Il valore della costante k dipenderà dalle proprietà del corpo e dalle caratteristiche dell'aria in cui il corpo cade.
- Supponiamo che la spinta di Archimede $\overrightarrow{\Sigma}$ sul corpo sia talmente piccola da essere trascurabile: $\overrightarrow{\Sigma} = 0$.

Per la legge fondamentale della dinamica,

$$m\overrightarrow{a} = \text{Somma delle forze che agiscono sul corpo} = m\overrightarrow{g} - k\overrightarrow{v}$$

Il moto avviene su una retta; quindi, considerando le proiezioni dei vettori sull'asse del moto, e ricordando che l'accelerazione è la derivata prima della velocità, otteniamo l'equazione lineare del primo ordine (a coefficienti costanti)

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \qquad \text{(Caduta libera)} \tag{14}$$

Esercizio 1.7. *Si consideri l'equazione*

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \tag{15}$$

dove m, g, k sono costanto positive. Determinare la soluzione generale e la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $v(0) = 0$.

Soluzione. Si può osservare subito che una soluzione costante è $\frac{mg}{k}$. L'equazione omogenea associata ha soluzione generale $Ce^{-\frac{k}{m}t}$. Quindi la soluzione generale è:

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

(come si può controllare facendo uso dell'espressione della soluzione generale). La soluzione che soddisfa la condizione iniziale $v(0) = 0$ è

$$\frac{mg}{k}\left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right]$$

Dunque, secondo questo modello, il corpo che cade raggiungerà una velocità limite $v_\infty = \frac{mg}{k}$.

1.3.2 Legge di Newton del raffreddamento di un corpo

Un modello che descrive l'evoluzione della temperatura $T = T(t)$ (in funzione del tempo) di un corpo che si raffredda è la legge del raffreddamento (Newton, 1701):

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - \alpha) \tag{16}$$

(k costante positiva). In questa equazione, α è la temperatura (pensata costante) dell'ambiente in cui il corpo caldo si raffredda. Questa legge presuppone che la rapidità con cui varia la temperatura all'istante t (cioè, la derivata $\frac{dT}{dt}$) sia proporzionale alla stessa temperatura all'istante t.

Esercizio 1.8. *Risolvere l'equazione*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - \alpha) \tag{17}$$

(k costante positiva), dove si suppone $T > \alpha$. Trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $T(0) = T_0$.

Soluzione. Soluzione generale:

$$T(t) = Ce^{-kt} + \alpha$$

La soluzione che soddisfa la condizione iniziale $T(0) = T_0$ è

$$T(t) = (T_0 - \alpha)e^{-kt} + \alpha$$

A regime, il corpo raggiunge la temperatura α dell'ambiente.