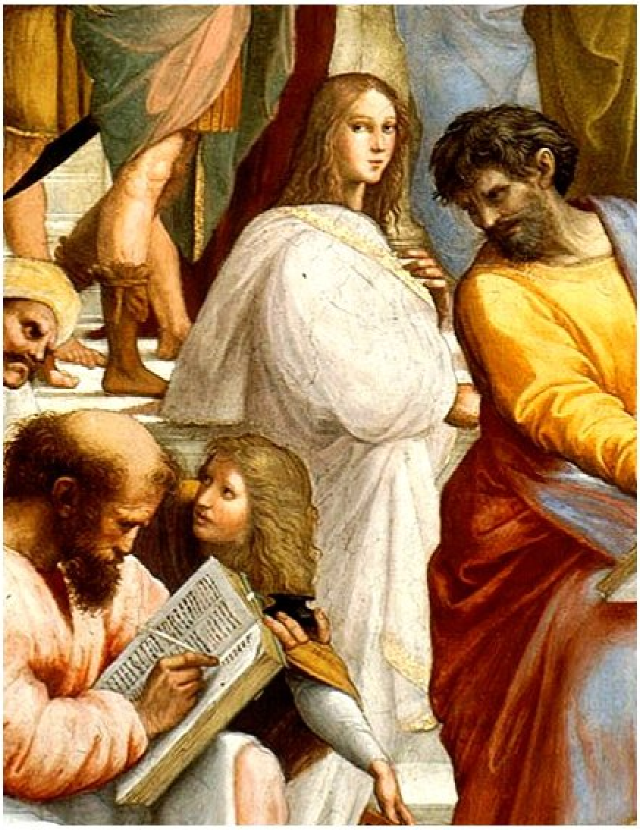
Ἀρχιμήδης - Κύκλου Μέτρησις

Archimede - La Misura del Cerchio

Versione digitalizzata, tradotta dal greco sulla base della redazione filologica di Johan Heiberg (Lipsia 1880-1881) e annotata da

Federico G. Lastarìa
federico.lastaria@polimi.it

Politecnico di Milano, Dipartimento di Scienze e Tecnologie Aerospaziali.



L'immagine, particolare della cosiddetta "*Scuola d'Atene*" - *Causarum Cognitio* (*Conoscenza delle Cause*), *Musei Vaticani*, Raffaello -, rappresenta (si presume) Ipazia, nata attorno al 360 d.C., matematica, astronoma e filosofa di grande fama. Insieme a suo padre Teone, rettore del *Museo*, Ipazia fu attiva in Alessandria d'Egitto in un circolo di studiosi di filosofia e di matematica, e contribuì alla loro trasmissione alle generazioni successive. È stato anche congetturato che si debba a lei la redazione del presente testo archimedeo. Ipazia fu brutalmente trucidata nel 415 da fanatici criminali al servizio di un potere ottuso, in quanto amante della sapienza e donna.

In memoria dei miei genitori
Ginetta Allocchio e Ugo Lastaria.

Ancóra

Ancora un'alba sul mondo:
altra luce, un giorno
mai vissuto da nessuno,
ancora qualcuno è nato:
con occhi e mani,
e sorride.

Padre David Maria Turoldo
(Coderno, 1916 - Milano, 1992)

Prefazione

Lo scopo di questo mio lavoro è proporre alcuni strumenti per lo studio della *Misura del Cerchio* di Archimede (circa 287 a.C. - 212 a.C.), una delle opere scientifiche più lette e citate di tutta l'antichità. In particolare, spero che queste note possano essere studiate insieme da studenti e docenti, sia di scuole secondarie superiori sia universitari. Mi piace pensare, inoltre, che lo scritto di Archimede possa suscitare l'interesse non soltanto di studenti e studiosi di materie 'scientifiche', ma anche 'umanistiche' (qualunque cosa significhino questi aggettivi); ad esempio, di lingua greca o di filosofia. Ancora più in generale, non escludo che il testo archimedeo possa incuriosire qualche persona coraggiosa, sedotta dal fascino di un testo scientificamente 'attuale' di circa 2300 anni fa, che contiene idee matematiche profonde, belle e, tutto sommato, semplici.

Traduzione e testo a fronte A differenza di quanto accade per le opere letterarie o filosofiche, le traduzioni delle opere scientifiche antiche spesso non riportano il testo originale a fronte e talvolta non sono soddisfacenti. Per questo motivo ho scelto di riportare, oltre alle traduzioni, anche i testi originali greci degli autori di volta in volta citati (Archimede, Euclide, Erone). Almeno nelle mie intenzioni, ho cercato una traduzione che fosse comprensibile e sufficientemente fedele da fare trasparire la struttura del testo originale, anche solo per mera curiosità. Per facilitare la consultazione del testo greco, ho aggiunto in appendice un piccolo glossario. Nella parte del lavoro in cui si ricostruiscono in modo dettagliato i metodi, le dimostrazioni e i calcoli, ho invece pienamente utilizzato il linguaggio e soprattutto il simbolismo algebrico moderno.

Contenuto della *Misura del Cerchio* La *Misura del Cerchio* è un'opera relativamente semplice, se confrontata con altre del grande siracusano, ma contiene almeno due importanti contributi originali:

(a) la dimostrazione rigorosa (*Proposizione* 1) della *uguaglianza tra l'area del cerchio e la metà del rettangolo avente per dimensioni la circonferenza rettificata e il raggio*, un bellissimo esempio del classico metodo di esaustione di Eudosso;

(b) due procedimenti di calcolo - diciamo, due *programmi* -, per approssimare *con precisione arbitraria, rispettivamente dall'alto e dal basso*, il rapporto π tra la circonferenza e il diametro di un cerchio (*Proposizione* 3).

Nel testo pervenutoci Archimede, spingendosi a fare i conti fino a considerare i poligoni regolari circoscritti e inscritti di 96 lati, trova infine la semplice approssimazione

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

In particolare, l'approssimazione $\pi \approx 3+1/7 = 22/7$ (che risulta essere più accurata di $\pi \approx 3.14$) è stata lungamente utilizzata in passato (e talvolta considerata erroneamente come un'uguaglianza).

Guida allo studio Il paragrafo 1 è una presentazione generale dello scritto di Archimede. Può essere utile per chi voglia avere un'idea generale dei risultati, delle dimostrazioni e dei procedimenti per approssimare π, senza studiare tutti i dettagli. Il paragrafo 2 contiene il testo greco e la traduzione, corredata di note. (Nel formato elettronico, si salta dal testo alla nota, e viceversa, cliccando sul numero della nota.) I tre successivi paragrafi riprendono, in modo approfondito, le tre proposizioni della *Misura del Cerchio*, discutendo in modo più esteso alcuni prerequisiti tacitamente assunti da Archimede, le dimostrazioni e la determinazione dei metodi per approssimare π. Il paragrafo 6 descrive alcuni metodi che Archimede ha presumibilmente utilizzato per calcolare le radici quadrate, tra le quali l'approssimazione babilonese (con relative varianti), il metodo di Erone e lo sviluppo in frazioni continue.

Ho poi aggiunto due digressioni su interessanti questioni che non sono trattate nella *Misura del Cerchio*, ma sono comunque ad essa correlate. La prima (alla fine del paragrafo 1) riguarda quattro classici risultati di Archimede - sull'area del cerchio, la lunghezza della circonferenza, la superficie e il volume della sfera (correlati dal ruolo del rapporto π) e la bellissima scoperta archimedea del rapporto $2 : 3$ (sia per volume sia per superficie) tra sfera e cilindro circoscritto. La seconda (alla fine del paragrafo 5) riguarda il contributo di Archimede alla nascita della trigonometria. La questione (ancora oggi dibattuta) ci darà l'occasione di riconoscere l'importanza degli scienziati islamici dei secoli IX, X e XI ai quali dobbiamo - oltre a contributi originali - anche traduzioni in arabo e commenti di opere greche che altrimenti sarebbero rimaste sconosciute.

Prerequisiti I prerequisiti matematici per la comprensione della *Misura del Cerchio* non sono numerosi. Grosso modo, è sufficiente conoscere un po' di geometria euclidea elementare: gli enunciati del teorema di Pitagora e del teorema della bisettrice (Euclide, *Elementi*, Libro VI, *Proposizione* 3), di cui peraltro riporto la dimostrazione nelle note; angoli al centro e alla circonferenza; i fatti fondamentali su triangoli simili e proporzioni (la 'teoria dei numeri reali' degli antichi matematici greci). Richiamerò comunque, di volta in volta, i risultati e i concetti matematici che Archimede molto spesso utilizza senza richiamarli esplicitamente, dandoli per scontati. Il taglio di Archimede, infatti - diversamente da quello di Euclide negli *Elementi* - non è quello organico e dettagliato di un manuale scolastico, ma piuttosto quello, più asciutto, di un articolo di ricerca avanzata. In breve, questo lavoro dovrebbe essere accessibile a chiunque abbia un minimo di alfabetizzazione matematica, purché sia disposto a impegnarsi nella lettura e nella personale ricostruzione del testo; come è sempre richiesto, del resto, per lo studio di un qualunque testo di matematica.

Ringraziamenti Lucio Russo è stato fonte di ispirazione attraverso le sue opere, in particolare *La Rivoluzione Dimenticata* e *Archimede. Un grande scienziato antico.* Ennio De Giorgi mi ha trasmesso l'idea che il finito in matematica (e non solo) ci appare incomprensibile e disarmonico, se non lo pensiamo immerso in un quadro infinito; e che tradizione e innovazione in matematica non sono in conflitto, ma che l'una arricchisce l'altra.

F. G. L.

Milano, 5 Ottobre 2023.

Indice

1 Introduzione 7
1.1 Breve presentazione della *Misura del Cerchio* . . . 8
1.2 Metodi per approssimare π dal basso e dall'alto . . . 13
1.3 Digressione: alcune scoperte di Archimede sul cerchio e sulla sfera 17

2 La Misura del Cerchio 21
2.1 Testo greco e traduzione . . . 21

3 Proposizione 1 33
3.1 Dimostrazione di: Euclide, *Elementi*, X.1 . . . 33
3.2 Dimostrazione del lemma sui poligoni inscritti . . . 35
3.3 Dimostrazione del lemma sui poligoni circoscritti . . . 38
3.4 Dimostrazione della *Proposizione* 1 . . . 40

4 Proposizione 2 43
4.1 La dimostrazione . . . 43

5 Proposizione 3 45
5.1 Convessità e lunghezze di curve piane . . . 45
5.2 Poligoni regolari circoscritti . . . 49
5.2.1 Schema delle approssimazioni con i poligoni circoscritti . . 52
5.3 Poligoni regolari inscritti . . . 56
5.3.1 Schema delle approssimazioni con poligoni inscritti. . . . 59
5.4 Digressione: Archimede e le radici della trigonometria . . . 64
5.4.1 Risultato attribuito ad Archimede da Tābit ibn Qurra . . 67
5.4.2 Il teorema della corda spezzata di Archimede in un'opera di al-Birūni e le formule di addizione e sottrazione . . . 69

6 Metodi per approssimare le radici quadrate 73
6.1 Le disuguaglianze fondamentali . . . 73
6.2 Calcolo delle radici quadrate nella *Misura del Cerchio* . . . 78
6.3 Approssimazioni mediante frazioni continue . . . 84
6.4 Il metodo di Erone per il calcolo delle radici quadrate . . . 90
6.5 Il metodo di Erone rivisitato . . . 94
6.6 Confronto tra metodo di Erone e altre approssimazioni . . . 96

7 Note 99

A Tabelle di numeri 131

B L'alfabeto greco. Piccolo glossario. 133

C Elenco dei passi riportati in greco 144

Bibliografia 145

Indice Analitico 150

1 Introduzione

"[..] *i libri dell'istesso Archimede, già da me con infinito stupore letti e studiati* [..]" Galileo Galilei [1]

"[..] *La* Misura del Cerchio *di Archimede è il suo contributo più emblematico alla scienza.* [..] *È nella* Misura del Cerchio *che, più ancora che la straordinaria sua tecnica e l'incredibile sua fantasia, appare la filosofia di Archimede riguardo a quelli che in ultima analisi sono i problemi culminanti della matematica: i problemi di calcolo. Si può discutere se Archimede, come alcuni sostengono, fu il fondatore della moderna analisi infinitesimale, ma è indubbio che egli lo fu della moderna analisi numerica, intesa, non come troppi oggi usano, quale "matematica sperimentale", ma come rigorosissima disciplina matematica, sublimazione e capitolo elevatissimo di tutta l'analisi matematica.*" Gaetano Fichera, [15].

Il piccolo trattato che ci è stato trasmesso con il titolo *Misura del Cerchio*[2] è una delle opere di Archimede più diffuse e citate di tutta l'antichità.

Si tratta del rifacimento di una parte di un'opera di Archimede andata perduta. Si ritiene che quest'opera contenesse altri risultati sui rapporti tra corde e archi, e sulle aree di settori e di segmenti di cerchio.[3]

Il trattato che ci è pervenuto contiene gli enunciati e le relative dimostrazioni di tre proposizioni. L'ordine in cui tali proposizioni si susseguono non è corretto dal punto di vista della dipendenza logica, perché la dimostrazione della seconda utilizza un risultato della terza (che è invece del tutto indipendente dalla seconda). E' dunque del tutto verosimile che il testo, nel corso del tempo, abbia subìto delle corruzioni. Inoltre, a differenza di altre opere di Archimede, lo scritto che ci è pervenuto non contiene un preambolo, né sotto la forma di saluto indirizzato al destinatario, né sotto la forma di presentazione generale delle questioni matematiche trattate.

La *Misura del Cerchio* è un'opera unica - non solo tra quelle dello stesso Archimede, ma più in generale della matematica antica -, in quanto contiene sia un importante risultato *teorico* di geometria classica - la *Proposizione* 1, dimostrata con il raffinato metodo di esaustione di Eudosso, che determina l'area del cerchio - sia *metodi ricorsivi* per ottenere approssimazioni razionali (per eccesso e per difetto) del rapporto - oggi chiamato π- tra circonferenza e diametro, con una precisione in linea di principio arbitraria. Tali metodi mostrano che Archimede avesse padronanza anche di tecniche che oggi chiameremmo di analisi numerica.

1.1 Breve presentazione della *Misura del Cerchio*

Cominciamo a passare in rassegna i risultati principali, lasciando ai prossimi paragrafi i dettagli e gli approfondimenti. Il testo che ci è pervenuto è costituito dalle seguenti tre proposizioni.

1. Proposizione 1. *L'area di un qualunque cerchio è uguale a quella di un triangolo rettangolo i cui cateti sono la circonferenza e il raggio del cerchio.*

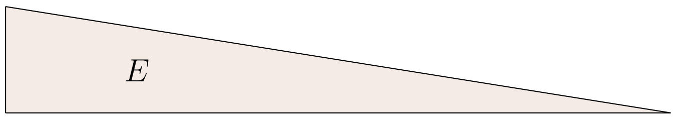


Figura 1: Triangolo rettangolo equivalente al cerchio.

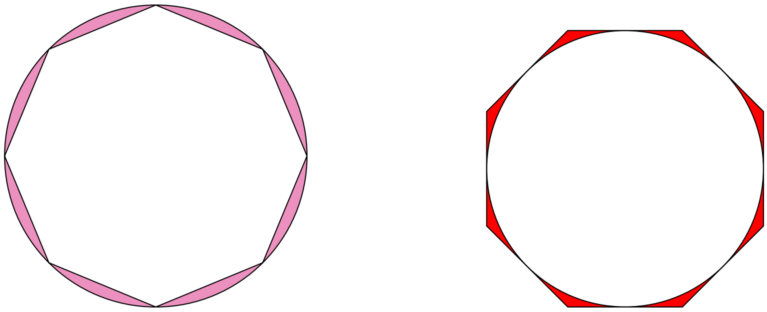
Detto altrimenti, abbiamo una forma di 'quadratura': *il cerchio è la metà del rettangolo avente per dimensioni la circonferenza rettificata e il raggio.*

Dimostrazione. (Cenni. Per altri dettagli, prerequisiti teorici e commenti, si veda il paragrafo 3.) Sia C il cerchio e chiamiamo E il triangolo rettangolo i cui cateti siano la circonferenza rettificata e il raggio del cerchio. Si tratta di dimostrare che $C = E$. A questo scopo, si procede con *due dimostrazioni per assurdo*, il metodo tipico dei matematici greci per dimostrare uguaglianze. Precisamente, si dimostra che sia l'ipotesi $C > E$ sia l'ipotesi $C < E$ conducono a una contraddizione. Se ne dedurrà allora che, per esclusione, si deve avere $C = E$.

a) Supponiamo $C > E$. Chiamiamo P_n il poligono regolare inscritto di n lati. Archimede dà per acquisito il fatto seguente: la differenza $C - P_n$ (la parte colorata nella Figura (a)) *si può rendere piccola quanto si vuole*, pur di prendere il numero n di lati sufficientemente grande. Più precisamente: *per ogni prefissata area* D esiste un intero n_0 tale che, per tutti gli interi $n > n_0$, si ha $C - P_n < D$. (Questo fatto verrà dimostrato nel paragrafo 3.) In particolare, prendiamo $D = C - E$. Allora, per la proprietà appena enunciata, esiste un intero n per il quale si ha

$$C - P_n < C - E \qquad \text{cioè} \qquad P_n > E$$

Il poligono regolare inscritto P_n ha la stessa area del triangolo T_n avente come base il perimetro di P_n e come altezza l'apotema (cioè, il segmento mandato perpendicolarmente dal centro del cerchio a un lato di P_n). Scriveremo $P_n = T_n$ (uguaglianza tra aree). Ora, siccome il perimetro di P_n è minore della circonferenza[4] (la base del triangolo rettangolo E) e la sua altezza è minore del raggio (la relativa altezza del triangolo E), si avrà $T_n < E$, e quindi $P_n = T_n < E$. Assumendo che sia $C > E$ siamo così arrivati a una contraddizione: $P_n > E$ e $P_n < E$. Pertanto, non può essere $C > E$.



(a) $C - P_n$.   (b) $P'_m - C$

b) Supponiamo $C < E$. Chiamiamo P'_m il poligono regolare circoscritto di m lati. Anche per i poligoni regolari circoscritti la differenza $P'_m - C$ (la parte colorata nella Figura (b)) *si può rendere piccola quanto si vuole* - cioè, minore di una qualunque area D preassegnata -, pur di prendere il numero m dei lati sufficientemente grande. Allora, fissato $D = E - C$ esiste un intero m per il quale

$$P'_m - C < E - C \qquad \text{cioè} \qquad P'_m < E$$

Il poligono P'_m ha la stessa area del triangolo T'_m che ha base uguale al perimetro di P'_m (che è maggiore della base di E) e altezza uguale al raggio r (che è uguale alla relativa altezza del triangolo E). Quindi $P'_m = T'_m > E$. Siamo arrivati ancora a una contraddizione: $P'_m < E$ e $P'_m > E$. Quindi, non può essere $C < E$.

In definitiva, siccome non può essere né $C > E$ né $C < E$, deve essere necessariamente $C = E$. □

Questa bellissima dimostrazione - un'argomentazione indiretta, effettuata con il metodo della *riduzione all'assurdo*[5] è un notevole esempio di applicazione del cosiddetto *metodo di esaustione*, generalmente attribuito a Eudosso di Cnido.[6] Si tratta di un metodo dimostrativo che consente di superare in modo rigoroso le difficoltà teoriche relative al ricorso a grandezze infinitesimali e processi infiniti.

Questa *Proposizione* fornisce l'esempio più importante di uguaglianza (di aree) tra una figura con il contorno curvilineo e una figura con il contorno rettilineo; precisamente, nel nostro caso, l'uguaglianza tra un cerchio e un certo triangolo rettangolo (la metà di un certo rettangolo).[7] Si tratta di un risultato teorico di grande importanza e semplicità:

$$\text{CERCHIO} = \frac{1}{2}\,\text{CIRCONFERENZA} \times \text{RAGGIO} \tag{1}$$

Utilizzando le stime numeriche per il rapporto

$$\pi = \frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}}$$

ricavate nella successiva *Proposizione* 3, la formula (1) scritta sopra consente il calcolo computazionale (ovviamente, approssimato) dell'area di un cerchio. Detto altrimenti, la *Proposizione* 1 risolve il problema della *quadratura aritmetica*[8] del cerchio.

Come si vede dalla dimostrazione, la *Proposizione* 1 non ha carattere *costruttivo*, nel senso che non è presentata una costruzione con riga e compasso del triangolo equivalente al cerchio.[9] Il problema teorico risolto da Archimede mediante la 'quadratura aritmetica' del cerchio non va dunque confuso con il classico *problema della 'quadratura del cerchio'*, che si può enunciare nel modo seguente: dato un cerchio, trovare una *costruzione* geometrica, da effettuarsi (in un numero *finito* di passi) *soltanto mediante l'uso di riga e compasso* (in breve, disegnando soltanto rette e cerchi), che permetta di costruire il lato del quadrato che abbia la stessa area del cerchio assegnato. Come è ben noto, alla fine del diciannovesimo secolo tale costruzione è stata dimostrata impossibile.[10] Comunque, dalla *Proposizione* 1 della *Misura del Cerchio* segue facilmente un risultato interessante:

> *Il problema della quadratura del cerchio, con riga e compasso, è equivalente a quello della rettificazione della circonferenza, con riga e compasso.*

In altri termini, se si potesse rettificare la circonferenza con riga e compasso, si saprebbe anche quadrare il cerchio con riga e compasso, e viceversa.[11]

Per meglio apprezzare la *Proposizione* 1, osserviamo inoltre che da essa e dal fatto che due cerchi stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi diametri (o dei rispettivi raggi)[12] segue facilmente l'enunciato seguente (che nel testo archimedeo che ci è pervenuto non è esplicitato):

> *Per ogni cerchio, il rapporto costante* $\frac{\text{CERCHIO}}{(\text{RAGGIO})^2}$ *coincide con il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro:*
>
> $$\frac{\text{CERCHIO}}{(\text{RAGGIO})^2} = \frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}} \tag{2}$$

Infatti, si ha in breve:

$$\frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}} = \left(\frac{2\,\text{CERCHIO}}{\text{RAGGIO}}\right)\frac{1}{2\,\text{RAGGIO}}$$

La circonferenza è data dal rapporto $\frac{2\,\text{CERCHIO}}{\text{RAGGIO}}$ per la formula dell'area (1) della *Proposizione* 1.

$$= \frac{\text{CERCHIO}}{(\text{RAGGIO})^2}$$

Ritorneremo sulla questione discutendo la prossima *Proposizione* 2.

2. Proposizione 2. *Ogni cerchio ha rapporto, rispetto al quadrato costruito sul suo diametro, uguale a quello tra* 11 *a* 14:

$$\text{CERCHIO} : \text{QUADRATO SUL DIAMETRO} = 11 : 14 \qquad (3)$$

A rigore, la proporzione si deve interpretare non come una vera uguaglianza tra rapporti, ma come un'approssimazione. Precisamente, se definiamo $\pi = \text{CIRCONFERENZA}/\text{DIAMETRO}$, con le notazioni odierne la (3) fornisce un'approssimazione dall'alto per $\pi/4$:

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{11}{14} \qquad \left(\frac{\pi}{4} < \frac{11}{14}\right) \tag{4}$$

Allo scopo di dimostrare l'uguaglianza (approssimata) (3), si usa come approssimazione dall'alto per π il valore $3 + \frac{1}{7}$, ricavato nella successiva *Proposizione* 3. Per confrontare i valori numerici, si tenga presente che

$$\frac{\pi}{4} = 0.78539... \qquad \frac{11}{14} = 0.78571... \tag{5}$$

Poiché la *Proposizione* 2 richiede un risultato della *Proposizione* 3, l'ordine delle tre proposizioni della *Misura del Cerchio* appare sbagliato (almeno, quanto alla loro dipendenza logica) il che avvalora l'ipotesi di una corruzione del testo originario. Più della stima numerica in sé, è però la *dimostrazione* della *Proposizione* 2 a presentare forse un motivo di interesse. Infatti, Archimede vi afferma che il rapporto tra il cerchio e il quadrato del raggio è dato dal rapporto tra due triangoli rettangoli aventi come base comune un cateto (il raggio del cerchio) e come relative altezze la circonferenza rettificata e il diametro. È chiaro dunque (applicando ad esempio il teorema VI.1 degli *Elementi* di Euclide) che *il rapporto tra il cerchio e il quadrato costruito sul raggio è dato dal rapporto tra la circonferenza e il suo diametro* (Fig: 3).

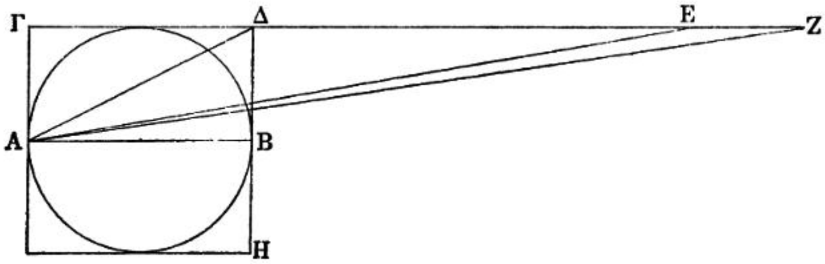


Figura 3: Per costruzione, $\Delta E = 2\,AB$ e $EZ = \frac{1}{7}\,AB$. $4\,A\Gamma\Delta = AB^2$, il quadrato costruito sul diametro. CERCHIO $\approx A\Gamma Z$ per le *Proposizioni* 1 e 3. Dunque:
$$\frac{\text{CERCHIO}}{AB^2}\left(=\frac{1}{4}\frac{\text{CERCHIO}}{\text{RAGGIO}^2}\right) \approx \frac{1}{4}\frac{A\Gamma Z}{A\Gamma\Delta} = \frac{1}{4}\frac{(3+\frac{1}{7})AB}{AB}\left(\approx\frac{1}{4}\frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}}\right) = \frac{11}{14}$$

Pertanto, anche la dimostrazione della *Proposizione* 2 - come il nostro commento finale alla *Proposizione* 1 (pag. 10) - avvalora la congettura che l'Autore avesse conoscenza, arricchita dall'interpretazione geometrica vista sopra, del risultato seguente:

> *In un qualunque cerchio, la costante, oggi chiamata π, che denota il rapporto tra circonferenza e diametro, coincide con il rapporto tra il cerchio e il quadrato costruito sul raggio.*

La questione, per quanto oggi possa (erroneamente) apparire banale, non sembra essere trattata in modo esplicito dai matematici che precedono Archimede ([42], [43]).

3. PROPOSIZIONE 3. *La circonferenza di ogni cerchio è maggiore del triplo del diametro, e lo supera di meno di un settimo e di più di dieci settantunesimi del diametro stesso.*

Si tratta del risultato più famoso della *Misura del Cerchio*. In altri termini, l'enunciato afferma che

$$\left(3+\frac{10}{71}\right)\text{ DIAMETRO} < \text{CIRCONFERENZA} < \left(3+\frac{1}{7}\right)\text{ DIAMETRO}$$

In termini di rapporti:[13]

$$\boxed{3+\frac{10}{71} < \frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}} < 3+\frac{1}{7}} \tag{6}$$

Nella rappresentazione decimale, abbiamo[14]

$$3+\frac{10}{71} = 3.140845.., \qquad \pi = 3.141592..., \qquad 3+\frac{1}{7} = 3.\overline{142857}$$

La strategia di Archimede per dimostrare le disuguaglianze (6) consiste nell'approssimare dall'alto (dal basso) la circonferenza utilizzando i perimetri dei poligoni regolari circoscritti (inscritti). Si parte dagli esagoni regolari e, raddoppiando successivamente il numero del lati, si arriva infine (almeno nel testo che ci è pervenuto) ai poligoni regolari di 96 lati. Si giunge alle approssimazioni finali (6) con un intreccio di geometria e calcolo numerico (si vedano i dettagli nel paragrafo 1.2):

- Lo studio *geometrico* si fonda sul teorema delle bisettrici (Euclide, *Elementi*, Libro VI, Proposizione 3), sulle proprietà dei triangoli simili e sul teorema di Pitagora. Questa trattazione geometrica conduce a procedimenti di calcolo che permettono di ottenere approssimazioni di π (dall'alto e dal basso) sempre più accurate al crescere del numero dei lati dei poligoni regolari (circoscritti e inscritti).
- Il *calcolo numerico* consiste, oltre che nella stima di rapporti, nel calcolo approssimato - per difetto o per eccesso - di radici quadrate (paragrafo 6.2).

Nel prossimo paragrafo, anticipiamo in modo schematico i procedimenti con i quali Archimede ricava le approssimazioni (6) del numero π.

1.2 Metodi per approssimare π dal basso e dall'alto

Senza addentrarci nelle dimostrazioni, vediamo in sintesi il procedimento seguito da Archimede nella *Proposizione* 3 per approssimare, dall'alto e dal basso, il rapporto π tra la circonferenza e il suo diametro.

1) Approssimazioni con poligoni regolari circoscritti.

Cominciamo con le approssimazioni di π dall'alto.

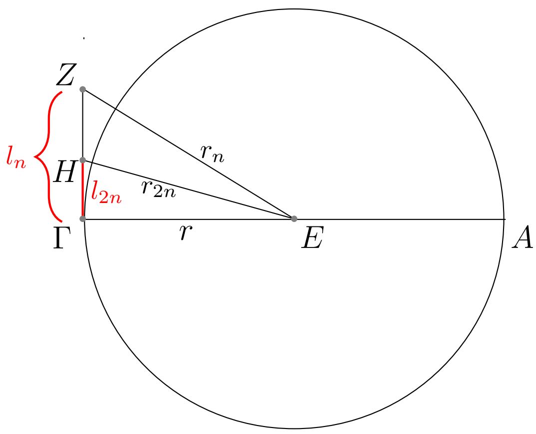


Figura 4: Nel cerchio di centro E e raggio r, $A\Gamma$ è un diametro; $\Gamma Z = l_n$ e $\Gamma H = l_{2n}$ sono i semilati dei poligoni regolari circoscritti P_n e P_{2n}, di n e $2n$ lati rispettivamente; EH è la bisettrice dell'angolo $\angle ZE\Gamma$; r_n e r_{2n} sono i raggi dei cerchi circoscritti a P_n e P_{2n}. (Le proporzioni in figura si riferiscono al caso $n = 6$.)

Per ogni n, chiamiamo l_n il *semilato* del poligono regolare P_n di n lati circoscritto al cerchio di raggio r e sia r_n l'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti l_n e r (r_n è uguale al raggio del cerchio circoscritto a P_n). Poiché la circonferenza è minore del perimetro $n(2l_n)$ del poligono circoscritto[15] P_n, si ha

$$\pi = \frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}} < \frac{\text{PERIMETRO DI } P_n}{2r} = n\,\frac{l_n}{r} \tag{7}$$

Allora, per garantire un'approssimazione di π dall'alto, anche tutti i rapporti l_n/r dovranno essere calcolati con approssimazioni dall'alto. A questo scopo, Archimede trova però più conveniente calcolare inizialmente tutti i rapporti *reciproci* r/l_n - ovviamente ora con approssimazioni *dal basso* - per i poligoni regolari P_n, con $n = 6, 12, 24, 48, 96$. Ottenuta infine una stima dal basso di r/l_{96}, se ne ricava una dall'alto per il reciproco l_{96}/r, e poi (utilizzando la (7)) una stima dall'alto per π:

$$\pi < 96\,\frac{l_{96}}{r}$$

Il motivo per cui risulta più semplice considerare dapprima i rapporti reciproci r/l_n (al posto dei rapporti l_n/r) sta nel fatto che, utilizzando il teorema della bisettrice (Euclide, *Elementi*, Libro VI, *Proposizione* 3) e le proprietà delle proporzioni, Archimede dimostra la semplice uguaglianza[16]

$$\frac{r}{l_{2n}} = \frac{r}{l_n} + \frac{r_n}{l_n}, \tag{8}$$

che sarà la base del procedimento ricorsivo di calcolo, che è il seguente. Il rapporto $\frac{r_n}{l_n}$ si ricava dal teorema di Pitagora $r_n^2 = r^2 + l_n^2$, ed è dato da

$$\frac{r_n}{l_n} = \sqrt{\left(\frac{r}{l_n}\right)^2 + 1} \tag{9}$$

Sostituendo tale valore nell'uguaglianza (8), si trova infine che la *relazione ricorsiva che permette di ricavare il rapporto* r/l_{2n} *in funzione del rapporto* r/l_n (o, nel nostro linguaggio, l_{2n} in funzione di l_n) è data da:

$$\frac{r}{l_{2n}} = \frac{r}{l_n} + \sqrt{\left(\frac{r}{l_n}\right)^2 + 1} \tag{10}$$

Il punto di partenza (la condizione iniziale) di questo procedimento ricorsivo viene dallo studio dell'esagono regolare (caso $n = 6$): Archimede trova l'approssimazione dal basso di $\sqrt{3}$ data da

$$\frac{r}{l_6}\left[= \sqrt{3}\right] > \frac{265}{153} \tag{11}$$

Come in tutti gli altri calcoli numerici che figurano nella *Misura del Cerchio*, non è fornita nel testo alcuna indicazione sui metodi utilizzati per pervenire a questa approssimazione.

La scrittura della successione ricorsiva (10) aiuta a sintetizzare il procedimento di Archimede, ma può essere ingannevole per il lettore moderno. Infatti, qui non si tratta di studiare genericamente la convergenza o il limite di tale successione. Il problema posto e risolto da Archimede è più specifico e di altra natura, oggi diremmo di calcolo numerico. Più precisamente, il problema consiste nel calcolare tutti i termini della successione (10) (a partire da $\frac{r}{l_6}$ fino a $\frac{r}{l_{96}}$, almeno nel testo che ci è pervenuto) mediante *approssimazioni per difetto*. In particolare (nel caso dei poligoni circoscritti), *tutte le radici quadrate che figurano in* (10) *dovranno essere calcolate per difetto*. Con il termine approssimazioni, intendiamo qui, ovviamente, approssimazioni razionali, cioè espresse in termini di rapporti tra interi. Inoltre, i denominatori dovranno essere scelti quanto più possibile piccoli, in modo da rendere i conti più facilmente praticabili.

Partendo dalla stima iniziale per $\frac{r}{l_6}$ data da (11), nella *Proposizione* 3 sono successivamente stimati per difetto, utilizzando la formula ricorsiva (10), tutti i rapporti $\frac{r}{l_{12}}, \frac{r}{l_{24}}, \frac{r}{l_{48}}$, fino alla stima

$$\frac{r}{l_{96}} > \frac{4673 + \frac{1}{2}}{153} \tag{12}$$

Dalla (7) segue allora, passando ai reciproci nella (12),

$$\pi < \frac{\text{PERIMETRO DI } P_{96}}{2r} = 96\,\frac{l_{96}}{r} < 96\,\frac{153}{4673 + \frac{1}{2}} < 3 + \frac{1}{7} \tag{13}$$

(Si vedano i paragrafi 5.2.1 (pag. 55) e 6.2 per i dettagli sui conti.)

2) Approssimazioni con poligoni regolari inscritti.

Passiamo ora alle approssimazioni di π dal basso. Chiamiamo s_n il *lato* del poligono regolare P'_n di n lati inscritto nel cerchio di raggio r, e chiamiamo d_n il secondo cateto del triangolo rettangolo avente l'ipotenusa $2r$ e un cateto uguale a s_n.

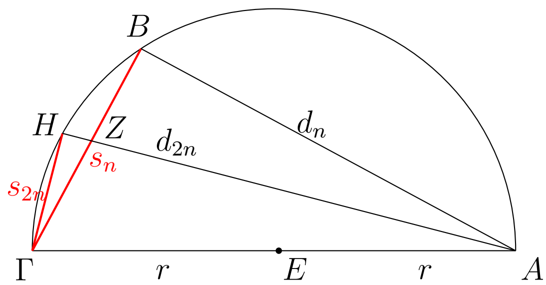


Figura 5: $s_n = B\Gamma$ e $s_{2n} = H\Gamma$ sono i lati dei poligoni regolari inscritti con n e $2n$ lati; AH è la bisettrice dell'angolo $\angle \Gamma AB$; $d_n = AB$ e $d_{2n} = AH$. (In figura è riportato il caso $n = 6$.)

Poiché la circonferenza è maggiore del perimetro del poligono inscritto P'_n, abbiamo

$$n\,\frac{s_n}{2r} = \frac{\text{PERIMETRO DI } P'_n}{2r} < \frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}} = \pi \tag{14}$$

Ora, per approssimare π dal basso, anche tutti i rapporti $s_n/(2r)$ dovranno essere approssimati dal basso. Come nel caso dei poligoni circoscritti, Archimede trova più conveniente prendere in considerazioni i reciproci, cioè i rapporti $2r/s_n$ Infatti, posto

$$\gamma_n = \frac{d_n}{s_n}, \qquad \delta_n = \frac{2r}{s_n} \tag{15}$$

Archimede trova un modo semplice per passare ricorsivamente da $\delta_n = \frac{2r}{s_n}$ a $\delta_{2n} = \frac{2r}{s_{2n}}$, nel modo seguente. Dal teorema della bisettrice, applicato al triangolo $AB\Gamma$ e dalla similitudine dei triangoli $AH\Gamma$ e $FH\Gamma$ segue,[17] per ogni n,

$$\gamma_{2n} = \gamma_n + \delta_n \tag{16}$$

mentre dal teorema di Pitagora si ricava

$$\delta_n^2 = \gamma_n^2 + 1, \qquad \delta_n = \sqrt{\gamma_n^2 + 1} \tag{17}$$

Allora, dimezzando gli angoli al centro e quindi raddoppiando il numero dei lati, si passa dalla coppia di rapporti γ_n, δ_n alla coppia successiva γ_{2n} e δ_{2n}, tramite le uguaglianze

$$\gamma_{2n} = \gamma_n + \delta_n \tag{18}$$

$$\delta_{2n} = \sqrt{(\gamma_n + \delta_n)^2 + 1} \tag{19}$$

Per approssimare i rapporti $s_n/2r$ dal basso, tutti i rapporti $\delta_n = 2r/s_n$, e quindi anche tutti i γ_n, devono ora essere approssimati dall'alto. In particolare, le approssimazioni delle radici quadrate dovranno ora essere stimate per eccesso.

Il caso iniziale è quello dell'esagono inscritto ($n = 6$), per il quale

$$\gamma_6 = \frac{d_6}{s_6}\ \left(= \sqrt{3}\right) < \frac{1351}{780} \qquad \frac{2r}{s_6} = 2 \tag{20}$$

Tramite i valori iniziali (20) e le relazioni ricorsive (18), nel testo si calcolano delle stime dall'alto successivamente per $\delta_6, \delta_{12}, \delta_{24}, \delta_{48}$ fino a

$$\delta_{96} = \frac{2r}{s_{96}} < \frac{2017 + \frac{1}{4}}{66}$$

Da quest'ultima stima, essendo il perimetro di P'_{96} uguale a $96 s_{96}$, segue

$$\pi > \frac{\text{PERIMETRO DI } P'_{96}}{2r} = 96\frac{s_{96}}{2r} > \frac{96 \times 66}{2017 + \frac{1}{4}} = \frac{6336}{2017 + \frac{1}{4}} > 3 + \frac{10}{71} \tag{21}$$

(Per i dettagli sui calcoli, si vedano i paragrafi 5.3.1 e 6.2.)

Riassumendo, la *Proposizione* 3 si conclude allora con la doppia approssimazione

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} \tag{22}$$

I metodi utilizzati da Archimede per il calcolo approssimato (per difetto e per eccesso) di $\sqrt{3}$ e di tutte le altre radici quadrate che figurano nei procedimenti ricorsivi descritti sopra (le (10) e le (17)) non si conoscono con certezza. La letteratura scientifica su questo tema è molto vasta e non ne faremo una discussione critica.[18] Per il lettore interessato, alcuni metodi per effettuare le approssimazioni, e i dettagli dei conti, sono presentati nel paragrafo 6.

1.3 Digressione: alcune scoperte di Archimede sul cerchio e sulla sfera

Lasciando per il momento la *Misura del Cerchio*, facciamo una breve digressione su altri importanti risultati di Archimede sulla superficie e sul volume della sfera, che in modo implicito riguardano il numero π. Abbiamo già visto che il rapporto costante π tra la circonferenza e il diametro di un qualunque cerchio (calcolato nella *Misura del Cerchio*, *Proposizione* 3) coincide con il rapporto tra il cerchio e il quadrato costruito sul suo raggio. Archimede estese lo studio ad altri due rapporti: quello tra la superficie della sfera e il quadrato del suo raggio, e quello tra il volume della sfera e il cubo del suo raggio. Riportiamo (senza dimostrazioni) gli enunciati di questi ultimi due importanti risultati, dimostrati da Archimede nel trattato *Sulla Sfera e il Cilindro Sulla Sfera e il Cilindro I*.[19]

Περὶ Σφαῖρας καὶ κυλίνδρου	*Sulla Sfera e il Cilindro I*
λγʹ	(*Proposizione*) 33
Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.	La superficie di ogni sfera è quadrupla del suo cerchio massimo.[20]
λδʹ	(*Proposizione*) 34
Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστω κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.	Ogni sfera è quadrupla di un cono avente base uguale al cerchio massimo della sfera[21] e altezza uguale al raggio della sfera.

Come si vede, Archimede non usa formule e esprime i risultati in forma geometrica, ossia in termini di rapporti tra figure.[22] Noi invece, facendo uso delle notazioni moderne, aggiungeremo alla forma geometrica le ben note formule algebriche che esprimono lunghezze, aree e volumi - relative al cerchio e alla sfera - in funzione del loro raggio. Abbiamo già visto come dalla *Proposizione* 1 della *Misura del Cerchio* segua facilmente che il rapporto tra circonferenza e diametro - che è lo stesso per ogni cerchio e oggi denotiamo con π - coincida con il rapporto tra cerchio e quadrato costruito sul raggio, che è indipendente dal cerchio (come già dimostrato in Euclide, *Elementi*, XII). Includendo i risultati delle *Proposizioni* 33 e 34 riportate sopra, riassumiamo allora le formule relative a cerchi e sfere, in cui compare la costante π, nel nodo seguente.

$$\frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}} = \pi$$

L'usuale definizione di π. La lunghezza L della circonferenza è data allora da $L = 2\pi r$.

$$\frac{\text{CERCHIO}}{\text{RAGGIO}^2} = \pi$$

L'uguaglianza di questo rapporto con il precedente segue dalla *Proposizione* 1 della *Misura del Cerchio.* (Si veda pag. 10.) L'area $\mathcal{A}$ del cerchio è data da $\mathcal{A} = \pi r^2$.

$$\frac{\text{SUPERFICIE DELLA SFERA}}{\text{RAGGIO}^2} = 4\pi$$

Per la *Proposizione* 33 sopra, la superficie $\mathcal{S}$ della sfera è $\mathcal{S} = 4\pi r^2$.

$$\frac{\text{VOLUME DELLA SFERA}}{\text{RAGGIO}^3} = \frac{4}{3}\pi$$

Il volume del cono è ⅓ BASE×ALTEZZA (Euclide, *Elementi*, XII.10). Pertanto, per la *Proposizione* 34 qui sopra, il volume $\mathcal{V}$ della sfera è dato da $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Non possiamo omettere di citare altri due eleganti risultati di Archimede, dimostrati nello stesso trattato come corollari delle precedenti Proposizioni:

- *Il volume della sfera è* 2/3 *del volume del cilindro circoscritto;*
- *La superficie della sfera è* 2/3 *della superficie (totale) del cilindro ad essa circoscritto.*

Secondo le numerose notizie a carattere aneddotico che lo riguardano, sembra che Archimede fosse giustamente orogoglioso di queste sue scoperte sulle relazioni tra la sfera e il cilindro circoscritto, al punto che desiderasse che fossero ricordate sulla propria tomba. Il che fu fatto, secondo la testimonianza di Cicerone, che a Siracusa andò in cerca di tale tomba, e la riconobbe.[23] Ecco il passo di Archimede (*Sulla Sfera e il Cilindro, I*, [24]) con gli enunciati delle sue bellissime scoperte:

Περὶ Σφαῖρας καὶ κυλίνδρου

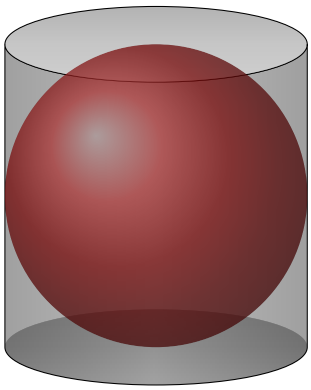
[ΠΟΡΙΣΜΑ]

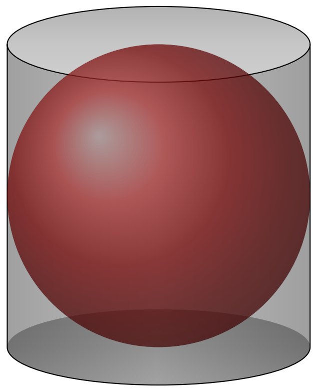
Πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τόν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ μετὰ τῶν βάσεων ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Sulla Sfera e il Cilindro I

[*Corollario*] (*alla Proposizione* 34)

Ogni cilindro avente come base il cerchio massimo della sfera e altezza uguale al diametro della sfera è una volta e mezza la sfera e anche la sua stessa superficie, con le basi, è una volta e mezza la superficie della sfera.





$$\text{VOLUME DELLA SFERA} = \frac{2}{3}\,\text{VOLUME DEL CILINDRO CIRCOSCRITTO}$$

$$\text{SUPERFICIE DELLA SFERA} = \frac{2}{3}\,\text{SUPERFICIE DEL CILINDRO CIRCOSCRITTO}$$

Questi ultimi due risultati sono una immediata conseguenza (corollario, πόρισμα) della precedente *Proposizione* 34, in quanto il volume del cilindro circoscritto alla sfera è $(\pi r^2) \times 2r = 2\pi r^3$ e la sua area totale del cilindro (basi incluse) è $2\pi r^2 + (2\pi r)2r = 6\pi^2$.

Nella lettera a Dositeo - all'inizio del trattato *Sulla Sfera e il Cilindro I* - Archimede, orgoglioso di questi risultati, si stupisce (un po' ironicamente?) che nessuno dei precedenti studiosi di geometria le abbia scoperte prima di lui:

Ἀρχιμήδες Δοσιθέῳ χαίρειν

ταῦτα δὲ τὰ συμπτώματα τῇ φύσει προυπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, ἠγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γηωμετρίαν ἀνεστραμμένων οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινενοηκότος, ὅτι τούτων τῶν σχημάτων ἐστὶν συμμετρία.

Archimede a Dositeo, rallegrati

Ora queste proprietà già preesistevano, per la natura stessa delle figure considerate, eppure erano ignorate da coloro che prima di noi si occuparono di geometria, neppure uno di loro essendosi accorto che tra queste figure c'è simmetria.

Il concetto espresso dal termine greco (e italiano) *simmetria* è qui di difficile interpretazione. Nel linguaggio della geometria greca, uno dei significati di *simmetria* è *commensurabilità* (il corrispondente termine latino). Il rapporto - sia dei volumi sia delle superfici - tra sfera e cilindro è espresso dalla frazione 2/3; cioè, sfera e cilindro si possono 'insieme misurare' o 'insieme confrontare' per mezzo dei numeri interi 2 e 3. È presumibile, però, che Archimede qui alluda (oltre alla commensurabilità) anche alla particolare semplicità e armonia di tale rapporto.[24]

2 La Misura del Cerchio

I termini tra parentesi quadre, in corsivo, sono aggiunti nel testo tradotto per faciltarne la comprensione.

2.1 Testo greco e traduzione

ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ	LA MISURA DEL CERCHIO
α΄. Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.	1. Ogni cerchio è uguale[25] a un triangolo rettangolo, in cui il raggio [*del cerchio*] è uguale a uno dei lati dell'angolo retto e la circonferenza è [*uguale*] alla base.[26]
Ἐχέτο δ ΑΒΓΔ κύκλος τριγώνῳ τῷ Ε, ὡς ὑπόκειται: λεγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν.	Infatti, il cerchio ΑΒΓΔ[27] stia al triangolo E, così come si è stabilito: dico che [*il cerchio*] è uguale [*al triangolo*].[28]

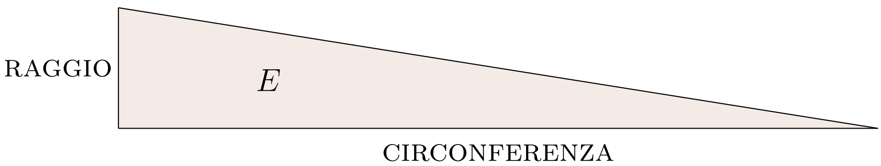


Figura 6: Triangolo rettangolo *E* equivalente al cerchio: i cateti sono il raggio del cerchio e la circonferenza rettificata.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος,	Se possibile, infatti, sia maggiore il cerchio[29];
καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον,	si inscriva il quadrato [*di diagonale*] ΑΓ,
καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι διχα,	e si dividano [*successivamente*] gli archi [*sottesi dai lati*] in due parti uguali;
καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἔλασσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερεχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου·	e i segmenti [*circolari*] siano già minori [*abbiano somma minore*] della differenza per la quale il cerchio supera il triangolo.[30]

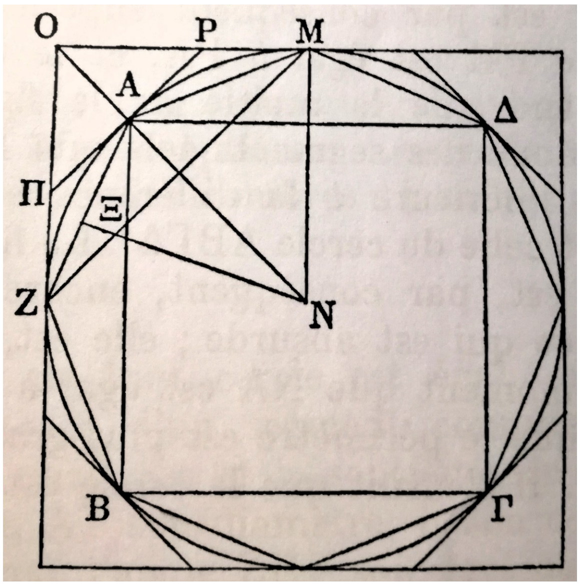


Figura 7: Cerchio con poligoni inscritti e circoscritti. (Figura in Heiberg, [26].)

τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον.

Il poligono sarà dunque maggiore del triangolo.[31]

Εἰλήφθω κέντρον τό N καί κάθετος ἡ NΞ ·

Si considerino il centro N e il segmento prependicolare NΞ;

ἐλάσσων ἄρα ἡ NΞ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς.

dunque NΞ sarà minore del lato del triangolo [*del triangolo E*].

Ἔστιν δέ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθύγραμμου τῆς λοιπῆς ἐλαττων, ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου ·

Inoltre, anche il perimetro del poligono è minore dell'altro cateto [*di* E], perché è [*minore*] della circonferenza.

ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ E τριγώνου · ὅπερ ἄτοπον.

Il poligono è pertanto minore[32] del triangolo E; il che è assurdo[33].

Ἔστω δὲ ο κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ E τριγώνου, καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα,
καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων·
ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ OAP.

Sia ora il cerchio, se possibile, minore del triangolo E; si circoscriva il quadrato; si dividano [*successivamente*] gli archi in due parti uguali, e per i punti [*di divisione*] si conducano le tangenti;[34]
dunque, è retto l'angolo OAP.[35]

Ἡ OP ἄρα τῆς MP ἐστὶν μείζων · ἡ γὰρ PM τῇ PA ἴση ἐστί · καὶ τὸ POΠ

Allora OP è maggiore[36] di MP: infatti, PM è uguale a PA; pertanto, τρίγωνον ἄρα τοῦ ΟΖΑΜ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ.

il triangolo ΡΟΠ è maggiore della metà della figura ΟΖΑΜ.[37]

Λελείφθωσαν οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ·

Rimangano i [*segmenti*] simili al segmento ΠΖΑ minori [*di somma minore*] della differenza, per la quale E supera il cerchio.[38]

ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ Ε ἐστὶν ἔλασσον ·

Dunque il poligono circoscritto è minore del triangolo E.[39]

ὅπερ ἄτοπον · ἔστιν γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ΝΑ ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου.

Il che è assurdo: infatti, è più grande[40], poiché NA è uguale al cateto del triangolo, mentre il perimetro è maggiore della base del triangolo [E].

Ἴσος ἄρα ο κύκλος τῷ Ε τριγώνῳ.

Pertanto, il cerchio è uguale al triangolo E.[41]

(Fine della *Proposizione* 1.)

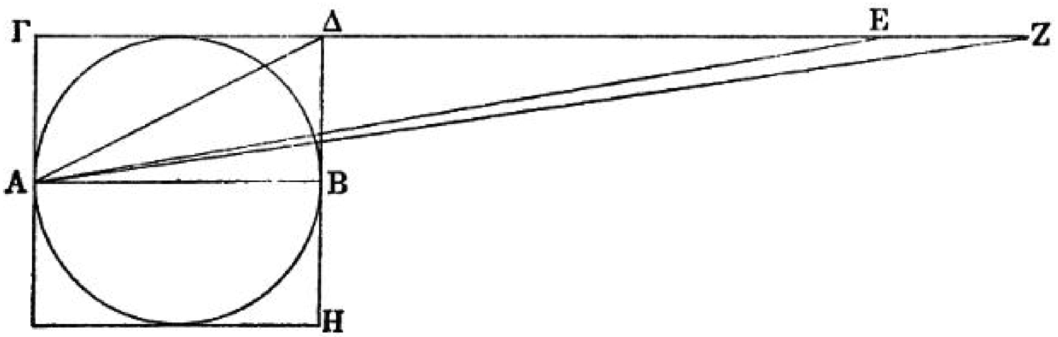


Figura: *Proposizione* 2. Calcolo del rapporto tra il cerchio e il quadrato costruito sul diametro. (Figura in Heiberg, [26].)

β′.

Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια′ πρὸς ιδ′.

Ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ ΓΗ,
καὶ τῆς ΓΔ διπλῆ ἡ ΔΕ, ἕβδομον δὲ ἡ ΕΖ τῆς ΓΔ.
Ἐπεῖ οὖ τὸ ΑΓΕ πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν κα′ πρὸς ζ′, πρὸς δὲ τὸ ΑΕΖ τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ πρὸς ἕν, τὸ ΑΓΖ πρὸς τὸ ΑΓΔ ἐστίν, ὡς κβ′ πρὸς ζ′.
Ἀλλὰ τοῦ ΑΓΔ τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ΓΗ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΓΔΖ τρίγωνον τῷ ΑΒ κύκλῳ ἴσον ἐστίν (ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΓ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων καὶ τῷ ζ′ ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται) ·

ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ ΓΗ τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια′ πρὸς ιδ′.

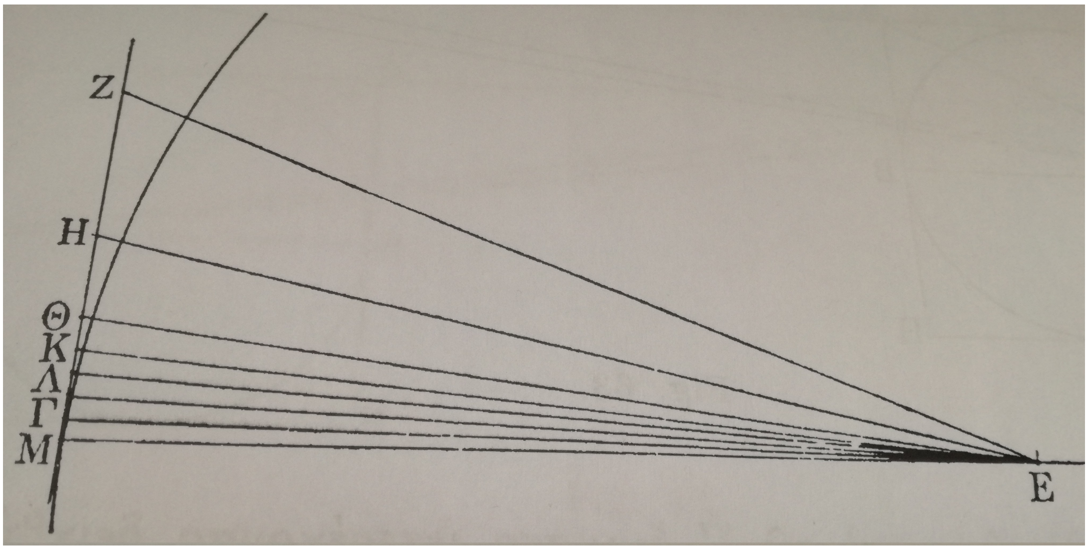
2.

Il cerchio, rispetto al quadrato [*costruito*] sul diametro, ha il rapporto di 11 a 14.

Si consideri un cerchio, il cui diametro [*sia*] AB, e si circoscriva il quadrato [*di diagonale*] ΓH,
e [*sia*] ΔE doppio di ΓΔ, mentre [*sia*] EZ un settimo di ΓΔ.
Poiché allora AΓE ha rapporto rispetto a AΓΔ come 21 a 7, e AEZ ha rapporto rispetto a AΓΔ come 7 a 1, AΓZ sta a AΓΔ come 22 a 7.[42]

Ma il quadrato [*di diagonale*] ΓH è quadruplo[43] di AΓΔ, mentre il triangolo AΓΔZ è uguale[44] al cerchio [*di diametro*] AB (infatti il cateto AΓ è uguale al raggio, mentre la base, [*che è*] tre volte e $^1/_7$ il diametro, sarà dimostrata[45] [*essere*] un'ottima approssimazione per eccesso [*della circonferenza*]).[46]
Dunque, il cerchio ha rapporto, rispetto al quadrato ΓH, di 11 a 14.[47]

(Fine della *Proposizione* 2.)



Lati di poligoni regolari circoscritti. (Figura in Heiberg, [26], Proposizione 3.)

γ΄.

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μέν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Ε καὶ ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου ὀρθῆς · ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει, ὃν τϛ΄ πρὸς ρνγ΄, ἡ δὲ ΕΓ πρὸς [τῆν] ΓΖ λόγον ἔχει, ὃν σξε΄ πρὸς ρνγ΄.

3.

Il perimetro[48] di ogni cerchio è maggiore del triplo del diametro, e eccede ancora [*il triplo del diametro*] di meno di un settimo del diametro, e di più dei dieci settantunesimi[49] [*del diametro*].

Sia [*dato*] un cerchio, il diametro ΑΓ, il centro Ε, ΓΛΖ una tangente e [*l'angolo*] ΖΕΓ un terzo di un retto; allora ΕΖ ha rapporto rispetto a ΖΓ, come 306 a 153 e ΕΓ ha rapporto rispetto a ΓΖ, come 265 a 153.[50]

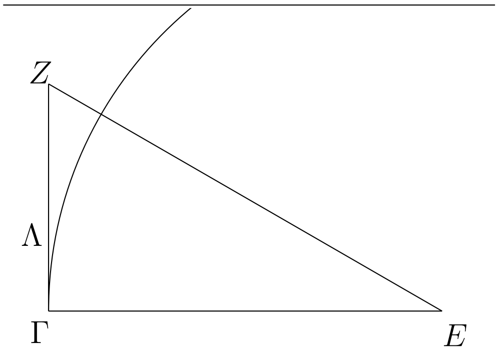


Figura. ΓZ è il semilato dell'esagono regolare circoscritto al cerchio di centro E.

Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ δίχα τῇ ΕΗ · ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ (καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι).
Ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΖΕ, ΕΓ πρὸς ΖΓ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΗ · ὥστε ἡ ΓΕ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ φοα΄ πρὸς ρνγ΄.

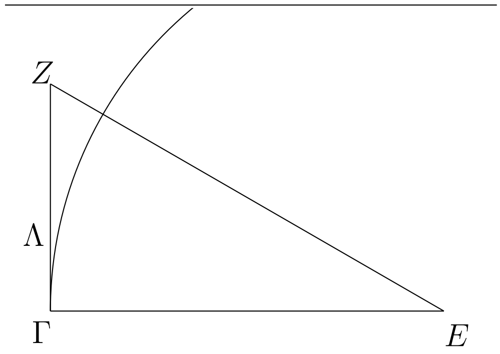


Figura. ΓZ è il semilato dell'esagono regolare circoscritto al cerchio di centro E.

Si divida in due parti uguali [*l'angolo*] ΖΕΓ con ΕΗ; allora[51] ΖΕ sta a ΕΓ come ΖΗ a ΗΓ (permutando e componendo)[52].
Allora[53], la somma di ΖΕ e ΕΓ sta a ΖΓ, come ΕΓ sta a ΓΗ; il rapporto di ΓΕ a ΓΗ è dunque maggiore del rapporto di 571 a 153.

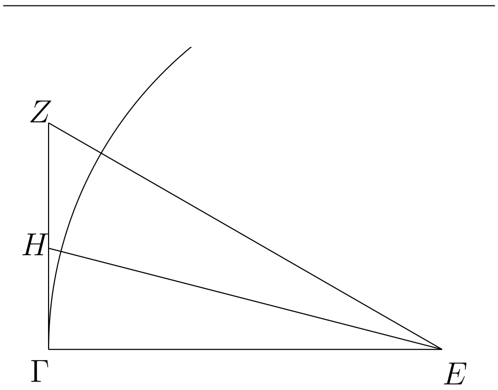


Figura. ΓZ e ΓH sono i semilati dei poligoni regolari di 6 e 12 lati circoscritti al cerchio di centro E. (EH è la bisettrice.)

Ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΓ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$,θυν΄ πρὸς $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γυθ΄ · μήκει ἄρα, ὃν φϟα΄ η΄ πρὸς ρνγ΄.

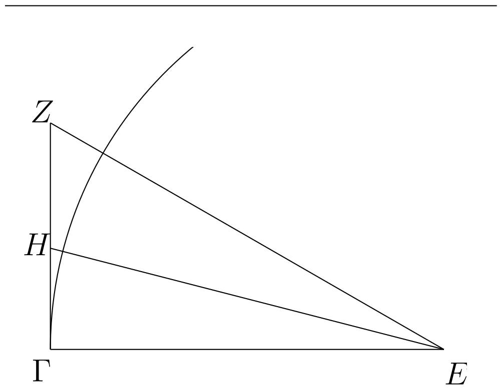


Figura. ΓZ e ΓH sono i semilati dei poligoni regolari di 6 e 12 lati circoscritti al cerchio di centro E. (EH è la bisettrice.)

Dunque, al quadrato[54], ΕΗ sta a ΗΓ come 349.450 a 23.409;[55]pertanto, come lunghezze, [*EH sta a HΓ*] come $591\frac{1}{8}$ a 153.[56]

Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ΗΕΓ τῇ ΕΘ · διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ ΕΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵αρξβ´ η´ πρὸς ρνγ´·

ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵αροβ´ η´ πρὸς ρνγ´.

[*Si divida*] ancora in due [*parti uguali l'angolo*] ΗΕΓ mediante ΕΘ; per gli stessi motivi [*precedenti*], dunque, il rapporto[57] tra ΕΓ e ΓΘ è maggiore di quello di $1162\frac{1}{8}$ e 153; pertanto il rapporto[58]di ΘE a ΘΓ è maggiore di quello di $1172\frac{1}{8}$ a 153.

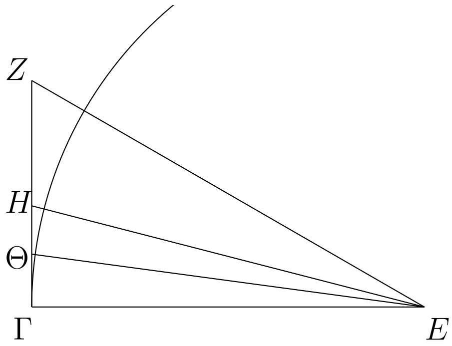


Figura. $E\Theta$ è la bisettrice di $\angle HE\Gamma$ e quindi ΘΓ è il semilato del poligono regolare circoscritto di 24 lati.

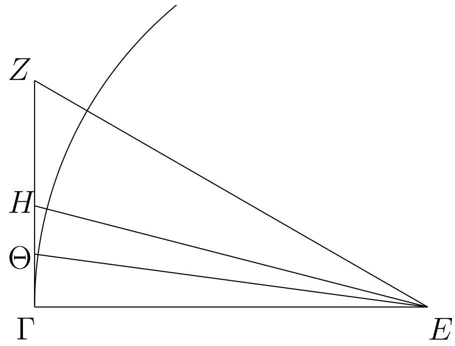


Figura. $E\Theta$ è la bisettrice di $\angle HE\Gamma$ e quindi ΘΓ è il semilato del poligono regolare circoscritto di 24 lati.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΕΓ τῇ ΕΚ · ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵βτλδ´ δ´ πρὸς ρνγ´.

[*Si divida*] ancora in due [*l'angolo*] ΘΕΓ con ΕΚ; il rapporto di ΕΓ a ΚΓ è dunque[59]maggiore del rapporto tra $2334\frac{1}{4}$ e 153.

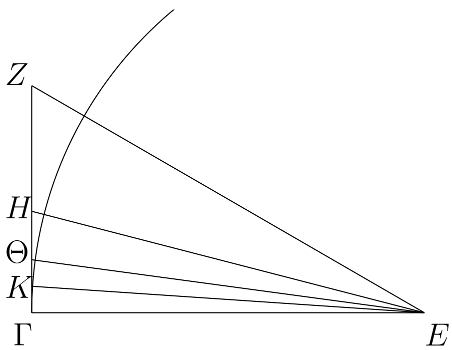


Figura. EK è la bisettrice di $\angle \Theta E\Gamma$ e quindi $K\Gamma$ è il semilato del poligono regolare circoscritto di 48 lati.

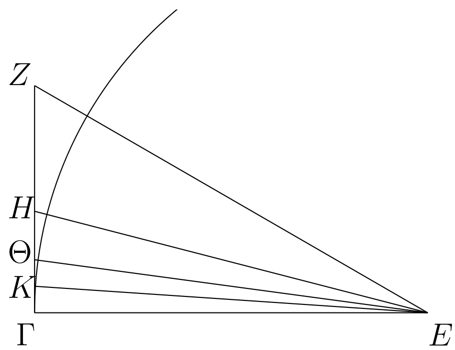


Figura. EK è la bisettrice di $\angle \Theta E\Gamma$ e quindi $K\Gamma$ è il semilato del poligono regolare circoscritto di 48 lati.

ἡ ΕΚ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα ἢ ὃν ͵βτλθ΄ δ΄ πρὸς ρνγ΄.

Quindi il rapporto di EK a ΓK è maggiore[60] di quello che $2339\frac{1}{4}$ ha rispetto a 153.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΕΓ τῇ ΛΕ · ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΛΓ μείζονα [μήκει] λόγον ἔχει ἤπερ τὰ ͵δχογ΄ ∠΄ πρὸς ρνγ΄.

[*Si divida*] ancora in due KEΓ con ΛE; EΓ ha dunque, rispetto a ΛΓ, un rapporto maggiore[61] di $4673\frac{1}{2}$ a 153.

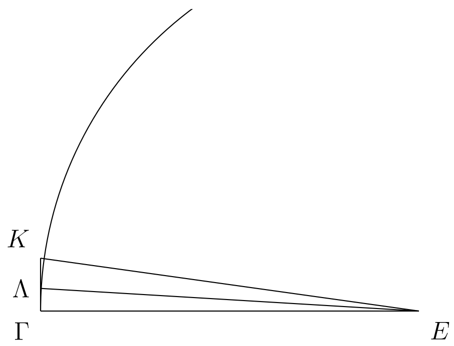


Figura. $K\Gamma$ è il semilato del poligono regolare circoscritto di 48 lati e $E\Lambda$ è la bisettrice di $\angle KE\Gamma$. Dunque ΓΛ è il semilato del poligono regolare ciroscritto di 96 lati.

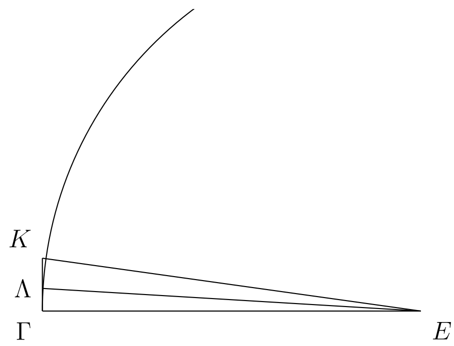


Figura. $K\Gamma$ è il semilato del poligono regolare circoscritto di 48 lati e $E\Lambda$ è la bisettrice di $\angle KE\Gamma$. Dunque ΓΛ è il semilato del poligono regolare ciroscritto di 96 lati.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ ΛΕΓ ὀρθῆς ἐστι μη΄.

Poiché dunque ZEΓ, che è un terzo di [*angolo*] retto, è stato diviso per quattro volte in due [*parti uguali*], ΛEΓ è $^1/_{48}$ di [*angolo*] retto.[62]

Κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση πρὸς τῷ Ε ἡ ὑπὸ ΓΕΜ · ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΕΜ ὀρθῆς ἐστι κδ΄. Καὶ ἡ ΛΜ ἄρα εὐθεῖα τοῦ περὶ τὸν κύκλον ἐστὶ πολυγώνου πλευρὰ πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ΄.

Si ponga uguale ad esso ΓEM, [*con vertice*] in E. Dunque, ΛEM è $^1/_{24}$ di [*angolo*] retto. E quindi il segmento ΛM è il lato del poligono, [*circoscritto*] al cerchio, avente 96 lati.

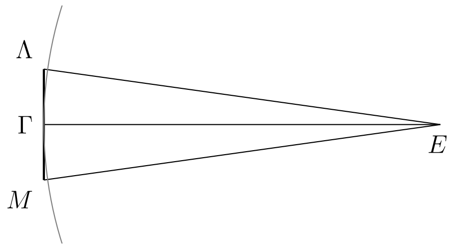


Figura Gli angoli $\angle\Lambda E\Gamma$ e $\angle\Gamma EM$ sono entrambi la 48-esima parte di un angolo retto. Dunque $\angle\Lambda EM$ è la 24-esima parte di un angolo retto e quindi ΛM è il lato del poligono regolare ciroscritto di 96 lati.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΛ ἐδείχθη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ͵δχογ´∠´ πρὸς ρνγ´, ἀλλὰ τῆς μὲν ΕΓ διπλῆ ἡ ΑΓ, τῆς δὲ ΓΛ διπλασίων ἡ ΛΜ, καὶ ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϟϛ´ γώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ´∠´ πρὸς $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$͵δχπη´.

Καὶ ἔστιν τριπλασία, καὶ ὑπερέχουσιν χξζ´∠´, ἅπερ τῶν ͵δχογ´∠´ ἐλάττονά ἐστιν ἢ τὸ ἕβδομον · ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστῖ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον ·

ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περιμέτρος πολύ μᾶλλον ἐλάσσον ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τρίτου ὀρθῆς ·

ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ ἐλάσσονά λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵ατνα´ πρὸς ψπ´ [ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ὃν ͵αφξ´ πρὸς ψπ´].

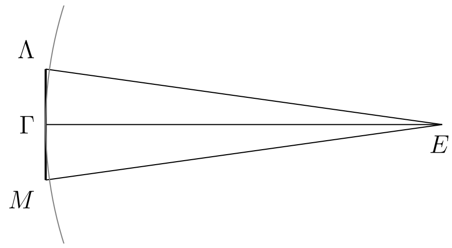


Figura Gli angoli $\angle\Lambda E\Gamma$ e $\angle\Gamma EM$ sono entrambi la 48-esima parte di un angolo retto. Dunque $\angle\Lambda EM$ è la 24-esima parte di un angolo retto e quindi ΛM è il lato del poligono regolare ciroscritto di 96 lati.

Poiché dunque si è dimostrato che ΕΓ ha rapporto, rispetto a ΓΛ, maggiore di quello che $4673\frac{1}{2}$ ha rispetto a 153, che ΑΓ è doppio[63]di ΕΓ, e che ΛΜ è il doppio di ΓΛ, allora anche ΑΓ ha, rispetto al poligono di 96 lati, un rapporto maggiore[64]di quello di $4673\frac{1}{2}$ a 14688.

Ora, [14688] è tre volte più grande [di $4673\frac{1}{2}$], con l'avanzo[65]di $667\frac{1}{2}$, che è minore di un settimo di $4673\frac{1}{2}$. Di conseguenza, il perimetro del poligono circoscritto al cerchio è uguale[66] a tre volte il diametro, con l'aggiunta di una parte che è minore di un settimo del diametro.

Pertanto, il perimetro del cerchio è, a maggior ragione, minore del triplo più un settimo del diametro.[67]
[$\textit{CIRCONFERENZA} < (3 + {}^{1}/{}_{7})\ \textit{DIAMETRO}$]

Sia ora un cerchio di diametro ΑΓ, e sia ΒΑΓ un terzo di angolo retto; dunque ΑΒ ha, rispetto a ΒΓ, un rapporto minore di quello che 1351 ha rispetto a 780. [Mentre ΑΓ sta a ΒΓ come 1560 sta a 780.][68]

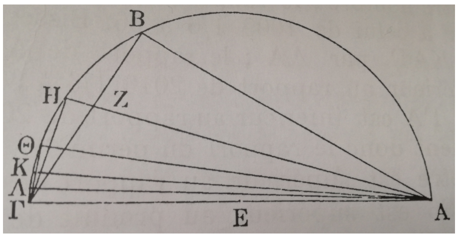


Figura. Poligoni regolari inscritti. (Figura in Heiberg, [26]).

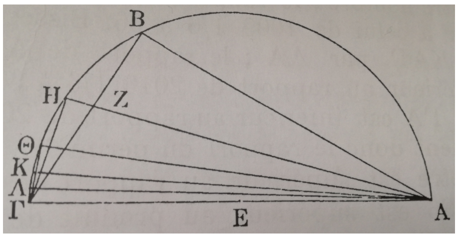


Figura. Poligoni regolari inscritti. (Figura in Heiberg, [26]).

Δίξα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ΑΗ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΒ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ ὀρθή· καὶ τρίτη ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΖΓ τρίτῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΗ ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΓΗΖ τριγώνῳ·
ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ καὶ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ, [καὶ] συναμφότερος ἡ ΓΑΒ πρὸς ΒΓ· καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ.

Διὰ τοῦτο οὖν ἡ ΑΗ πρὸς [τὴν] ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵βϡια′ πρὸς ψπ′, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ ἐλάσσονα ἢ ὃ͂ν ͵γιγ′ ∠′ δ′ πρὸς ψπ′.

Δίχα ἡ ὑπὸ ΓΑΗ τῇ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵εϡκδ′ ∠′ δ′ πρὸς ψπ′ ἢ ὃν ͵αωκγ′ πρὸς σμ′·
ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ′ ιγ′·

ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἢ ὃν ͵αωλη′ θ′ ια′ πρὸς σμ′.

Si divida in due parti uguali [*l'angolo*] ΒΑΓ mediante ΑΗ. Dunque, poiché ΒΑΗ è uguale sia a ΗΓΒ sia a ΗΑΓ, ΗΓΒ è uguale a ΗΑΓ.[69] Ed è comune [*l'angolo*] retto[70] ΑΗΓ; dunque il terzo [*angolo*] ΗΖΓ è uguale al terzo [*angolo*] ΑΓΗ.
Dunque [*il triangolo*] ΑΗΓ ha gli angoli uguali a quelli di ΓΗΖ;
dunque ΑΗ sta a ΗΓ come ΗΓ sta a ΗΖ, e come ΑΓ a ΓΖ.[71] Ma ΑΓ sta a ΓΖ come la somma di ΓΑ e ΑΒ sta a ΒΓ, e di conseguenza la somma di ΒΑ e ΑΓ sta a ΒΓ come ΑΗ a ΗΓ.[72]

Di conseguenza, ΑΗ ha un rapporto, rispetto a ΗΓ, minore[73] del rapporto di 2911 rispetto a 780, e il rapporto di ΑΓ a ΓΗ è minore del rapporto[74] di $3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ a 780.

Si bisechi ora l'angolo ΓΑΗ mediante ΑΘ; per gli stessi motivi, ΑΘ ha rispetto a ΘΓ rapporto[75] minore di $5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ a 780, o di 1823 a 240; infatti, gli uni [1823 *e* 240] stanno [*ordinatamente*] agli altri [$5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ *e* 780] nel rapporto di 4 a 13;[76] pertanto, il rapporto tra ΑΓ e ΓΘ è minore di quello tra $1838\frac{9}{11}$ e 240.[77]

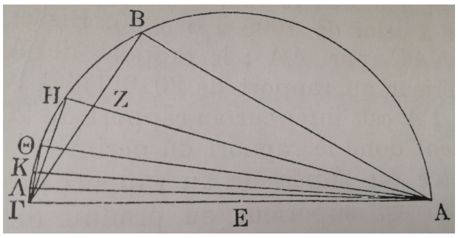


Figura. Poligoni regolari inscritti. (Figura in Heiberg, [26]).

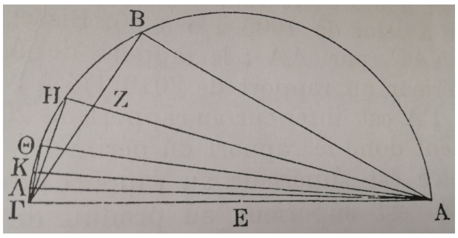


Figura. Poligoni regolari inscritti. (Figura in Heiberg, [26]).

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ· καὶ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα [ἄρα] λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵αζʹ πρὸς ξϛʹ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ιαʹ μʹ.

Bisechiamo ancora ΘΑΓ mediante ΑΚ; il rapporto tra ΑΚ e ΚΓ è minore del rapporto che 1007 ha rispetto a 66; ognuno di essi sta infatti ad altri due [*opportuni termini*] come 11 a 40.[78]

Ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ ὃν ͵αθʹϛʹ πρὸς ξϛʹ.

Dunque il rapporto tra ΑΓ a ΚΓ è minore di quello di $1009\frac{1}{6}$ a 66.[79]

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ· ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ ͵βιϛʹϛʹ πρὸς ξϛʹ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα ἢ τὰ ͵βιζʹδʹ πρὸς ξϛʹ.

Bisechiamo ancora ΚΑΓ con ΛΑ; il rapporto tra ΑΛ e ΛΓ è minore del rapporto[80] tra $2016\frac{1}{6}$ e 66, mentre il rapporto[81] di ΑΓ a ΓΛ è minore del rapporto tra $2017\frac{1}{4}$ e 66.

Ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵ϛτλϛʹ πρὸς ͵βιζʹδʹ, ἅπερ τῶν ͵βιζʹδʹ μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οαʹ·

Dunque, invertendo [*passando ai reciproci*],[82] il perimetro del poligono ha rapporto, rispetto al diametro, maggiore del rapporto di 6336 a $2017\frac{1}{4}$, [*mentre* 6336] è maggiore[83] di $2017\frac{1}{4}$ moltiplicato per $3\frac{10}{71}$.

καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϟϛʹγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ιʹοαʹ·

E dunque il perimetro del 96-gono [*poligono regolare di* 96 *lati*] [*inscritto*] nel cerchio è più del triplo del diametro e [*supera il triplo del diametro*] di più di 10/71 [*del diametro*].

ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι′ οα′.

Pertanto il [*perimetro del*] cerchio è più che triplo [*del diametro*] e maggiore di più di 10/71 [*del diametro*].
$\left[\textit{CIRCONFERENZA} > \left(3+\frac{10}{71}\right) \textit{DIAMETRO}\right]$

Ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ι′ οα′ μείζων.

Dunque[84], il perimetro del cerchio è più che triplo[85] del diametro e [*eccede il triplo del diametro*] di una parte che è minore di un settimo [*del diametro*], ma è maggiore di 10/71 [*del diametro*].
$\left[3+\frac{10}{71} < \frac{\textit{CIRCONFERENZA}}{\textit{DIAMETRO}} < 3+\frac{1}{7}\right]$

(Fine della *Proposizione* 3.)

3 Proposizione 1

La dimostrazione della *Proposizione* 1 della *Misura del Cerchio* è uno dei più classici esempi del *metodo di esaustione*, attribuito a Eudosso di Cnido. La dimostrazione presuppone alcuni fatti teorici che nel testo di Archimede non sono né dimostrati, né esplicitamente enunciati. Questi teoremi preliminari sono discussi nei prossimi tre paragrafi.

3.1 Dimostrazione di: Euclide, *Elementi*, X.1

Anzitutto, Archimede dà per acquisita, nella *Misura del Cerchio*, la seguente proposizione, che qui chiameremo *Lemma 1*:

Lemma 1. (Euclide, *Elementi*, X.1)

α´

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

[...] ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα.

(Euclide, *Elementi*, X.1)

Date due grandezze disuguali, se si sottrae dalla maggiore una [parte] *maggiore della* [sua] *metà, dalla restante un'altra* [parte] *maggiore della* [sua] *metà, e così si procede successivamente, resterà una grandezza che sarà minore della grandezza minore fissata.*

[...] *Similmente potrà essere dimostrato, anche se le parti sottratte sono le metà.*

Questo *Lemma* è a sua volta conseguenza di quella che oggi chiamiamo *Proprietà di Eudosso-Archimede*, che negli *Elementi* di Euclide è la *Definizione* IV del *Libro* V. Una formulazione moderna è la seguente:

Date due grandezze omogenee, esiste un multiplo (intero) della minore che supera la maggiore.

Dimostrazione (del *Lemma 1*, Euclide, *Elementi*, X.1)

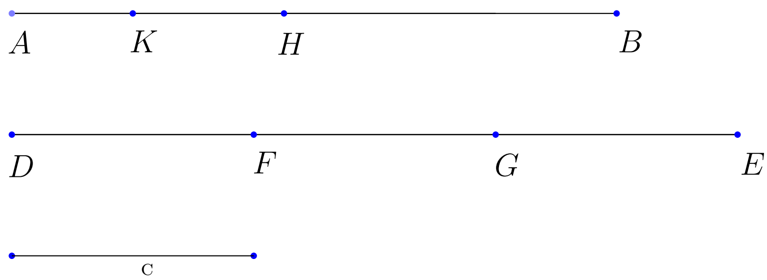
Siano c e AB, $\mathrm{c} < AB$, le due grandezze fissate. Per la *Proprietà di Archimede*, esiste un multiplo $m\mathrm{c}$ di c per il quale vale

$$m\mathrm{c} = \underbrace{\mathrm{c} + \cdots + \mathrm{c}}_{m} > AB$$

Senza ledere la generalità dell'argomentazione, supponiamo (seguendo Euclide) che la disuguaglianza di sopra valga per $m = 3$:

$$3\mathrm{c} = \mathrm{c} + \mathrm{c} + \mathrm{c} > AB$$

Poniamo $3\textsc{c} = DF + FG + GE = DE$ dove $DF = FG = GE = \textsc{c}$. Dunque, $AB < DE$.



Ora applichiamo per due volte al segmento (alla grandezza) AB il procedimento descritto nell'enunciato. Vale a dire:

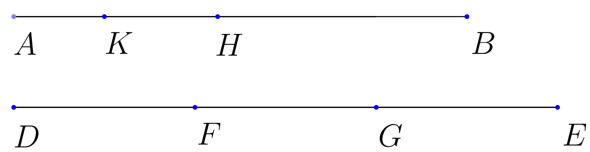
1. Al primo passo, sottraiamo da AB una parte HB per la quale si abbia
$$HB \geq \frac{1}{2}AB \tag{23}$$
Resta una parte, diciamo AH.

2. Al secondo passo, sottraiamo da AH una grandezza KH soddisfacente
$$KH \geq \frac{1}{2}AH \tag{24}$$
Resta una parte, diciamo AK.

Terminiamo ora il procedimento di sottrazioni successive, in quanto vogliamo che il numero di parti (disuguali) della partizione della grandezza AB,

$$AB = AK + KH + HB$$

(cioè 3, nel nostro caso) sia uguale al numero di parti (uguali tra loro, e uguali a $\textsc{c}$) in cui si decompone la grandezza $DE = 3\textsc{c}$.



Dimostriamo che la parte restante AK di AB che abbiamo così ottenuto (cioè, la minore delle parti di AB ottenute per sottrazioni successive) è minore della grandezza C:

$$AK < \mathrm{C}$$

L'argomentazione è la seguente:

1. $AH < DG$. Infatti, AH si ottiene da AB sottraendo una parte *maggiore o uguale* a $\frac{1}{2}AB$, mentre DG si ottiene da DE - che è maggiore di AB - togliendo una parte ($GE = \frac{1}{3}DE$) *minore* di $\frac{1}{2}DE$;

2. $AK < \mathrm{C}$. Infatti, AK si ottiene da AH togliendo una parte *maggiore o uguale* a $\frac{1}{2}AH$, mentre DF si ottiene sottraendo da DG (che è maggiore di AH) una parte FG *uguale* a $\frac{1}{2}DG$.

Dunque, la parte AK di AB, ottenuta con un numero opportuno di sottrazioni successive, è minore di C, come si voleva dimostrare. □

3.2 Dimostrazione del lemma sui poligoni inscritti

Lemma A (Poligoni inscritti) *Dato un cerchio C, fissiamo una qualunque area D. Denotiamo con P_{2^n} i poligoni regolari con 2^n lati, inscritti nel cerchio. Allora, per n sufficientemente grande,*

$$\textit{AREA}(C) - \textit{AREA}(P_{2^n}) < D \tag{25}$$

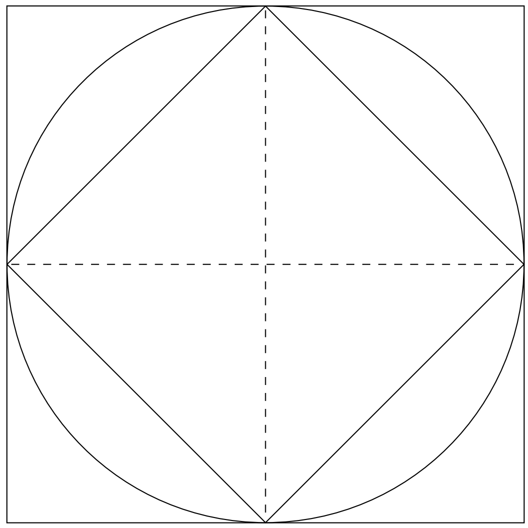
In termini più formali: per ogni area D esiste un intero positivo n_0 tale che, per ogni $n > n_0$, vale la (25).

Dimostrazione (del *Lemma* A)

- Togliamo dal cerchio C il quadrato inscritto P_4. In questo modo, *togliamo da C più della metà* di C:

  $$P_4 > \frac{1}{2}C$$

  Infatti (figura qui sotto), il doppio di P_4 è uguale al quadrato P_4' circoscritto: $2P_4 = P_4'$.



Ora P_4' è ovviamente maggiore di C: $P_4' > C$. Quindi $P_4 = \frac{1}{2}P_4' > \frac{1}{2}C$.

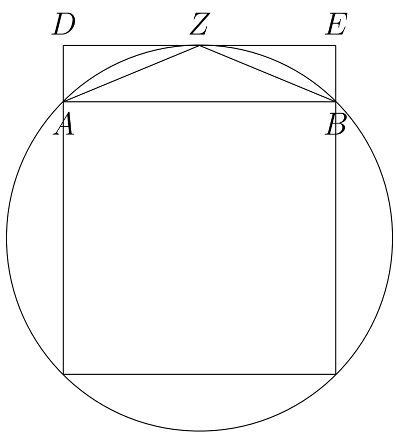
- Ora da $C - P_4$ togliamo $P_8 - P_4$. Otteniamo

$$(C - P_4) - (P_8 - P_4) = C - P_8.$$

Dico che la parte $P_8 - P_4$ che abbiamo tolto è *più della metà di* $C - P_4$:

$$P_8 - P_4 > \frac{1}{2}(C - P_4)$$

A questo scopo, è sufficiente dimostrare che *il triangolo* AZB *è maggiore del segmento circolare* AZB. (Figura qui sotto.)



Questo è ovvio, perché il rettangolo $ABED$ è maggiore del segmento circolare AZB:

$$ABED > \text{SEGMENTO CIRCOLARE}\,(AZB)$$

(perché il segmento circolare è inscritto nel rettangolo). Pertanto, si ha

$$\text{TRIANGOLO}\,(AZB) = \frac{1}{2}\,ABED > \frac{1}{2}\,\text{SEGMENTO CIRCOLARE}\,(AZB)$$

- Ora iteriamo il procedimento: da $C - P_{2^n}$ togliamo $P_{2^{n+1}} - P_{2^n}$. Otteniamo

$$(C - P_{2^n}) - (P_{2^{n+1}} - P_{2^n}) = C - P_{2^{n+1}}$$

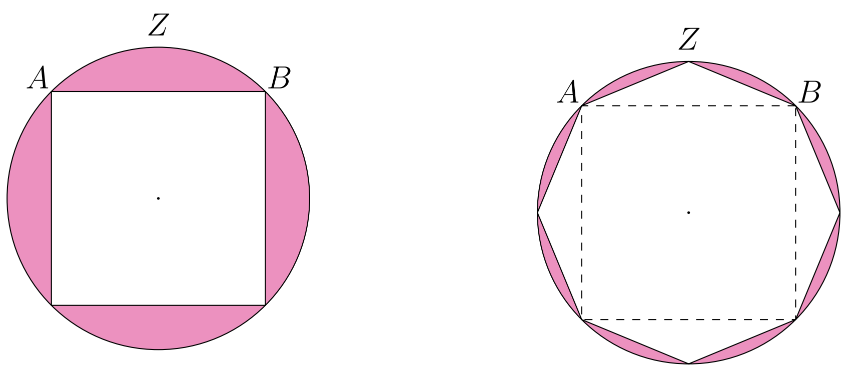
Esattamente come nel passaggio precedente, si dimostra che

$$P_{2^{n+1}} - P_{2^n} > \frac{1}{2}\,(C - P_{2^n})$$

Possiamo allora utilizzare il *Lemma 1* (Euclide, *Elementi*, X.1), e concludiamo che: comunque si fissi un'area D, per n sufficientemente grande si ha

$$C - P_{2^n} < D$$

□



(a) La figura tratteggiata (somma di 4 segmenti circolari) è la differenza $C - P_4$ tra il cerchio e il quadrato inscritto.

(b) La figura tratteggiata (somma di 8 segmenti circolari) è l'eccesso $C - P_8$ di C rispetto all'ottagono regolare P_8 inscritto.

Comunque si assegni un'area, la differenza $C - P_{2^n}$ si può rendere minore di essa, pur di prendere n abbastanza grande.

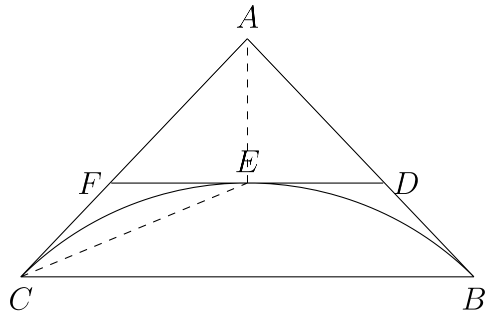
3.3 Dimostrazione del lemma sui poligoni circoscritti

Lemma B (Poligoni circoscritti) *Dato un cerchio C, fissiamo una qualunque area D. Denotiamo P'_{2^m} i poligoni regolari con 2^m lati, circoscritti al cerchio. Allora, per tutti gli m sufficientemente grandi si ha*

$$\textsc{area}(P'_{2^m}) - \textsc{area}(C) < D \tag{26}$$

Dimostrazione

- Togliamo dal quadrato circoscritto P'_4 il cerchio C. Come nella dimostrazione del *Lemma* A, vediamo che, togliendo C da P'_4, togliamo da P'_4 più della sua metà:
$$C > \frac{1}{2}P'_4$$
- Ora da $P'_4 - C$ togliamo $P'_4 - P'_8$. Otteniamo
$$(P'_4 - C) - (P'_4 - P'_8) = P'_8 - C$$
Dico che la parte $P'_4 - P'_8$ tolta da $P'_4 - C$ è *più della metà di* $P'_4 - C$:
$$P'_4 - P'_8 > \frac{1}{2}(P'_4 - C)$$



A questo scopo, basta dimostrare che il triangolo AED è maggiore del triangolo curvilineo EDB. Confrontiamo il triangolo AED con il triangolo rettilineo EBD. Poiché
$$BD = ED < AD$$
e le altezze relative ai lati BD e AD sono uguali, si ha $AED > EBD$. Pertanto,
$$\begin{aligned} AED &> \textsc{triangolo rettilineo } EBD \\ &> \textsc{triangolo curvilineo } EBD \end{aligned}$$
come si voleva dimostrare.

- Ora iteriamo il procedimento: da $P'_{2^n} - C$ togliamo $P'_{2^n} - P'_{2^{n+1}}$. Otteniamo

$$(P'_{2^n} - C) - (P'_{2^n} - P'_{2^{n+1}}) = P'_{2^{n+1}} - C$$

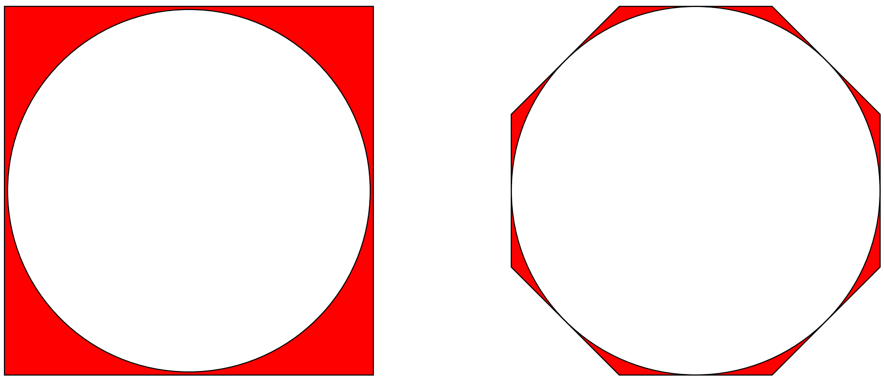
Esattamente come nel passaggo precedente, si dimostra che

$$P'_{2^n} - P_{2^{n+1}} > \frac{1}{2}\,(P'_{2^n} - C)$$

Allora, utilizzando il *Lemma 1* (Euclide, *Elementi*, X.1), concludiamo che: comunque si fissi un'area D, per tutti gli n abbastanza grandi si ha

$$P'_{2^n} - C < D$$

$\square$



(a) $P'_4 - C$. (b) $P'_8 - C$

La differenza $P'_{2^n} - C$ si può rendere piccola quanto si vuole, pur di prendere n abbastanza grande.

3.4 Dimostrazione della *Proposizione* 1

Vediamo ora la dimostrazione della *Proposizione* 1 della *Misura del Cerchio.*

Proposizione 1 *Siano C un cerchio e E il triangolo rettangolo che ha come cateti il raggio e la circonferenza del cerchio. Allora $C = E$.*

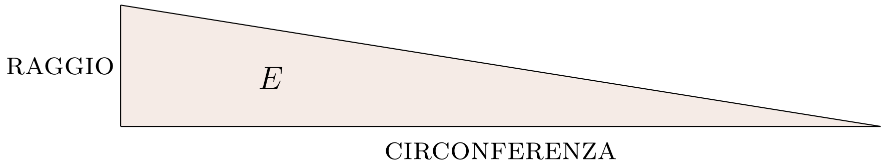


Figura 10: Triangolo rettangolo E equivalente al cerchio: i cateti sono il raggio del cerchio e la circonferenza rettificata.

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione di Archimede è per assurdo. Precisamente, si dimostra che sia l'ipotesi $C > E$, sia l'ipotesi $C < E$ conducono a una contraddizione. Per esclusione, si conclude allora che $C = E$. Vediamo i dettagli.

PRIMA PARTE. Supponiamo $C > E$. Fissiamo l'area $D = C - E$. Per il precedente *Lemma A*, se n è sufficientemente grande, il 2^n-gono regolare inscritto P_{2^n} soddisfa la disuguaglianza

$$C - P_{2^n} < D \qquad \text{cioè} \qquad C - P_{2^n} < C - E \tag{27}$$

Da quest'ultima disuguaglianza segue subito

$$P_{2^n} > E \tag{28}$$

Ora il poligono P_{2^n} è uguale a (equivalente a) un triangolo che ha come base e relativa altezza, rispettivamente, il perimetro di P_{2^n} e il suo apotema. Quindi l'area di P_{2^n} è data da

$$P_{2^n} = \frac{1}{2}\,(\text{PERIMETRO DI } P_{2^n}) \times (\text{APOTEMA DI } P_{2^n})$$

Ovviamente, l'area del triangolo E è data da

$$E = \frac{1}{2}\,(\text{CIRCONFERENZA}) \times (\text{RAGGIO})$$

Ora, il perimetro di P_{2^n} e il suo apotema sono minori, rispettivamente, della base del triangolo E (la circonferenza) e dell'altezza del triangolo E (il raggio):

$$(\text{PERIMETRO DI } P_{2^n}) < \text{CIRCONFERENZA} \qquad \text{e} \qquad \text{APOTEMA DI } P_{2^n} < \text{RAGGIO},$$

(Fig: 11.) Di conseguenza, l'area di P_n è minore dell'area di E:

$$P_n < E \tag{29}$$

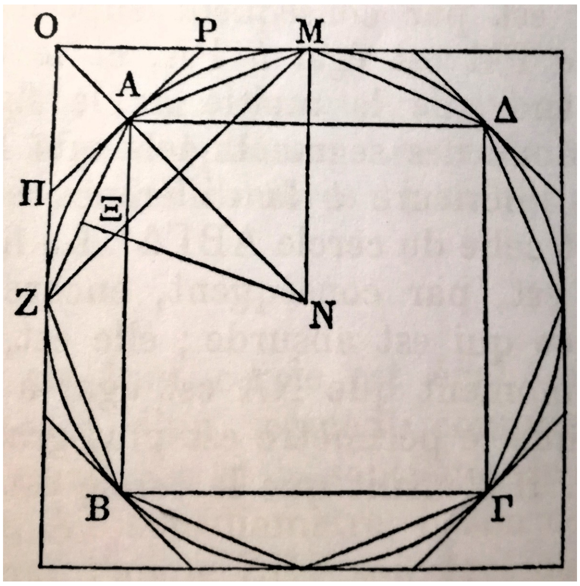


Figura 11: *Poligoni inscritti e circoscritti al cerchio.* L'apotema $N\Xi$ del poligono regolare inscritto P_n di lato AZ è minore del raggio NA della circonferenza. L'apotema NM del poligono ccircoscritto è uguale al raggio del cerchio. (Figura in Heiberg, [26].)

L'ipotesi $C > E$ conduce dunque alle due disuguaglianze (28) e (29):

$$P_{2^n} > E \quad \text{e} \quad P_{2^n} < E$$

Una contraddizione. Quindi, non può essere $C > E$.

In modo del tutto simile, si dimostra che anche l'ipotesi $C < E$ porta a una contraddizione:

Seconda parte. Supponiamo $C < E$. Fissata l'area $D = E - C$, per il *Lemma B* esiste un 2^m-gono regolare circoscritto P'_{2^m} per il quale si ha

$$P'_{2^m} - C < E - C \tag{30}$$

Ne segue:

$$P'_{2^m} < E \tag{31}$$

Confrontiamo le aree di P'_{2^m} e di E. Il poligono P'_{2^m} ha la stessa area del triangolo (che denoteremo ancora P'_{2^m}) avente come base il perimetro di P'_{2^m} e come altezza l'apotema di P'_{2^m} :

$$P'_{2^m} = \frac{1}{2}\left(\text{perimetro di } P'_{2^m}\right) \times \left(\text{apotema di } P'_{2^m}\right)$$

mentre

$$E = \frac{1}{2}\left(\text{circonferenza}\right) \times \left(\text{raggio}\right)$$

Siccome

$$\left(\text{perimetro di } P'_{2^m}\right) > \text{circonferenza} \qquad \text{e} \qquad \text{apotema di } P'_{2^m} = \text{raggio},$$

(Fig: 11), l'area di P'_{2^m} è maggiore dell'area del triangolo E:

$$P'_{2^m} > E \tag{32}$$

Dunque, dalla disuguaglianza $C < E$ seguono le due disuguaglianze tra loro contraddittorie (31) e (32):

$$P'_{2^m} < E \quad \text{e} \quad P'_{2^m} > E$$

Siamo arrivati ancora a una contraddizione.

In conclusione, abbiamo dimostrato che sia da $C < E$, sia da $C > E$ seguono contraddizioni. Pertanto, per esclusione, concludiamo che $C = E$, come volevamo dimostrare. $\square$

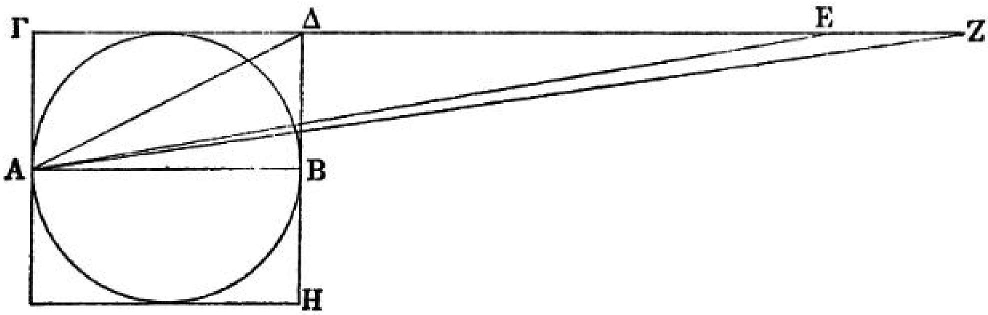
4 Proposizione 2

La *Proposizione* 2 della *Misura del Cerchio* si basa, oltre che sui risultati della *Proposizione* 1, anche su quelli della successiva *Proposizione* 3.

4.1 La dimostrazione

Proposizione 2 *Il cerchio, rispetto al quadrato costruito sul diametro, ha il rapporto di* 11 *a* 14.

DIMOSTRAZIONE



Come nella figura, consideriamo il quadrato, di diagonale ΓH, circoscritto al cerchio di diametro AB. Siano poi: $\Gamma\Delta = AB$ il lato del quadrato circoscritto; $\Delta E = 2AB$; $EZ = \frac{1}{7}AB$. Siccome $\Gamma Z = \left(3 + \frac{1}{7}\right) AB = \frac{22}{7}AB$, abbiamo

$$\frac{A\Gamma Z}{A\Gamma\Delta} = \frac{22}{7} \tag{33}$$

Dall'enunciato della *Proposizione* 3 sappiamo che

$$\text{CIRCONFERENZA} < \left(3 + \frac{1}{7}\right) \text{DIAMETRO} = \frac{22}{7}AB = \Gamma Z \tag{34}$$

Dalla *Proposizione* 1 e da (34) segue:

$$\text{CERCHIO} = \frac{1}{2}\,\text{RAGGIO} \times \text{CIRCONFERENZA} < \frac{1}{2}\,\text{RAGGIO} \times \Gamma Z = A\Gamma Z \tag{35}$$

Da $(\text{DIAMETRO})^2 = 4\,A\Gamma\Delta$ e dalla (35) abbiamo allora:

$$\frac{\text{CERCHIO}}{(\text{DIAMETRO})^2} < \frac{A\Gamma Z}{4\,A\Gamma\Delta}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} = \frac{11}{14}$$

□

Si noti che il rapporto 11 : 14 (pari a 0,785714..) va qui inteso (anche se questo non è scritto nel testo che ci è pervenuto) come un'*approssimazione* (per eccesso) del rapporto del cerchio rispetto al quadrato costruito sul diametro. Tale rapporto, con le notazioni moderne, è $\frac{\pi}{4} = 0.785398...$ Anche nella dimostrazione, le disuguaglianze sono sostituite (in modo poco corretto) da uguaglianze. La *Proposizione* 2 della *Misura del Cerchio*, quanto al suo enunciato, non è che una come una semplice conseguenza delle altre due *Proposizioni* del trattato. Ma un motivo di interesse della sua dimostrazione sta nel fatto che il rapporto

$$\frac{A\Gamma Z}{A\Gamma\Delta} \tag{36}$$

tra un'area uguale al cerchio e un'area uguale al quadrato sul raggio sia di fatto calcolato come coincidente con il rapporto tra la circonferenza e il diametro. In altri termini, la costante (con le notazioni di oggi, π) definita come rapporto tra lunghezze

$$\frac{\text{CIRONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}}$$

coincide con la costante definita in termini di rapporto tra aree[86]:

$$\frac{\text{CERCHIO}}{\text{QUADRATO SUL RAGGIO}}$$

5 Proposizione 3

La traduzione letterale dell'enunciato della *Proposizione* 3 è la seguente:

Proposizione 3 *"Il perimetro di ogni cerchio è maggiore del triplo del diametro, e eccede ancora* [il triplo del diametro] *di meno di un settimo del diametro, e di più di dieci settantunesimi."*

Ovvero:

$$\left(3+\frac{10}{71}\right) \text{DIAMETRO} < \text{CIRCONFERENZA} < \left(3+\frac{1}{7}\right) \text{DIAMETRO} \tag{37}$$

In termini di rapporti, abbiamo allora per π la stima:

$$\boxed{3+\frac{10}{71} < \frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}} < 3+\frac{1}{7}} \tag{38}$$

Queste stime sono ottenute attraverso due procedimenti ricorsivi, ciascuno dei quali consente di trovare approssimazioni *arbirariamente precise* - uno per difetto, l'altro per eccesso - del rapporto tra circonferenza e diametro.

5.1 Convessità e lunghezze di curve piane

L'idea della dimostrazione della *Proposizione* 3 è di approssimare il perimetro del cerchio, dall'alto e dal basso, rispettivamente mediante i perimetri dei poligoni regolari circoscritti e inscritti. Nella *Misura del Cerchio* si dà per scontato il fatto che il perimetro di un qualunque poligono regolare $P_{\text{INSCRITTO}}$, inscritto al cerchio C, sia minore del perimetro di C (cioè, della circonferenza), e che questo sia a sua volta minore del perimetro di qualunque poligono regolare $P_{\text{CIRCOSCRITTO}}$, circoscritto a C:

$$\text{PERIMETRO}\,(P_{\text{INSCRITTO}}) < \text{PERIMETRO}\,(C) < \text{PERIMETRO}\,(P_{\text{CIRCOSCRITTO}})$$

Nel trattato *Sulla Sfera e il Cilindro* (Περὶ Σφαῖρας καὶ κυλίνδρου), di cui non si sa con certezza se sia o meno posteriore alla *Misura del Cerchio*, Archimede sente il bisogno di giustificare e generalizzare queste ultime disuguaglianze, mediante la definizione di curva *concava da una stessa parte*, o *concava nella stessa direzione*, e mediante l'introduzione di opportuni postulati. Per l'interesse generale della questione, premettiamo la presentazione dei concetti fondamentali sulla convessità delle linee piane.

Archimede definisce anzitutto le linee piane che *concave dalla stessa parte* o *nella stessa direzione)* attraverso opportune definizioni, chiamate ἀξιόματα. (Archimede, *Sulla Sfera e sul Cilindro.* Si veda Mugler, [2], pagg. 9-10 .)

ΑΞΙΟΜΑΤΑ

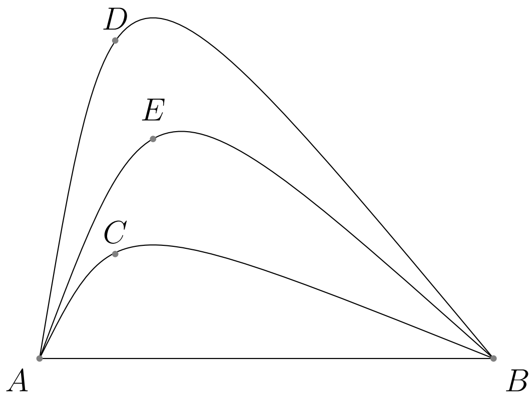
α′. Εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι πεπερασμέναι γραμμαὶ, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν ευθειῶν ἤτοι ὅλαι ἐπί τὰ αὐτὰ εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

β′. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμήν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, ἢ τινὲς μὲν δὲ κατ᾽ αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

DEFINIZIONI

1. Ci sono nel piano certe linee curve con punti estremi[87] le quali, o sono proprio per intero dalla stessa parte dei segmenti che congiungono loro punti estremi, oppure non hanno niente dall'altra parte.[88]

2. Dico allora *concava dalla stessa parte*[89] una tale linea, per la quale, presi comunque due punti su di essa, i segmenti di retta che li congiungono si trovino per intero dalla stessa parte della linea, oppure alcuni dalla stessa parte mentre altri sulla linea stessa, ma nessuno dall'altra parte.



Nello stesso trattato *Sulla Sfera e sul Cilindro* sono poi enunciati alcuni postulati (o assunzioni; greco: λαμβανόμενα) che riportiamo qui sotto, perché, come vedremo, sono implicitamente utilizzati nella *Misura del Cerchio*.[90]

ΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ

Λαμβάνω δὲ ταῦτα·

α′. Τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα εχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τῆν εὐθεῖαν.

POSTULATI

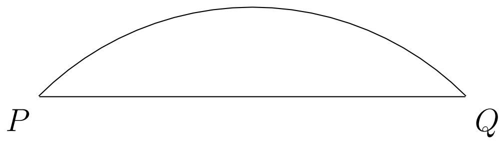
Assumo questo:

1. Tra le linee aventi gli stessi [*punti*] estremi, la più corta sia la linea retta.

β′. Τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας, ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας καὶ τῆς εὐθείας τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβάνομενην.

2. Tra linee, giacenti su uno stesso piano e aventi gli stessi estremi, due siano disuguali quando volgono la loro concavità dalla stessa parte, e una di esse o è interamente compresa tra l'altra linea e la retta che congiunge gli stessi punti estremi, oppure è in parte compresa e in parte concidente con l'altra, e che quella racchiusa sia la minore.[91]

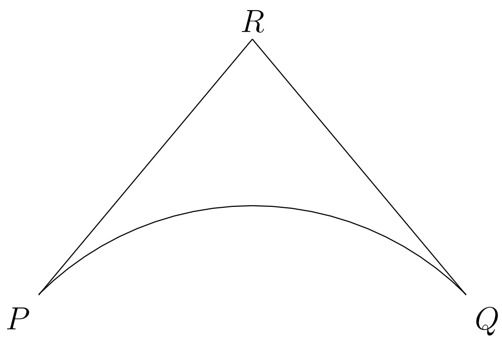
Ad esempio, per il *Postulato* 1 scritto qui sopra, la corda PQ che sottende un arco di circonferenza è minore dell'arco.



Ne segue che:

Il perimetro di un qualunque poligono inscritto in un cerchio è minore del perimetro del cerchio (cioè, della circonferenza).

Dal *Postulato* 2 (parte finale) segue invece che il tratto di perimetro di un poligono circoscritto compreso tra due successivi punti di tangenza è più lungo del corrispondente arco.



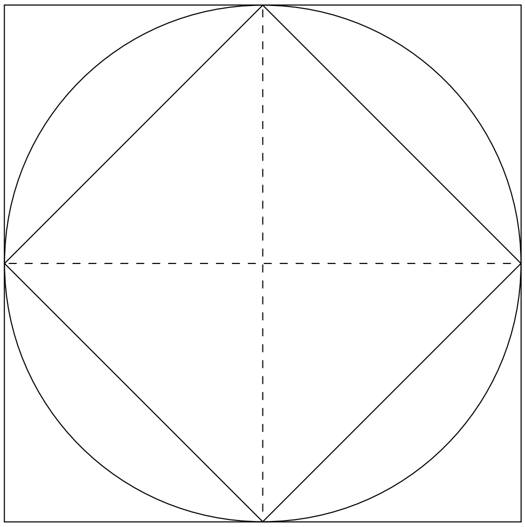
Di conseguenza,

Il perimetro di un qualunque poligono circoscritto a un cerchio è maggiore del perimetro del cerchio.

In definitiva, possiamo concludere che:

> *Dato un cerchio, il perimetro di ogni poligono regolare in esso inscritto è minore del perimetro del cerchio (cioè, della circonferenza, che a sua volta è minore del perimetro di ogni poligono regolare circoscritto.*

Questi presupposti teorici sono implicitamente utilizzati nella dimostrazione della *Proposizione* 3. (Paragafi 5.2, 5.3.)



5.2 Poligoni regolari circoscritti

La prima parte della dimostrazione della *Proposizione* 3 descrive un metodo iterativo – basato sullo studio dei poligoni regolari *circoscritti* – per approssimare *dall'alto* il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro. Più precisamente, fissato un cerchio C, si considera dapprima l'esagono regolare circoscritto. Bisecando gli angoli al centro, e quindi raddoppiando di volta in volta il numero dei lati, si considerano successivamente i poligoni regolari circoscritti con $6, 12, 24, 48, 96$ lati. Fissiamo le notazioni.

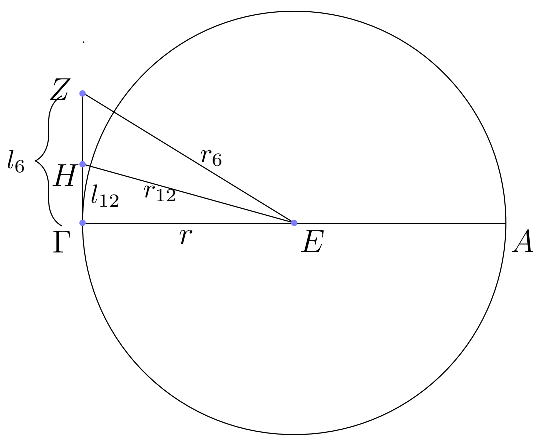


Figura 12: $\Gamma Z = l_6$ e $\Gamma H = l_{12}$ = sono i *semilati* dei poligoni regolari circoscritti con 6 e 12 lati. EH è la bisettrice dell'angolo $\angle ZE\Gamma$.

Notazioni per i poligoni circoscritti

- r: raggio del cerchio C;
- P_n (n intero positivo): poligono regolare di n lati circoscritto a C;
- l_n: *semilato* di P_n;
- r_n: ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti r e l_n (uguale al raggio del cerchio circoscritto a P_n).

Poiché la circonferenza è minore del perimetro del poligono circoscritto P_n, si ha

$$\pi = \frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}} < \frac{\text{perimetro di } P_n}{2r} = n\,\frac{l_n}{r} \tag{39}$$

Allo scopo di garantire approssimazioni di π dall'alto, è allora ovvio che anche i rapporti l_n/r dovranno essere tutti approssimati dall'alto. Archimede trova però, con un'argomentazione geometrica che riportiamo qui sotto, un semplice metodo ricorsivo per ottenere i rapporti r/l_n, cioè, i *reciproci* dei rapporti che figurano nella disuguaglianza (39). Più precisamente, Archimede calcola r/l_{2n} in funzione di r/l_n, mediante un procedimento che, nelle notazioni moderne, coincide con l'uso iterato della formula

$$\frac{r}{l_{2n}} = \frac{r}{l_n} + \sqrt{\left(\frac{r}{l_n}\right)^2 + 1} \tag{40}$$

(Si veda la (62).) Di conseguenza, Archimede trova più conveniente seguire la strategia seguente: anziché approssimare direttamente i rapporti l_n/r dall'alto, approssima dapprima i rapporti reciproci r/l_n, ovviamente, dal basso. Ottenuta infine una stima dal basso del rapporto r/l_{96}, passando ai reciproci, trova una stima dall'alto di l_{96}/r. Infine, tramite la (39), trova un'approssimazione per eccesso di π. (In questo modo Archimede ottiene la ben nota approssimazione $\pi < 3 + {}^1\!/_7$.)

Il metodo geometrico che sta alla base di questa prima parte della *Proposizione* 3 si fonda su questi due presupposti teorici:

1. La proporzione
$$r : l_{2n} = (r_n + r) : l_n, \tag{41}$$
ossia
$$\boxed{\frac{r}{l_{2n}} = \frac{r_n}{l_n} + \frac{r}{l_n}} \tag{42}$$
(che dimostriamo qui sotto).

2. Il teorema di Pitagora, da cui segue
$$r_n^2 = r^2 + l_n^2 \tag{43}$$
Da quest'ultima uguaglianza segue che r_n/l_n si esprime in termini di r/l_n come:
$$\boxed{\frac{r_n}{l_n} = \sqrt{\left(\frac{r}{l_n}\right)^2 + 1}} \tag{44}$$

Dimostrazione di (41). Seguendo il testo di Archimede, cominciamo a dimostrare la proporzione (41) nel caso $n = 6$:

$$r : l_{12} = (r_6 + r) : l_6 \tag{45}$$

Siano dunque (Fig: 4) $l_6 = \Gamma Z$ e $l_{12} = \Gamma H$ i semilati dei poligoni regolari circoscritti, rispettivamente con 6 e 12 lati, e sia EH la bisettrice dell'angolo $\angle \Gamma EZ$. Per il teorema della bisettrice (Euclide, *Elementi*, VI.3) applicato al triangolo ΓEZ, abbiamo

$$EZ : E\Gamma = ZH : H\Gamma \tag{46}$$

Da questa proporzione deduciamo:

$$\textit{Componendo} \text{ (Euclide, V.18):} \qquad (EZ + E\Gamma) : E\Gamma = (\underbrace{ZH + H\Gamma}_{= Z\Gamma}) : H\Gamma \tag{47}$$

$$\textit{Permutando} \text{ (Euclide, V.16):} \qquad (EZ + E\Gamma) : Z\Gamma = E\Gamma : H\Gamma \tag{48}$$

Con le nostre notazioni, la proporzione (48) si scrive

$$(r_6 + r) : l_6 = r : l_{12}$$

e quindi la (45) è dimostrata. La dimostrazione della proporzione (42) per n arbitrario si effettua esattamente nello stesso modo. $\square$

Il metodo iterativo con i poligoni circoscritti

Le due uguaglianze (42) e (44) sono alla base del metodo iterativo per approssimare π dall'alto. A questo scopo, si dovranno trovare stime dal basso per i rapporti

$$\frac{r}{l_n}, \qquad \frac{r_n}{l_n} \tag{49}$$

(per $n = 6, 12, 24, 48, 96$, nella *Misura del Cerchio*). Più precisamente:

- Si parte dall'esagono circoscritto ($n = 6$). Come stima dal basso del rapporto r/l_6, che è dato da $\sqrt{3}$, Archimede sceglie la frazione $\frac{265}{153}$, senza dare spiegazioni. (Si veda (149)). Inoltre, in questo caso iniziale, si ha $l_6 = \frac{1}{2}r_6$ perché il triangolo rettangolo ΓEZ ha gli angoli acuti di 30° e 60°. (Si veda la Fig. 12). Abbiamo allora:

$$\frac{r}{l_6}\left[= \sqrt{3}\right] > \frac{265}{153}, \qquad \frac{r_6}{l_6} = 2 \tag{50}$$

- Passiamo al caso successivo del poligono regolare circoscritto di 12 lati. Per le (42),

$$\frac{r}{l_{12}} = \frac{r}{l_6} + \frac{r_6}{l_6} \tag{51}$$

  Per stimare dal basso $\frac{r}{l_{12}}$ basta sommare le stime (50) per $\frac{r}{l_6}$ e $\frac{r_6}{l_6}$ ottenute al passo precedente. Ottenuta così una stima dal basso di $\frac{r}{l_{12}}$, una stima dal basso del rapporto

$$\frac{r_{12}}{l_{12}} = \sqrt{\left(\frac{r}{l_{12}}\right)^2 + 1} \tag{52}$$

  (per la (44)) si ottiene calcolando un'approssimazione dal basso della radice quadrata a secondo membro di (52).

- Si prosegue in modo iterativo.

Cioè, trovate le stime dal basso per $\frac{r}{l_n}$ e $\frac{r_n}{l_n}$, grazie all'uguaglianza (42) si ricava anzitutto una stima dal basso per il rapporto $\frac{r}{l_{2n}}$:

$$\frac{r}{l_{2n}} = \frac{r}{l_n} + \frac{r_n}{l_n} \tag{53}$$

Poi, utilizzando le uguaglianze (44), si calcola una stima per difetto del rapporto r_{2n}/l_{2n}:

$$\frac{r_{2n}}{l_{2n}} = \sqrt{\left(\frac{r}{l_{2n}}\right)^2 + 1} \tag{54}$$

- Si considerano successivamente i poligoni di $6, 12, 24, 48$ e 96 lati. Con il procedimento descritto sopra, si arriva a calcolare una stima dal basso per r/l_{96}. Passando ai reciproci, si ottiene allora una stima dall'alto per l_{96}/r e quindi un'approssimazione di π dall'alto:

$$\pi = \frac{\text{Circonferenza}}{\text{Diametro}} < \frac{\text{Perimetro } P_{96} \text{ circoscritto}}{\text{Diametro}}$$

$$= \frac{96 \times (2l_{96})}{2r} = 96\,\frac{l_{96}}{r} \tag{55}$$

> "*Qui, per la prima volta, si dà un principio sulla base del quale una quantità*[92]*, che non può essere calcolata esattamente, può essere approssimata con arbitraria accuratezza; o, come diremmo noi,* con un numero qualunque di cifre decimali*, oppure, come direbbero i Greci,* con un errore minore di una qualunque quantità preassegnata ε, arbitrariamente piccola."
> (Otto Toeplitz, [54].)

5.2.1 Schema delle approssimazioni con i poligoni circoscritti

Ricostruiamo, in sintesi, lo schema dei conti di Archimede. Poniamo[93]

$$\alpha_n = \frac{r}{l_n}, \qquad \beta_n = \frac{r_n}{l_n} \tag{56}$$

Le uguaglianze (42) e (44) si scrivono rispettivamente

$$\alpha_{2n} = \alpha_n + \beta_n \tag{57}$$

e

$$\beta_n^2 = \alpha_n^2 + 1 \tag{58}$$

ossia

$$\beta_n = \sqrt{\alpha_n^2 + 1} \tag{59}$$

I dati iniziali sono i valori $\alpha_6 (= \sqrt{3}) > \frac{265}{153}$ e e $\beta_6 = 2$, ricavati dallo studio diretto dell'esagono regolare. Lo schema iterativo per passare direttamente da $\alpha_n = r/l_n$ a $\alpha_{2n} = r/l_{2n}$ è allora:

$$\alpha_{2n} = \alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + 1} \tag{60}$$

Archimede calcola valori approssimati degli α_n e dei β_n con stime dal basso, in modo tale da ottenere alla fine (con il procedimento descritto nel paragrafo precedente) una stima dal basso di $\alpha_{96} = \frac{r}{l_{96}}$. Questo procedimento permette di ottenere infine una stima del reciproco $\frac{l_{96}}{r}$ dall'alto, e quindi infine (tramite la (55)) una stima dall'alto di π. I calcoli di Archimede nella *Misura del Cerchio* per approssimare dall'alto il rapporto $\frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}}$ con i rapporti $\frac{\text{PERIMETRI POLIGONI CIRCOSCRITTI}}{\text{DIAMETRO}}$ si possono schematizzare nel modo seguente. (Rimandiamo al paragrafo 6.2 per i commenti sui calcoli delle radici quadrate.)

SCHEMA DEI CONTI PER APPROSSIMARE π DALL'ALTO

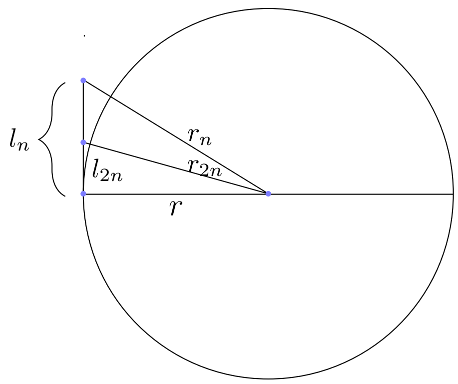


Figura 13:

NOTAZIONI:

r: raggio del cerchio;
l_n: *semilato* del poligono regolare P_n circoscritto;
r_n: ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti r e l_n;
$\alpha_n = \frac{r}{l_n}$; $\beta_n = \frac{r_n}{l_n}$.

RELAZIONI: $\alpha_{2n} = \alpha_n + \beta_n$; $\beta_{2n}^2 = \alpha_{2n}^2 + 1$; $\beta_{2n} = \sqrt{\alpha_{2n}^2 + 1}$.

DATI INIZIALI: α_6, β_6. (Il caso dell'esagono circoscritto.)

N.B. Tutti gli α e i β devono essere approssimati dal basso.

STRATEGIA: Trovare approssimazioni dal basso per tutti i rapporti α_n, con $n = 6, 12, 24, 48, 96$. Calcolato (con un'approssimazione dal basso) $\alpha_{96} = r/l_{96}$, se ne ricava una stima dall'alto per il reciproco l_{96}/r e infine una stima dall'alto di π tramite la disuguaglianza:

$$\pi < \frac{\text{PERIMETRO DI } P_{96}}{\text{DIAMETRO}} = 96 \times \frac{l_{96}}{r}$$

$\alpha_6(=\sqrt{3}) > \dfrac{265}{153}$	L'approssimazione $(\alpha_6 = \frac{r}{l_6} =)\sqrt{3} > \frac{265}{153}$ è ricavata in (149).
$\beta_6 = 2$	$\beta_6 = \frac{r_6}{l_6} = 2$, perché rapporto tra ipotenusa e cateto minore di un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60°. (Fig. 12.)
$\alpha_{12} > \dfrac{265}{153} + 2 = \dfrac{571}{153}$	$\alpha_{12} = \alpha_6 + \beta_6$ per (57)
$\beta_{12}^2 > \left(\dfrac{571}{153}\right)^2 + 1 = \dfrac{349.450}{(153)^2}$	$\beta_{12}^2 = \alpha_{12}^2 + 1$ per (58).
$\beta_{12} > \dfrac{\sqrt{349.450}}{153} > \dfrac{591 + \frac{1}{8}}{153}$	Per (158).
$\alpha_{24} > \dfrac{571}{153} + \dfrac{591 + \frac{1}{8}}{153} = \dfrac{1162 + \frac{1}{8}}{153}$	$\alpha_{24} = \alpha_{12} + \beta_{12}$ (57)
$\beta_{24}^2 > \left(\dfrac{1162 + \frac{1}{8}}{153}\right)^2 + 1 > \dfrac{1.373.943}{153^2}$	$\beta_{24}^2 = \alpha_{24}^2 + 1$ per (58).
$\beta_{24} > \dfrac{\sqrt{1.373.943}}{153} > \dfrac{1172 + \frac{1}{8}}{153}$	Per (161).
$\alpha_{48} > \dfrac{1162 + \frac{1}{8}}{153} + \dfrac{1172 + \frac{1}{8}}{153} = \dfrac{2334 + \frac{1}{4}}{153}$	$\alpha_{48} = \alpha_{24} + \beta_{24}$ per (57)
$\beta_{48}^2 > \left(\dfrac{2334 + \frac{1}{4}}{153}\right)^2 + 1 > \dfrac{5\,472\,132\,\frac{1}{16}}{153^2}$	$\beta_{48}^2 = \alpha_{48}^2 + 1$ per (58).
$\beta_{48} > \dfrac{\sqrt{5\,472\,132\,\frac{1}{16}}}{153} > \dfrac{2339\,\frac{1}{4}}{153}$	Per (163).
$\alpha_{96} > \dfrac{2334 + \frac{1}{4}}{153} + \dfrac{2339 + \frac{1}{4}}{153} = \dfrac{4673 + \frac{1}{2}}{153}$	$\alpha_{96} = \alpha_{48} + \beta_{48}$ per (57)

Ora, il perimetro del poligono regolare circoscritto P_{96}, di semilato l_{96}, è

$$\begin{aligned} \text{PERIMETRO } P_{96} \text{ CIRCOSCRITTO} &= 96 \times 2l_{96} = 96 \times \frac{2r}{\alpha_{96}} \\ &= 96 \times \frac{\text{DIAMETRO CERCHIO}}{\alpha_{96}} \end{aligned}$$

L'ultima approssimazione per difetto che abbiamo ricavato, $\alpha_{96} > \frac{4673+\frac{1}{2}}{153}$, consente di trovare un'approssimazione *dall'alto* per il rapporto seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\text{PERIMETRO } P_{96} \text{ CIRCOSCRITTO}}{\text{DIAMETRO CERCHIO}} &= 96 \times \frac{1}{\alpha_{96}} \\ &< 96 \times \frac{53}{4673+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{14688}{4673+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3\left(4673+\frac{1}{2}\right)+(667+\frac{1}{2})}{4673+\frac{1}{2}} \\ &< \frac{3\left(4673+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7}\left(4673+\frac{1}{2}\right)}{4673+\frac{1}{2}} \\ &= 3+\frac{1}{7} \end{aligned}$$

E dal momento che

$$\pi = \frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO CERCHIO}} < \frac{\text{PERIMETRO } P_{96} \text{ CIRCOSCRITTO}}{\text{DIAMETRO CERCHIO}}$$

ricaviamo infine la famosa appossimazione dall'alto:

$$\boxed{\pi < 3+\frac{1}{7} = 3+\frac{10}{70} = \frac{22}{7}} \tag{61}$$

Una formula ricorsiva

Vediamo, in modo più esplicito, come Archimede esprime il rapporto l_{2n}/r in termini del rapporto l_n/r. Più precisamente, abbiamo visto che Archimede ritiene più conveniente considerare i reciproci, e quindi esprime r/l_{2n} in termini di r/l_n. Partiamo dalla proporzione

$$\frac{r}{l_{2n}} = \frac{r_n+r}{l_n}$$

(Si veda (42).) Per il teorema di Pitagora,

$$r_n = \sqrt{r^2 + l_n^2}$$

Quindi, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{r}{l_{2n}} &= \frac{r + \sqrt{r^2 + l_n^2}}{l_n} \\ &= \frac{r}{l_n} + \sqrt{\left(\frac{r}{l_n}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

In definitiva, Archimede utilizza la successione definita per ricorrenza da

$$\frac{r}{l_{2n}} = \frac{r}{l_n} + \sqrt{\left(\frac{r}{l_n}\right)^2 + 1} \tag{62}$$

con la condizione iniziale

$$\frac{r}{l_6} = \sqrt{3}$$

5.3 Poligoni regolari inscritti

Veniamo ora all'approssimazione dal basso del rapporto $\frac{\text{Circonferenza}}{\text{Diametro}}$ mediante i rapporti fra i perimetri dei poligoni regolari inscritti nel cerchio e il diametro. Fissiamo le notazioni. (Fig.14)

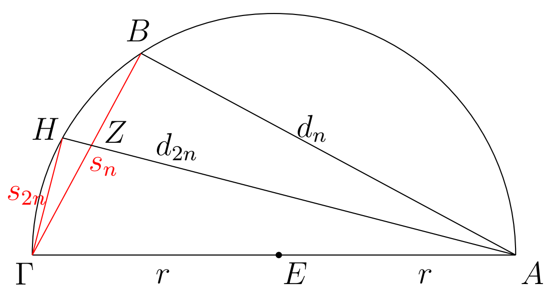


Figura 14: $s_n = B\Gamma$ e $s_{2n} = H\Gamma$ sono i lati dei poligoni regolari inscritti con n e $2n$ lati; AH è la bisettrice dell'angolo $\angle \Gamma AB$; $d_n = AB$ e $d_{2n} = AH$. In figura, il caso $n = 6$.

Notazioni per i poligoni inscritti

- P_n' il poligono regolare inscritto di n lati.
- s_n il lato di P_n'.
- $d_n = AB$ il secondo cateto del triangolo rettangolo avente l'ipotenusa $2r$ e un cateto uguale a s_n.

- r il raggio della circonferenza.

Si parte dall'esagono regolare inscritto P'_6 e, raddoppiando di seguito il numero dei lati, si considerano i poligoni regolari inscritti con 3×2^h lati, con $h = 1, 2, 3, 4, 5$, arrivando così al poligono regolare inscritto P'_{96} di 96 lati. Poiché

$$\frac{\text{Perimetro } P'_n \text{ inscritto}}{\text{Diametro}} = n\,\frac{s_n}{2r} < \frac{\text{Circonferenza}}{\text{Diametro}} = \pi,$$

per approssimare dal basso π occorre trovare approssimazioni di $s_n/2r$ dal basso. Come nel caso dei poligoni circoscritti, Archimede ritiene più conveniente trovare stime numeriche dei rapporti reciproci $2r/s_n$, ovviamente dall'alto. A questo scopo, Archimede ricorre a un metodo iterativo che permette di calcolare (un'approssimazione dall'alto di) $2r/s_{2n}$, conoscendo (un'approssimazione dall'alto di) $2r/s_n$. Il motivo per cui è conveniente prendere in considerazione i reciproci $2r/s_n$, al posto dei rapporti $s_n/2r$, sarà chiaro dalla forma delle uguaglianze (63) e (66) più sotto.

L'argomentazione di Archimede si fonda sui due fatti seguenti:

1. La proporzione (valida per ogni n):

$$(2r + d_n) : s_n = d_{2n} : s_{2n} \tag{63}$$

   cioè

$$\frac{d_{2n}}{s_{2n}} = \frac{2r}{s_n} + \frac{d_n}{s_n} \tag{64}$$

   Queste uguaglianze si dimostrano utilizzando il teorema della bisettrice (come nel caso dei poligoni circoscritti) e la similitudine dei triangoli rettangoli $AH\Gamma$ e ΓHZ.

2. Il teorema di Pitagora:

$$(2r)^2 = d_n^2 + s_n^2 \tag{65}$$

   che permette di ricavare il rapporto

$$\left(\frac{2r}{s_n}\right)^2 = \left(\frac{d_n}{s_n}\right)^2 + 1 \tag{66}$$

Dimostrazione di (63). Basta studiare il caso $n = 6$. Seguiamo l'argomentazione di Archimede.

Si ha $\angle BAH = \angle H\Gamma B$, perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco HB. Inoltre $\angle BAH = \angle HA\Gamma$ perché, per costruzione, AH è bisettrice di $\angle BA\Gamma$. Di conseguenza,

$$\angle H\Gamma B = \angle HA\Gamma \tag{67}$$

perché entrambi uguali a $\angle BAH$. Da quest'ultima uguaglianza segue che i due triangoli rettangoli $AH\Gamma$ e ΓHZ sono simili. Pertanto,

$$AH : H\Gamma = \Gamma H : HZ = A\Gamma : \Gamma Z \tag{68}$$

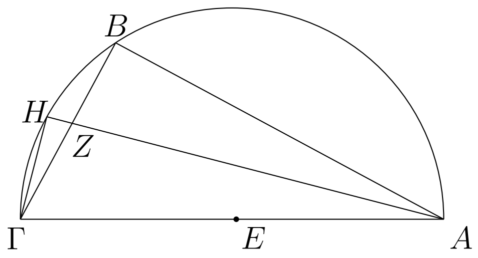


Figura 15: $B\Gamma$ e $H\Gamma$ sono lati dell'esagono e del dodecagono regolari inscritti.

Per il teorema della bisettrice (Euclide, *Elementi*, libro VI, Prop.3) applicato al triangolo ΓAB, abbiamo

$$A\Gamma : \Gamma Z = BA : BZ \tag{69}$$

Da questa proporzione deduciamo successivamente:

$$\begin{aligned}
&\text{Permutando (Euclide, V.16):} && A\Gamma : BA = \Gamma Z : BZ \\
&\text{Componendo (Euclide, V.18):} && (A\Gamma + BA) : (\underbrace{\Gamma Z + BZ}_{= B\Gamma}) = A\Gamma : \Gamma Z \\
&\text{Quindi, per la (68):} && (BA + A\Gamma) : B\Gamma = AH : H\Gamma
\end{aligned}$$

ossia

$$\frac{BA + A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{AH}{H\Gamma} \tag{70}$$

Con le nostre notazioni,

$$\frac{d_6 + 2r}{s_6} = \frac{d_{12}}{s_{12}} \tag{71}$$

Più in generale, esattamente con la stessa dimostrazione, troviamo l'uguaglianza

$$\frac{d_n + 2r}{s_n} = \frac{d_{2n}}{s_{2n}} \tag{72}$$

che coincide con la (63), che volevamo dimostrare.

Il procedimento ricorsivo

Descriviamo ora esplicitamente, nel linguaggio moderno, lo schema ricorsivo seguito da Archimede per calcolare i rapporti del tipo d_n/s_n e $2r/s_n$. Si ricordi che (come spiegato sopra) tutti questi rapporti sono approssimati da Archimede dall'alto.

- Si parte dall'esagono inscritto ($n = 6$), per il quale $s_6 = r$ e $d_6 = \sqrt{3}r$. Le stime per i primi due rapporti iniziali sono

$$\frac{d_6}{s_6} \left(= \sqrt{3}\right) < \frac{1351}{780} \qquad \frac{2r}{s_6} = 2 \tag{73}$$

  (La maggiorazione (73) per $\sqrt{3}$ è data nel testo senza spiegazione; per una possibile ricostruzione dei conti, si veda la (149)).

- Passiamo al dodecagono inscritto. Occorre allora stimare i rapporti d_{12}/s_{12} e $2r/s_{12}$. A questo scopo, dall'uguaglianza (63), si ricava anzitutto

$$\frac{d_{12}}{s_{12}} = \frac{2r}{s_6} + \frac{d_6}{s_6} = 2 + \sqrt{3} \left(< 2 + \frac{1351}{780} \right) \tag{74}$$

Quindi, utilizzando il teorema di Pitagora (65), nella forma

$$\frac{2r}{s_{12}}^2 = \left(\frac{d_{12}}{s_{12}} \right)^2 + 1, \tag{75}$$

si calcola infine una stima dall'alto per

$$\frac{2r}{s_{12}} = \sqrt{\left(\frac{d_{12}}{s_{12}} \right)^2 + 1} \tag{76}$$

- Raddoppiando di seguito il numero di lati, si itera il procedimento. Vale a dire, esattamente come si è fatto sopra, si passa dalla coppia di rapporti $\frac{d_n}{s_n}, \frac{2r}{s_n}$ alla coppia $\frac{d_{2n}}{s_{2n}}, \frac{2r}{s_{2n}}$ con lo schema seguente:

$$\frac{d_{2n}}{s_{2n}} = \frac{2r}{s_n} + \frac{d_n}{s_n} \tag{77}$$

e

$$\frac{2r}{s_{2n}} = \sqrt{\left(\frac{d_{2n}}{s_{2n}} \right)^2 + 1} \tag{78}$$

5.3.1 Schema delle approssimazioni con poligoni inscritti.

Vediamo ora, in modo sintetico, lo schema seguito da Archimede per fornire una stima di π dal basso, mediante lo studio dei poligoni regolari inscritti nel cerchio, riportando i relativi valori numerici. Rimandiamo al paragrafo 6 per i dettagli sul calcolo delle radici quadrate. Per semplicità, poniamo

$$\gamma_n = \frac{d_n}{s_n}, \qquad \delta_n = \frac{2r}{s_n} \tag{79}$$

La proporzione (63) si scrive allora

$$\gamma_{2n} = \gamma_n + \delta_n \tag{80}$$

e dal teorema di Pitagora (66) si ricava

$$\delta_n^2 = \gamma_n^2 + 1 \tag{81}$$

ossia

$$\delta_n = \sqrt{\gamma_n^2 + 1} \tag{82}$$

Quindi, sostituendo il valore di δ_{2n} dato da (82) in

Si inizia con l'esagono regolare inscritto P_6'. Bisecando gli angoli al centro, e quindi raddoppiando di volta in volta il numero dei lati, si arriva al poligono regolare inscritto P'_{96}. Si ricordi che che per ottenere un'approssimazione dal basso di π mediante le disuguaglianze

$$n\frac{s_n}{2r} = \frac{\text{Perimetro } P'_n \text{ inscritto}}{\text{Diametro}} < \frac{\text{Circonferenza}}{\text{Diametro}} = \pi$$

occorre approssimare $s_n/2r$ *dal basso*. Di conseguenza, per le (79), i valori dei $\gamma_n = \frac{d_n}{s_n}$ e dei $\delta_n = \frac{2r}{s_n}$ (e le relative radici quadrate) dovranno essere approssimati *dall'alto*.

I calcoli di Archimede nella *Misura del Cerchio* per approssimare dal basso il rapporto $\frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}}$ con i rapporti $\frac{\text{PERIMETRI POLIGONI INSCRITTI}}{\text{DIAMETRO}}$ sono schematizzati qui sotto (Si veda il paragrafo 6.2 per commenti sui calcoli approssimati delle radici quadrate).

$\boxed{\text{Schema dei conti per approssimare } \pi \text{ dal basso}}$

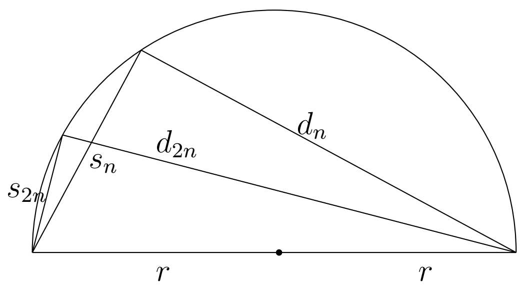


Figura 16:

NOTAZIONI:

r: raggio del cerchio;
s_n: lato del poligono regolare P'_n inscritto;
d_n: secondo cateto del triangolo rettangolo di ipotenusa $2r$ e cateto s_n;
$\gamma_n = \frac{d_n}{s_n}$; $\delta_n = \frac{2r}{s_n}$.

RELAZIONI: $\gamma_{2n} = \gamma_n + \delta_n$; $\delta_{2n}^2 = \gamma_{2n}^2 + 1$; $\delta_{2n} = \sqrt{\gamma_{2n}^2 + 1}$.

DATI INIZIALI: γ_6, δ_6. (Il caso dell'esagono inscritto.)

N.B. Tutti i γ e i δ devono essere approssimati dall'alto.

STRATEGIA: Trovare un'approssimazione dall'alto per $\delta_{96} = 2r/s_{96}$; ricavarne una stima dal basso per il reciproco $s_{96}/2r$ e infine una stima dal basso per π tramite la disuguaglianza:

$$\frac{\text{PERIMETRO DI } P_{96}}{\text{DIAMETRO}} = 96 \times \frac{96 s_{96}}{2r} < \pi$$

$$\gamma_6 (= \sqrt{3}) < \frac{1351}{780}$$

L'approssimazione $\gamma_6 (= d_6/s_6) = \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ è motivata in (149)

$$\delta_6 = 2$$

$\delta_6 = \frac{2r}{s_6} = 2$ perché $s_6 = r$.

$$\gamma_{12} < \frac{1351}{780} + 2 = \frac{2911}{780}$$

Per (80), $\gamma_{12} = \gamma_6 + \delta_6$

$$\delta_{12}^2 < \left(\frac{2911}{780}\right)^2 + 1 = \frac{9.082.321}{780^2}$$

$\delta_{12}^2 = \gamma_{12}^2 + 1$ per (81)

$$\delta_{12} < \frac{\sqrt{9.082.321}}{780} < \frac{3013 + \frac{3}{4}}{780}$$

Per (166).

$$\gamma_{24} < \frac{2911}{780} + \frac{3013 + \frac{3}{4}}{780} = \frac{5924 + \frac{3}{4}}{780} = \frac{1823}{240}$$

Per (80), $\gamma_{24} = \gamma_{12} + \delta_{12}$

$$\delta_{24}^2 < \left(\frac{1823}{240}\right)^2 + 1 = \frac{3.380.929}{240^2}$$

$\delta_{24}^2 = \gamma_{24}^2 + 1$ per (82).

$$\delta_{24} < \frac{\sqrt{3.380.929}}{240} < \frac{1838 + \frac{9}{11}}{240}$$

Per (169).

$$\gamma_{48} < \frac{1823}{240} + \frac{1838 + \frac{9}{11}}{240} = \frac{3661 + \frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66}$$

Per (80), $\gamma_{48} = \gamma_{24} + \delta_{24}$

$$\delta_{48}^2 < \left(\frac{1007}{66}\right)^2 + 1 = \frac{1.018.405}{66^2}$$

$\delta_{48}^2 = \gamma_{48}^2 + 1$ per (82).

$$\delta_{48} < \frac{\sqrt{1.018.405}}{66} < \frac{1009 + \frac{1}{6}}{66}$$

Per (164).

$$\gamma_{96} < \frac{1007}{66} + \frac{1009 + \frac{1}{6}}{66} = \frac{2016 + \frac{1}{6}}{66}$$

Per (80), $\gamma_{96} = \gamma_{48} + \delta_{48}$

$$\delta_{96}^2 < \left(\frac{2016 + 1/6}{66}\right)^2 + 1 = \frac{4.069.284 + 1/36}{66^2}$$

$\delta_{96}^2 = \gamma_{96}^2 + 1$ per (82).

$$\delta_{96} < \frac{\sqrt{4.069.284 + 1/36}}{66} < \frac{2017 + 1/4}{66}$$

Per (165).

Al passo finale, si trova così la stima dall'alto

$$\delta_{96} = \frac{2r}{s_{96}} < \frac{2017 + \frac{1}{4}}{66}$$

che, passando ai reciproci, consente di trovare una stima dal basso del rapporto $s_{96}/2r$:

$$\frac{s_{96}}{2r} > \frac{66}{2017 + \frac{1}{4}} \tag{83}$$

Allora, il rapporto $96s_{96}/2r$ tra il perimetro del poligono inscritto di 96 lati e il diametro $2r$ soddisfa:

$$\begin{aligned}
\pi &> 96\frac{s_{96}}{2r} \\
&> 96\,\frac{66}{2017 + \frac{1}{4}} \\
&= \frac{6336}{2017 + \frac{1}{4}} \\
&> 3 + \frac{10}{71}
\end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza si può giustificare, ad esempio, utilizzando le divisioni successive:

$$\begin{aligned}
\frac{6336}{2017 + \frac{1}{4}} &= \frac{25344}{8069} \\
&= 3 + \frac{1137}{8069} \\
&= 3 + \frac{1}{\frac{8069}{1137}} \\
&= 3 + \frac{1}{7 + \frac{110}{1137}} \\
&> 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{10}} \\
&= 3 + \frac{10}{71}
\end{aligned}$$

Concludendo,

$$\pi > 3 + \frac{10}{71} \tag{84}$$

Dalla stima dall'alto (61), già ottenuta con i poligoni circoscritti,

$$\pi < 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \tag{85}$$

e dalla (84) seguono infine le disuguaglianze con le quali termina la *Misura del Cerchio*:

$$\boxed{3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}} \tag{86}$$

Arrestandoci alle prime cinque cifre decimali, abbiamo

$$3.140845... = 3+\frac{10}{71}<\pi = 3.141592... < 3+\frac{1}{7} = 3.\overline{142857} \tag{87}$$

Una formula ricorsiva

Il procedimento che abbiamo descritto Vediamo ora in modo più esplicito la dipendenza di s_{2n} da s_n.

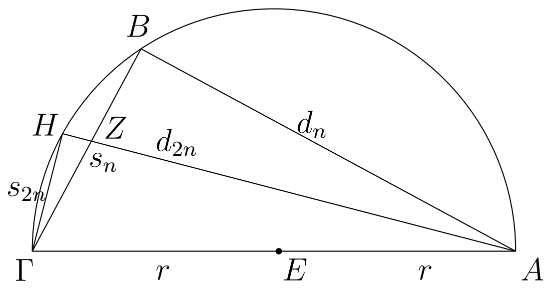


Figura 17: $s_n = B\Gamma$ e $s_{2n} = H\Gamma$ sono i lati dei poligoni regolari inscritti con n e $2n$ lati; AH è la bisettrice dell'angolo $\angle \Gamma AB$; $d_n = AB$ e $d_{2n} = AH$.

Abbiamo già visto che

$$d_{2n} : s_{2n} = (2r + d_n) : s_n$$

(Si veda (64).) Elevando a quadrato,

$$d_{2n}^2 : s_{2n}^2 = (2r + d_n)^2 : s_n^2$$

Componendo,

$$\begin{aligned}(d_{2n}^2 + s_{2n}^2) : s_{2n}^2 &= [(2r + d_n)^2 + s_n^2] : s_n^2 \\ &= [(2r)^2 + 2(2r)d_n + d_n^2 + s_n^2] : s_n^2\end{aligned}$$

ossia

$$(2r)^2 : s_{2n}^2 = (8r^2 + 4rd_n) : s_n^2$$

perché, per il Teorema di Pitagora, $d_{2n}^2 + s_{2n}^2 = d_n^2 + s_n^2 = (2r)^2$. Dunque,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2r}{s_{2n}}\right)^2 &= \frac{8r^2 + 4rd_n}{s_n^2} \\ &= \frac{8r^2 + 4r\sqrt{(2r)^2 - s_n^2}}{s_n^2}\end{aligned}$$

$d_{2n} = \sqrt{(2r)^2 - s_{2n}^2}$ per il Teorema di Pitagora.

$$= 2\left(\frac{2r}{s_n}\right)^2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}\right]$$

In conclusione, passando ai reciproci, il procedimento di Archimede per passare da s_n a s_{2n} equivale all'applicazione ripetuta della formula

$$s_{2n}^2 = \frac{(2r)^2\, s_n^2}{8r^2 + 4r\sqrt{(2r)^2 - s_n^2}} \tag{88}$$

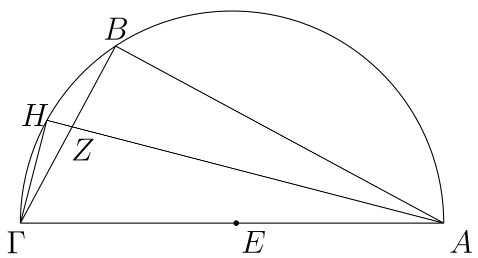
5.4 Digressione: Archimede e le radici della trigonometria

> "*Quello che Archimede qui* [nella *Misura del Cerchio*] *stava sviluppando era l'inizio della trigonometria.*"[94] Otto Toeplitz, [54].

I metodi utilizzati da Archimede nella *Misura del Cerchio* sono importanti per motivi che vanno oltre il problema specifico del calcolo del rapporto tra circonferenza e diametro di un cerchio. In questo trattato, infatti, si leggono dei risultati che sembrano adombrare il successivo sviluppo della trigonometria. In particolare, i risultati di Archimede sono stati forse utilizzati per la costruzione delle prime tabelle di seni e coseni, compilate soprattutto per le applicazioni all'astronomia.[95] In questo paragrafo e nel prossimo vediamo in che senso i risultati di Archimede si possano interpretare come un inizio della trigonometria.

Formule di bisezione e duplicazione

Riprendiamo i calcoli di Archimede sui poligoni inscritti nel cerchio.



Abbiamo visto che Archimede esprime il lato s_{2n} del poligono regolare inscritto (con $2n$ lati) in termini di s_n mediante un procedimento descritto, nelle notazioni algebriche moderne, dalla formula

$$s_{2n}^2 = \frac{(2r)^2\, s_n^2}{8r^2 + 4r\sqrt{(2r)^2 - s_n^2}} \tag{89}$$

(Si veda (88).) Se si assume il raggio come unità di misura si ottiene (ponendo $r = 1$)

$$s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{2 + 4\sqrt{4 - s_n^2}}$$

ovvero, razionalizzando e semplificando,

$$s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2} \tag{90}$$

Da quest'ultima uguaglianza si ricava la formula inversa[96], che esprime s_n in termini di s_{2n}:

$$s_n = s_{2n}\sqrt{4 - s_{2n}^2} \tag{91}$$

Il lato $B\Gamma = s_n$ del poligono regolare inscritto di n lati corrisponde a un angolo al centro di $2\pi/n$ radianti. Quindi, nel caso $r = 1$, chiamato M il punto medio di $B\Gamma$, si ha $MB = \sin\frac{\pi}{n}$.

Denotiamo con

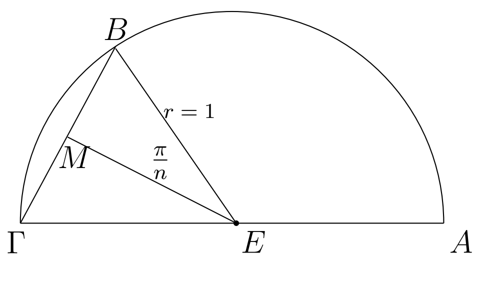
$$\textsc{corda}\,(\alpha) \tag{92}$$

la corda del cerchio di raggio unitario corrispondente all'angolo al centro α, la relazione tra le notazioni in termini di corda e di seno è data allora, per un cerchio di raggio unitario, da

$$\textsc{corda}\,(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{93}$$

In particolare, il lato s_n del poligono regolare inscritto con n lati è dato da

$$s_n = \textsc{corda}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{94}$$



Analogamente, il lato s_{2n} del $2n$-gono inscritto è dato da

$$s_{2n} = 2\sin\frac{\pi}{2n} \tag{95}$$

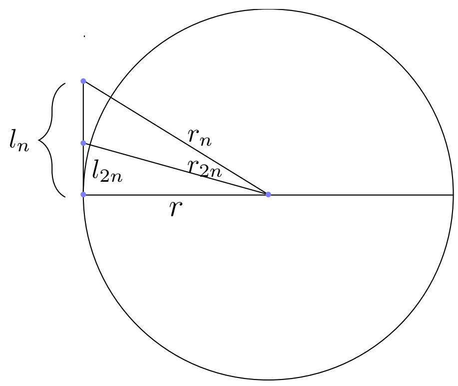
Poniamo
$$\vartheta_n = \frac{\pi}{n} \tag{96}$$
e quindi
$$s_n = 2\sin\vartheta_n, \qquad s_{2n} = 2\sin\frac{\vartheta_n}{2}, \tag{97}$$

In definitiva, *le uguaglianze ricavate da Archimede nello studio dei poligoni inscritti si posssono scrivere, con le moderne notazioni trigonometriche, nel modo seguente:*

1. Dalla formula (90) si ricava $\sin\vartheta_n/2$ in termini di $\sin\vartheta_n$. Precisamente, con le notazioni (97), l'uguaglianza tra corde data da (90) si scrive
$$\begin{aligned} 4\sin^2\frac{\vartheta_n}{2} &= 2 - 2\sqrt{1-\sin^2\vartheta_n} \\ &= 2 - 2\cos\vartheta_n \end{aligned}$$
Otteniamo dunque la *formule di bisezione*, che possiamo scrivere come
$$\sin\frac{\vartheta_n}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\vartheta_n}{2}} \tag{98}$$
oppure come
$$2\sin^2\left(\frac{\vartheta_n}{2}\right) = 1-\cos\vartheta_n \tag{99}$$

2. La formula (91), che inverte la (90) esprimendo la corda s_n in termini della corda s_{2n}, si legge, con le notazioni (97),
$$\sin\vartheta_n = 2\sin\frac{\vartheta_n}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\vartheta_n}{2}} \tag{100}$$
ossia,
$$\sin\vartheta_n = 2\sin\frac{\vartheta_n}{2}\cos\frac{\vartheta_n}{2} \tag{101}$$
Dunque, la relazione tra corde (91) esprime la *formula di duplicazione* del seno.

Osservazioni analoghe valgono per i calcoli fatti con i poligoni circoscritti. I rapporti (paragrafo 5.2.1)
$$\alpha_n = \frac{r}{l_n}, \qquad \beta_n = \frac{r_n}{l_n} \tag{102}$$
si scrivono:
$$\alpha_n = \frac{r}{l_n} = \frac{1}{\tan\vartheta_n} = \cot\vartheta_n, \qquad \beta_n = \frac{r_n}{l_n} = \frac{1}{\sin\vartheta_n} = \csc\vartheta_n \tag{103}$$
dove $\vartheta_n = \frac{\pi}{n}$. Quindi le uguaglianze utilizzate nella dimostrazione della *Proposizione* 3 e ricavate dallo studio dei poligoni circoscritti, possono essere interpretate nel modo seguente:



1. L'uguaglianza
$$\frac{r}{l_{2n}} = \frac{r}{l_n} + \frac{r_n}{l_n} \tag{104}$$
(si veda (42)) si scrive
$$\cot\frac{\vartheta_n}{2} = \cot\vartheta_n + \frac{1}{\sin\vartheta_n} = \cot\vartheta_n + \csc\vartheta_n \tag{105}$$

2. L'uguaglianza
$$\frac{r_n}{l_n} = \sqrt{\left(\frac{r}{l_n}\right)^2 + 1} \tag{106}$$
(si veda (44)) equivale a
$$\csc\vartheta_n = \sqrt{\left(\cot^2\vartheta_n\right)^2 + 1} \tag{107}$$

3. La formula iterativa
$$\frac{r}{l_{2n}} = \frac{r}{l_n} + \sqrt{\left(\frac{r}{l_n}\right)^2 + 1} \tag{108}$$
(si veda (108)) si legge allora come l'identità
$$\cot\frac{\vartheta_n}{2} = \cot\vartheta_n + \sqrt{\cot^2\vartheta_n + 1} \tag{109}$$

5.4.1 Risultato attribuito ad Archimede da Tābit ibn Qurra

Il grande scienziato Tābit ibn Qurra[97] - attivo a Baghdad nella seconda metà del IX secolo d.C. - è autore (tra altri) di un trattato il cui scopo è di ricostruire un'opera, attribuita ad Archimede, il cui originale a quel tempo era già andato perduto e della quale erano diponibili soltanto copie apocrife, verosimilmente corrotte.[98] Lo scienziato islamico denomina quest'opera perduta (o, meglio, perduta nella sua forma originaria) il "*Libro di Archimede che tratta della divisione del cerchio in sette parti uguali*" (cioè, tratta della costruzione dell'ettagono regolare inscritto in un cerchio). Da questa ricostruzione da parte di Tābit ibn Qurra dell'opera di

Archimede, riportiamo un teorema (attribuito dallo scienziato arabo a Archimede) che, opportunamente interpretato con le notazioni moderne, fornisce la formula di bisezione[99] che esprime sin $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

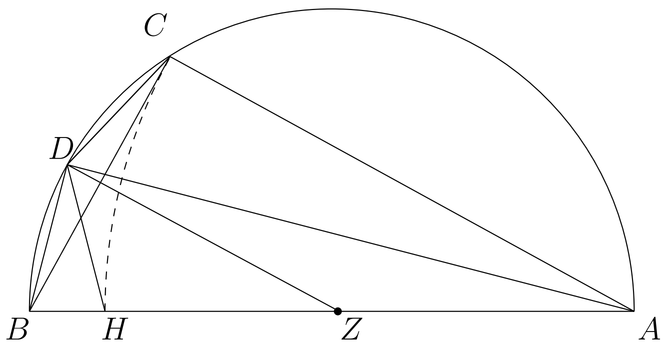


Figura 18: Figura in C. Schoy [49], pag. 81-82, *Proposizione* 14.

Proposizione (*Proposizione* 14 di Archimede in Schoy [49], pag. 81) *Sia dato il semicerchio ACB, in cui siano AB il diametro e Z il punto medio di AB, e si tracci la corda AC (Fig. 18). Dividiamo in due parti uguali l'arco BC con il punto D e tracciamo le corde DB e DC. Sia H il punto sul diametro AB per il quale si abbia $AH = AC$. Dico allora che*

$$ZB \times BH = BD^2 \tag{110}$$

Dimostrazione. (Schoy [49], pag. 81.) I due triangoli ACD e AHD sono congruenti. Infatti, hanno due coppie di lati uguali (AD in comune e $AC = AH$ per costruzione) e gli angoli compresi uguali ($\angle CAD = \angle DAB$, perché angoli alla circonferenza che insistono su archi che sono uguali per costruzione). Dall'uguaglianza di tali triangoli segue allora $DC = DH$ e quindi (essendo $DC = DB$, in quanto corde che sottendono archi uguali per costruzione) anche

$$DB = DH \tag{111}$$

Per quest'ultima uguaglianza, il triangolo BDH è isoscele. Anche il triangolo BZD è isoscele (essendo ZB e ZD raggi dello stesso cerchio), e i due triangoli isosceli BDH e BZD sono simili, avendo l'angolo alla base DBH in comune. Dalla loro similitudine segue la proporzione

$$ZB : BD = BD : BH \tag{112}$$

che equivale alla tesi (110). $\square$

Vediamo ora l'interpretazione in termini trigonometrici del teorema di Archimede appena dimostrato. Nel caso di un cerchio di raggio unitario, si ha:

$$\begin{aligned}
&BZ = 1\\
&BD = \textsc{corda}\,(\alpha) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\\
&AH = AC = \textsc{corda}\,(180^\circ - 2\alpha) = 2\sin\,(90^\circ - \alpha) = 2\cos\alpha\\
&BH = AB - HA = 2 - 2\cos\alpha
\end{aligned}$$

Tenendo conto di queste ultime uguaglianze, vediamo subito che la tesi (110)

$$BD^2 = ZB \times BH$$

della *Proposizione* di Archimede non è altro che l'uguaglianza

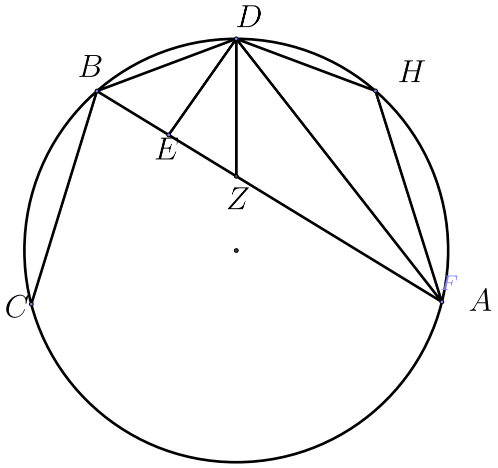
$$2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos\alpha \tag{113}$$

che dà la *formula di bisezione*. Ritroviamo così, in un altro modo, l'uguaglianza (99), già ricavata direttamente dai risultati della *Misura del Cerchio*.

5.4.2 Il teorema della corda spezzata di Archimede in un'opera di al-Birūni e le formule di addizione e sottrazione

Il *Libro per il calcolo delle corde di un cerchio*[100] (si veda [50]) - grosso modo, una sorta di trattato di trigonometria odierna - del grande scienziato islamico persiano al-Birūni[101] si fonda su un teorema, detto *della corda spezzata*, del quale lo scienziato persiano riporta 23 dimostrazioni. Di queste, tre sono attribuite ad Archimede, quattro allo stesso al-Birūni e le restanti ad altri matematici islamici. Da questo teorema è possibile dedurre, almeno in linea di principio, le formule di addizione e sottrazione per $\sin(\alpha - \beta)$ e $\sin(\alpha + \beta)$. Pertanto, alcuni studiosi giudicano possibile che la trigonometria di Archimede fosse già sufficientemente sviluppata per permettere la costruzione tabelle di seni di angoli.[102] Riportiamo qui la prima delle dimostrazioni di Archimede contenute nel trattato di al-Birūni. (Si vedano [50], [13], [10], [8].)

Il teorema della corda spezzata di Archimede



Teorema (della corda spezzata). *Dato un cerchio, siano* $\textsc{arco}(AB)$ *e* $\textsc{arco}(BC)$ *due archi disuguali, diciamo con* $\textsc{arco}(AB)$ *maggiore di* $\textsc{arco}(BC)$*. Tracciamo la corda spezzata* ABC*. Chiamiamo* D *il punto medio dell'arco* $\textsc{arco}(ABC)$*, somma di* $\textsc{arco}(AB)$ *e* $\textsc{arco}(BC)$*. Sia* E *la proiezione ortogonale di* D *sulla corda maggiore* AB*. Allora* E *è il punto medio della corda spezzata* ABC*, cioè*

$$CB + BE = EA \tag{114}$$

Dimostrazione (Attribuita in [50] da Al Birūni a Archimede.)[103]

Costruiamo $\textsc{arco}(DH)$ uguale a $\textsc{arco}(DB)$. Anche le relative corde saranno uguali:

$$DH = DB \tag{115}$$

Sul prolungamento del segmento BE sia Z il punto per il quale

$$BE = EZ \tag{116}$$

Tracciamo le corde DZ e DA. I due triangoli rettangoli DEB e DEZ sono uguali (i cateti BE e BZ uguali; il cateto DE in comune). Allora $DB = DZ$ e quindi per l'uguaglianza (115) si ha

$$DB = DZ = DH \tag{117}$$

Si ha poi

$$\textsc{arco}(AH) = \textsc{arco}(CB) \tag{118}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
\textsc{arco}(AH) &= \textsc{arco}(AD) - \textsc{arco}(DH) \\
&= \textsc{arco}(CD) - \textsc{arco}(DB) && \text{(}\textsc{arco}(AD) = \textsc{arco}(DC) \text{ e } \textsc{arco}(DH) = \textsc{arco}(DB)\text{, per costruzione.)} \\
&= \textsc{arco}(CB)
\end{aligned}$$

Quindi sono uguali anche le relative corde:

$$AH = CB \tag{119}$$

Vale poi l'uguaglianza tra angoli

$$\angle DBA = \angle DAB + \angle HDA \tag{120}$$

perché l'angolo alla circonferenza $\angle DBA$ insiste su un arco che è uguale alla somma degli archi su cui insistono gli angoli $\angle DAB$ e $\angle HDA$. Infatti:

(a) l'angolo alla circonferenza $\angle DBA$ insiste su un arco che è la somma $\textsc{arco}(DH) + \textsc{arco}(HA)$;
(b) l'angolo alla circonferenza $\angle DAB$ insiste sull'arco $\textsc{arco}(BD)$, che è uguale a $\textsc{arco}(DH)$;
(c) l'angolo alla circonferenza $\angle HDA$ insiste su $\textsc{arco}(HA)$.

Dunque,

$$\begin{aligned}
\angle DAB + \angle HDA &= \angle DBA && \text{Per l'uguaglianza (120).} \\
&= \angle DZB && \text{Perché il triangolo } BDZ \text{ è isoscele.} \\
&= \angle ZAD + \angle ZDA
\end{aligned}$$

In definitiva, si è dimostrato che

$$\angle DAB + \angle HDA = \angle ZAD + \angle ZDA \tag{121}$$

e da quest'ultima uguaglianza (121) segue subito

$$\angle HDA = \angle ZDA \tag{122}$$

perché $\angle DAB = \angle ZAD$. Allora, i triangoli DZA e DHA sono uguali (perché $DZ = DH$, il lato DA è in comune e $\angle ZDA = \angle HDA$). Dall'uguaglianza di questi due triangoli segue, in particolare, che

$$AZ = AH \tag{123}$$

Così:

$$\begin{aligned}
AZ + ZE &= AH + ZE && \text{Per la (123).} \\
&= CB + EB && \text{Perché } AH = CB \text{ per la (119), mentre } EZ = EB \text{ per la costruzione (116).}
\end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo dimostrato l'uguaglianza

$$AZ + ZE = CB + BE \tag{124}$$

che dice che la corda spezzata ABC è divisa dal punto E in due parti uguali, come si doveva dimostrare. □

Formule di addizione e sottrazione

Con le stesse notazioni del *Teorema della corda spezzata* dimostrato sopra, supponiamo ora che il raggio del cerchio sia unitario ($r = 1$). Poniamo

$$\textsc{arco}(AD) = 2\alpha, \qquad \textsc{arco}(DB) = 2\beta \tag{125}$$

Passando alle notazioni moderne e ricordando che, per ogni angolo al centro ϑ, vale l'uguaglianza

$$\textsc{corda}(2\vartheta) = 2\sin\vartheta \tag{126}$$

abbiamo allora:

$$\begin{aligned} AD &= 2\sin\alpha \\ AE &= 2\sin\alpha\cos\beta \\ DB &= 2\sin\beta \\ EB &= 2\sin\beta\cos\alpha \\ AB &= 2\sin(\alpha+\beta) \\ CB &= 2\sin(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

Tenendo conto di queste uguaglianze, la tesi (114) del *Teorema della corda spezzata*, scritta nella forma

$$CB = EA - EB, \tag{127}$$

si esprime ora, in termini di seno e coseno, come

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \tag{128}$$

Dunque, il *Teorema della corda spezzata* di Archimede è strettamente correlato alla formula di sottrazione per il seno, della quale non fornisce altro che una formulazione in termini di lunghezze di corde. Similmente, l'uguaglianza $AB = AE + EB$ si può leggere, tramite la relazione (126), come la formulazione in termini di corde della formula di addizione del seno,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \tag{129}$$

6 Metodi per approssimare le radici quadrate

"*Il primo matematico greco che - ciò che nessuno aveva fatto prima di lui - dovette* fare dei calcoli *con quantità irrazionali e non si accontentò di fare speculazioni su di esse, fu Archimede.*" S. Günther[104]

Non si conosce con certezza il metodo seguìto da Archimede per calcolare i valori approssimati, dall'alto e dal basso, delle radici quadrate. È anche possibile che abbia utilizzato diversi metodi, e non sempre in modo rigido. Ad esempio, sembra che siano state preferite approssimazioni le cui parti frazionarie fossero frazioni aventi come denominatore una potenza di 2 (del tipo $1/2^k$), anche se meno accurate di altre approssimazioni facilmente ottenibili.[105] Le possibili ricostruzioni delle tecniche utilizzate da Archimede sono numerose e la letteratura scientifica a questo riguardo è molto vasta.[106] Secondo una delle ricostruzioni[107] più verosimili e diffuse, Archimede avrebbe fatto uso di poche e semplici disuguaglianze, che descriviamo nel prossimo paragrafo 6.1. Dimostreremo queste disuguaglianze nello stile algebrico di oggi, ma accenneremo anche a possibili interpretazioni geometriche, più vicine al pensiero matematico greco. Un altro metodo di approssimazione, quello delle frazioni continue, sarà brevemente esposto nel paragrafo 6.3.

6.1 Le disuguaglianze fondamentali

Uno dei metodi presumibilmente seguìto da Archimede per il calcolo approssimato delle radici quadrate è basato sui due lemmi seguenti.

Lemma 4 (Approssimazione di radici. Prima versione.) *Il numero intero $d = a^2 + b$ sia strettamente compreso tra i due quadrati perfetti a^2 e $(a+1)^2$,*

$$a^2 < a^2 + b < (a+1)^2 \tag{130}$$

Allora,

$$a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a} \tag{131}$$

Dimostrazione La maggiorazione

$$\sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a}, \tag{132}$$

è ovvia e ha una semplice interpretazione geometrica. Infatti, basta osservare che equivale, elevando a quadrato (regola del quadrato del binomio, Euclide, *Elementi*, II, 4), alla ovvia disuguaglianza

$$a^2 + b < a^2 + b + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \tag{133}$$

Per dimostrare l'approssimazione dal basso

$$a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b}, \tag{134}$$

si noti, anzitutto, che da (130) segue

$$0 < b < 2a+1 \tag{135}$$

ossia $0 < \frac{b}{2a+1} < 1$. Quindi

$$\left(\frac{b}{2a+1}\right)^2 < \frac{b}{2a+1} \tag{136}$$

Dalla (136) ricaviamo allora

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{b}{2a+1}\right)^2 &= a^2 + \frac{2ab}{2a+1} + \left(\frac{b}{2a+1}\right)^2 \\ &< a^2 + \frac{2ab}{2a+1} + \frac{b}{2a+1} \\ &= a^2 + b\end{aligned}$$

da cui segue subito la (134). □

In modo del tutto analogo, considerando il minimo quadrato perfetto che approssima il radicando d dall'alto, si dimostra:

Lemma 5 (Approssimazione di radici. Seconda versione.) *Il numero intero $d = \alpha^2 - \beta$ sia strettamente compreso tra i due quadrati perfetti consecutivi $(\alpha-1)^2$ e α^2:*

$$(\alpha-1)^2 < \alpha^2 - \beta < \alpha^2 \tag{137}$$

Allora,

$$\alpha - \frac{\beta}{2\alpha-1} < \sqrt{\alpha^2-\beta} < \alpha - \frac{\beta}{2\alpha} \tag{138}$$

Dimostrazione Come nel lemma precedente, l'approssimazione dall'alto

$$\sqrt{\alpha^2-\beta} < \alpha - \frac{\beta}{2\alpha} \tag{139}$$

segue subito dal quadrato del binomio, in quanto equivale a

$$\alpha^2 - \beta < \alpha^2 - \beta + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \tag{140}$$

Dimostriamo ora l'approssimazione dal basso

$$\alpha - \frac{\beta}{2\alpha-1} < \sqrt{\alpha^2-\beta} \tag{141}$$

Da (137) segue: $\quad 0 < \beta < 2\alpha - 1, \quad$ ossia: $\quad 0 < \frac{\beta}{2\alpha-1} < 1$. $\quad$ Pertanto

$$\left(\frac{\beta}{2\alpha - 1}\right)^2 < \frac{\beta}{2\alpha - 1} \tag{142}$$

Allora

$$\begin{aligned}
\left(\alpha - \frac{\beta}{2\alpha - 1}\right)^2 &= \alpha^2 - \frac{2\alpha\beta}{2\alpha - 1} + \left(\frac{\beta}{2\alpha - 1}\right)^2 \\
&< \alpha^2 - \frac{2\alpha\beta}{2\alpha - 1} + \frac{\beta}{2\alpha - 1} \\
&= \alpha^2 - \beta
\end{aligned}$$

che equivale alla (141). Dunque, la (139) è dimostrata. □

Per un'interpretazione geometrica (caso $\beta = 1$), si veda la figura qui sotto.

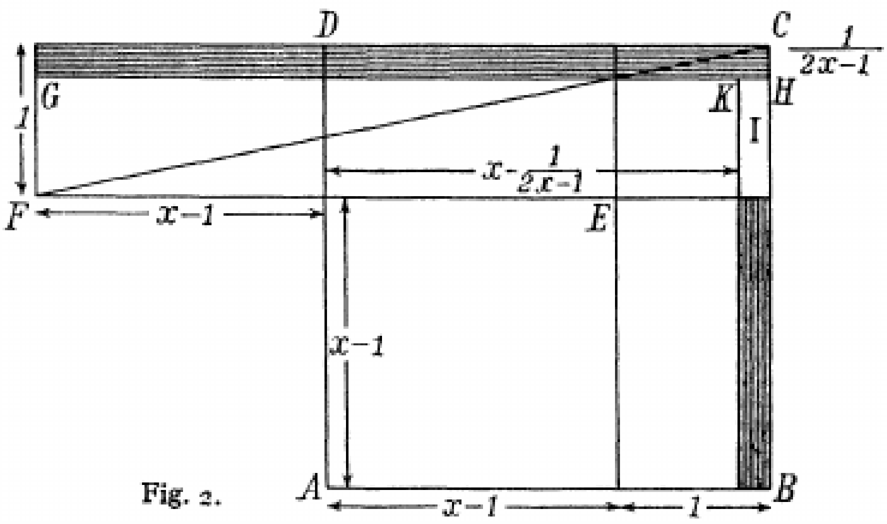


Figura *Una interpretazione geometrica dell'approssimazione dal basso:*

$$x - \frac{1}{2x - 1} < \sqrt{x^2 - 1}$$

(tratta da Hoffmann, [30], dove si trovano altri esempi di disuguaglianze interpretate in modo geometrico). I quadrati di diagonali AC e EC hanno rispettivamente lati x e 1; il rettangolo tratteggiato di diagonale GC ha base $GH = (x-1)+x = 2x-1$ e area 1, e quindi la sua altezza è $CH = \frac{1}{2x-1}$. Allora:

$$x^2 - 1^2 = \textsc{quadrato}(AK) + I = (x - \frac{1}{2x - 1})^2 + I$$

Di qui segue subito:

$$x - \frac{1}{2x - 1} < \sqrt{x^2 - 1}$$

La precedente approssimazione dall'alto

$$\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a} \tag{143}$$

e, per estensione, anche l'altra approssimazione dall'alto

$$\sqrt{\alpha^2-\beta} < \alpha - \frac{\beta}{2\alpha} \tag{144}$$

sono generalmente chiamate *approssimazioni babilonesi.*[108]

Confronto tra le approssimazioni precedenti (131) e (138).

Con le notazioni dei due precedenti *Lemmi* 4 e 5, scriviamo un fissato numero naturale d, che non sia un quadrato perfetto, nei due modi

$$d = a^2 + b \qquad \text{e} \qquad d = \alpha^2 - \beta$$

dove a^2 e $\alpha^2 = (a+1)^2$ sono i quadrati perfetti che meglio approssimano d, rispettivamente dal basso e dall'alto. Poiché $(a+1)^2 - a^2 = 2a+1$ e $b, \beta \geq 1$, si ha $b + \beta = 2a + 1$. Dunque,

$$\alpha = a+1, \qquad \beta = 2a+1-b \tag{145}$$

Valgono allora i due fatti seguenti.

1. Le due approssimazioni dal basso

$$a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} = \sqrt{d} \qquad \alpha - \frac{\beta}{2\alpha-1} < \sqrt{\alpha^2-\beta} = \sqrt{d} \tag{146}$$

coincidono.[109] Cioè, $a + \frac{b}{2a+1} = \alpha - \frac{\beta}{2\alpha-1}$. Infatti, per le relazioni (145),

$$\alpha - \frac{\beta}{2\alpha-1} = a+1 - \frac{2a+1-b}{2a+1} = a + \frac{b}{2a+1}$$

2. Quanto alle due approssimazioni dall'alto di $\sqrt{d} = \sqrt{a^2+b} = \sqrt{\alpha^2-\beta}$, cioè

$$\sqrt{d} = \sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a}, \qquad \sqrt{d} = \sqrt{\alpha^2-\beta} < \alpha - \frac{\beta}{2\alpha}, \tag{147}$$

si noti che la prima è più accurata, cioè

$$a + \frac{b}{2a} \leq \alpha - \frac{\beta}{2\alpha} \tag{148}$$

se, e solo se, $b \leq a$; vale a dire, è più accurata la prima se, e solo se d è *più vicino al quadrato perfetto* a^2 *che al quadrato perfetto* $(a+1)^2$. Infatti, dalle (145) segue

$$\alpha - \frac{\beta}{2\alpha} = a + \frac{b+1}{2a+2}$$

Quindi $a + \frac{b}{2a} \leq \alpha - \frac{\beta}{2\alpha}$ se, e solo se,

$$a + \frac{b}{2a} \leq a + \frac{b+1}{2a+2}, \qquad \text{ossia} \qquad 2ab + 2b \leq 2ab + 2a$$

cioè, se, e solo se, $b \leq a$. La distanza tra a^2 e $(a+1)^2$ è $(a+1)^2 - a^2 = 2a+1$ e quindi i numeri interi $d = a^2 + b$ soddisfacenti $a^2 < d < (a+1)^2$ sono in numero di $2a$. Pertanto, la condizione $b \leq a$ significa che d è più vicino a a^2 che a $(a+1)^2$, come volevamo dimostrare..

6.2 Calcolo delle radici quadrate nella *Misura del Cerchio*

Vediamo ora, nei dettagli, come le conclusioni dei due precedenti *Lemmi* 4 e 5 siano sufficienti per ritrovare *tutte* le approssimazioni di radici quadrate utilizzate da Archimede nella *Misura del Cerchio*. Le ricostruzioni dei conti che ora riportiamo non sono originali: sono conosciute da tempo e seguono, nella sostanza, le ricerche di Heath [24], Hultsch [31], Hofmann [30], Loria [38] e altri.

Ovviamente, non siamo in grado di affermare con certezza che Archimede abbia effettivamente utilizzato queste tecniche; né, tantomeno, che abbia utilizzato *soltanto* queste tecniche.

1. Cominciamo con l'approssimazione fondamentale

$$\boxed{\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}} \tag{149}$$

utilizzata da Archimede per lo studio dell'esagono circoscritto e inscritto. Usiamo il singolare *approssimazione* (anziché parlare di *due* approssimazioni, una per difetto, l'altra per eccesso), perché per Archimede approssimare un numero (un rapporto) c non significa trovare non un *singolo numero* 'vicino' a c, bensì una *coppia* di numeri razionali (α, β), tali $\alpha < c < \beta$. Detto altrimenti, con il linguaggio di oggi, per Archimede una approssimazione di un numero c è un *intervallo* (α, β), con estremi razionali, contenente c.

Seguiamo Heath [24] e Hultsch [31]. Poiché $3 = 2^2 - 1$, possiamo utilizzare le disuguaglianze (138), con $a = 2$ e $b = 1$. Otteniamo:

$$2 - \frac{1}{4-1} < \sqrt{3} < 2 - \frac{1}{4} \tag{150}$$

ossia

$$\frac{5}{3} < \sqrt{3} < \frac{7}{4} \tag{151}$$

Usiamo ora la tecnica seguente: calcoliamo il quadrato $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$ e scriviamo il radicando 3 di $\sqrt{3}$ come frazione con lo stesso denominatore 9 del quadrato appena calcolato:

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{27}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{5^2 + 2} \tag{152}$$

Per la maggiorazione in (138), applicata a $\sqrt{5^2+2}$, otteniamo:

$$\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{5^2 + 2} < \frac{1}{3}\left(5 + \frac{1}{5}\right) = \frac{26}{15} \tag{153}$$

Calcoliamo ancora il quadrato $\left(\frac{26}{15}\right)^2 = \frac{676}{225}$, e scriviamo il radicando 3 come frazione con denominatore $15^2 = 225$:

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{675}{15^2}} = \sqrt{\frac{676-1}{15^2}} = \frac{1}{15}\sqrt{26^2 - 1} \tag{154}$$

Utilizzando ancora le disuguaglianze (138) per $\sqrt{26^2-1}$, otteniamo l'approssimazione dall'alto

$$\sqrt{3} < \frac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{2\times 26}\right) = \frac{1351}{780} \tag{155}$$

La corrispondente approssimazione dal basso, data ancora da (138), è

$$\frac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{51}\right) < \sqrt{3} \tag{156}$$

Poiché $\frac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{51}\right) = 265/153$, abbiamo l'approssimazione dal basso

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} \tag{157}$$

Le due disuguaglianze (155) e (157) danno infine l'approssimazione (149) per $\sqrt{3}$.

Un'altra tecnica per calcolare le approssimazioni di $\sqrt{3}$ - lo sviluppo in frazioni continue - sarà descritto nel paragrafo 6.3.

2.

$$\boxed{591 + \frac{1}{8} < \sqrt{349.450}} \tag{158}$$

Usiamo l'approssimazione dal basso

$$a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} \tag{159}$$

Abbiamo

$$591^2 < 349.450 < 592^2$$

e $349.450 = 591^2 + 169$. Allora, da (159) segue

$$591 + \frac{169}{2\times 591 + 1} < \sqrt{349.450} \tag{160}$$

Poiché $169 = 13^2$ e $2 \times 591 + 1 = 7 \times 13^2$,

$$\begin{aligned} 591 + \frac{169}{2\times 591+1} &= 591 + \frac{13^2}{7\times 13^2} \\ &= 591 + \frac{1}{7} > 591 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

e quindi ricaviamo infine la (158):

$$591 + \frac{1}{8} < \sqrt{349.450}$$

Nel testo della *Misura del Cerchio* viene utilizzata l'approssimazione dal basso $591 + \frac{1}{8}$, meno accurata di $591 + \frac{1}{7}$. Presumibilmente, le frazioni i cui denominatori siano potenze di 2 sono considerate da Archimede più convenienti per semplificare i conti successivi.

3.

$$\boxed{1172 + \frac{1}{8} < \sqrt{1.373.943 + \frac{33}{64}}} \tag{161}$$

Approssimiamo dal basso $\sqrt{1.373.943}$. Il massimo quadrato perfetto che non supera 1.373.943 è $a^2 = 1172^2$, e $1.373.943 = 1172^2 + 359$. Dunque, utilizzando la disuguaglianza

$$a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2 + b} \tag{162}$$

ricaviamo

$$\begin{aligned}\sqrt{1.373.943 + \frac{33}{64}} > \sqrt{1.373.943} = \sqrt{1172^2 + 359} &> 1172 + \frac{359}{2 \times 1172 + 1} \\ &= 1172 + \frac{359}{2345} = 1172 + \frac{1}{\frac{2345}{359}} \\ &= 1172 + \frac{1}{7 - \frac{168}{359}} \\ &> 1172 + \frac{1}{7} \\ &> 1172 + \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Come altrove, l'approssimazione $1172\,\frac{1}{8}$, la cui parte frazionaria è del tipo $1/2^m$, da Archimede è considerata preferibile.

4.

$$\boxed{2339 + \frac{1}{4} < \sqrt{5.472.132 + \frac{1}{16}}} \tag{163}$$

Poiché $2339^2 < 5.472.132 < 2340^2$, con la solita regola otteniamo

$$\sqrt{5.472.132 + \frac{1}{16}} > \sqrt{5.472.132} = \sqrt{2339^2 + 1211} > 2339 + \frac{1211}{2 \times 2339 + 1}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2339 + \frac{1211}{4679} = 2339 + \frac{1}{\frac{4679}{1211}} \\
&> 2339 + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

5.

$$
\boxed{\sqrt{1.018.405} < 1009 + \frac{1}{6}} \tag{164}
$$

Il quadrato perfetto più vicino a 1.018.405 è 1009^2 e

$$
1.018.405 = 1009^2 + 324
$$

Allora, per la (131),

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1.018.405} &< 1009 + \frac{1324}{2 \times 1009} \\
&= 1009 + \frac{162}{1009} = 1009 + \frac{162}{162 \times 6 + 37} \\
&< 1009 + \frac{162}{162 \times 6} \\
&= 1009 + \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

6.

$$
\boxed{\sqrt{4069284 + \frac{1}{36}} < 2017 + \frac{1}{4}} \tag{165}
$$

Poiché $2017^2 < 4069284 < 2018^2$ e $4069284 = 2017^2 + 995$, da (131) segue:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{4069284 + \frac{1}{36}} &< \sqrt{4069284} \\
&< 2017 + \frac{995}{2 \times 2017} = 2017 + \frac{995}{4034} \\
&= 2017 + \frac{995}{995 \times 4 + 54} < 2017 + \frac{995}{995 \times 4} \\
&< 2017 + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

7.

$$\boxed{\sqrt{9.082.321} < 3013 + \frac{3}{4}} \tag{166}$$

Il quadrato perfetto più vicino al radicando è 3014^2 e

$$9.082.321 = 3014^2 - 1875$$

Per la maggiorazione in (138),

$$\sqrt{9.082.321} < 3014 - \frac{1875}{2 \times 3014} \tag{167}$$

Poiché

$$\frac{1875}{2 \times 3014} = \frac{1}{4} \times \frac{1875}{1507} < \frac{1}{4}$$

da (167) segue

$$\sqrt{9.082.321} < 3014 - \frac{1875}{2 \times 3014} < 3014 - \frac{1}{4} = 3013 + \frac{3}{4} \tag{168}$$

che è la (166).

8.

$$\boxed{\sqrt{3.380.929} < 1838 + \frac{9}{11}} \tag{169}$$

Questa approssimazione (utilizzata nella *Proposizione* 3 per maggiorare il rapporto $2r/s_{24}$ tra il diametro del cerchio e il lato del poligono regolare inscritto di 24 lati) è una delle più difficili da ricostruire. La solita tecnica di approssimazione del radicando con il quadrato perfetto più vicino conduce a

$$3.380.929 = 1839^2 - 992 \tag{170}$$

Quindi, per la maggiorazione in (138),

$$\sqrt{3.380.929} < 1839 - \frac{992}{2 \times 1839} \tag{171}$$

Un'immediata stima dall'alto con frazioni del tipo $1/2^k$ (come spesso in Archimede) porterebbe a

$$\sqrt{3.380.929} < 1839 - \frac{992}{2 \times 1839} < 1839 - \frac{1}{4} \tag{172}$$

Nel testo (di Archimede-Heiberg) leggiamo invece una stima dall'alto la cui parte frazionaria ha un insolito denominatore 11,

$$\sqrt{3.380.929} < 1838 + \frac{9}{11} \tag{173}$$

Ovviamente, non c'è alcuna difficoltà a controllare la correttezza della stima (173):

$$\sqrt{3.380.929} < 1839 - \frac{1}{4} < 1839 - \frac{2}{11} = 1838 + 1 - \frac{9}{11} = 1838 + \frac{9}{11} \quad (174)$$

Ma è difficile motivare la scelta di una parte frazionaria con denominatore 11. Hultsch [31] (seguìto da Heath, [24], p.lxxxvii) congettura che tale scelta sia stata effettuata, sulla base di una motivazione a posteriori, allo scopo di rendere più agevole il conto successivo (si veda la disuguaglianza (289), che mostra, in effetti, come la scelta del denominatore 11 consenta di semplificare i calcoli).

6.3 Approssimazioni mediante frazioni continue

Diamo un cenno agli sviluppi dei numeri reali in frazioni continue. Per i nostri scopi, è sufficiente considerare i numeri reali $x \geq 1$. Sia $[x]$ la parte intera di x (cioè, il massimo intero minore o uguale a x) e poniamo $\{x\} = x - [x]$ (la parte frazionaria di x). Dunque,

$$x = [x] + \{x\}, \qquad 0 \leq \{x\} < 1 \tag{175}$$

Se $\{x\}$ è diverso da zero, si ha $\frac{1}{\{x\}} > 1$ e $\left[\frac{1}{\{x\}}\right] \geq 1$. Scriviamo

$$x = [x] + \{x\} = [x] + \frac{1}{\frac{1}{\{x\}}} = [x] + \frac{1}{\left[\frac{1}{\{x\}}\right] + \left\{\frac{1}{\{x\}}\right\}} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \left\{\frac{1}{\{x\}}\right\}} \tag{176}$$

dove $n_1 = [x]$, $n_2 = \left[\frac{1}{\{x\}}\right]$ sono interi. Se $\left\{\frac{1}{\{x\}}\right\} \neq 0$, il procedimento si può iterare. Nel caso in cui il numero x sia un numero razionale, il procedimento descritto termina dopo un numero finito di passi e dà luogo a una espressione del tipo

$$x = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{n_r}}}$$

(per opportuni numeri interi positivi $n_1, ..., n_r$), che si chiama *frazione continua semplice*. Quando x è razionale, il procedimento si può effettuare utilizzando l'algoritmo di Euclide per il calcolo del massimo comun divisore. Illustriamo la questione con un esempio. Per calcolare lo sviluppo in frazione continua di $x = \frac{56}{17}$, applichiamo dapprima l'algoritmo di Euclide che fornisce il massimo comun divisore fra 56 e 17 (che è 1):

$$\begin{aligned} 56 &= 17 \times \mathbf{3} + 5 \\ 17 &= 5 \times \mathbf{3} + 2 \\ 5 &= 2 \times \mathbf{2} + 1 \\ 2 &= 1 \times \mathbf{2} + 0 \end{aligned}$$

Questo algoritmo ci permette di scrivere successivamente:

$$\begin{aligned} \frac{56}{17} &= \mathbf{3} + \frac{1}{\frac{17}{5}} \\ \frac{17}{5} &= \mathbf{3} + \frac{1}{\frac{5}{2}} \\ \frac{5}{2} &= \mathbf{2} + \frac{1}{\mathbf{2}} \end{aligned}$$

Otteniamo allora:

$$\frac{56}{17} = \mathbf{3} + \cfrac{1}{\mathbf{3} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{2}}}}$$

(Abbiamo evidenziato in grassetto i quozienti dell'algoritmo di Euclide). Questa scrittura suggerisce la definizione di *convergente* r*-esima (o di ordine* r*)* $[n_1, ..., n_r]$, che è data in modo ricorsivo:

- Se $n \geq 1$ è un numero intero, poniamo $[n] = n$;
- Se $n_1, ..., n_r \geq 1$ sono numeri interi, poniamo

$$[n_1, ..., n_r] = n_1 + \frac{1}{[n_2, ..., n_r]} \tag{177}$$

Ad esempio:

$$[n_1, n_2] = n_1 + \frac{1}{n_2}$$

$$[n_1, n_2, n_3] = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3}}$$

$$[n_1, n_2, n_3, n_4] = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4}}}$$

eccetera. Con queste notazioni, le successive convergenti del numero razionale $x = \frac{56}{17}$ (ottenute sopra) sono

$$[3] = 3$$

$$[3, 3] = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$[3, 3, 2] = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} = \frac{23}{7}$$

$$[3, 3, 2, 2] = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{56}{17}$$

Si noti che le convergenti di ordine dispari approssimano x dal basso e sono crescenti, mentre quelle di ordine pari approssimano x dall'alto e sono decrescenti (e l'ultima convergente è uguale a x):

$$[3] < [3, 3, 2] < x = [3, 3, 2, 2] < [3, 3]$$

Uno schema simile si riproduce anche quando x è irrazionale. Valgono infatti le seguenti proprietà (per le quali si rimanda a [4]):

- Se $x \geq 1$ è un numero razionale, il procedimento sopra descritto per scrivere x come frazione continua ha termine dopo un numero finito di passi. In altri termini, esistono numeri interi $n_1, ..., n_r \geq 1$ tali che

$$x = [n_1, ..., n_r] = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{n_r}}}$$

- Se $x > 1$ è irrazionale, il procedimento non ha termine. In questo caso, esiste una successione di interi positivi n_h ($h \in \mathbb{N}$) tale che

$$x = \lim_{r \to +\infty} [n_1, ..., n_r]$$

  Diremo ancora che il numero irrazionale x ha lo sviluppo in frazione continua (illimitata)

$$x = [n_1, n_2, n_3, ...] = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

- Quando x è irrazionale, le convergenti di ordine dispari costituiscono una sottosuccessione crescente e quindi sono approssimazioni razionali di x dal basso, mentre le convergenti di ordine pari costituiscono una sottosuccessione decrescente e pertanto sono approssimazioni razionali di x dall'alto:

$$[n_1] < [n_1, n_2, n_3] < \cdots < x < \cdots < [n_1, n_2, n_3, n_4] < [n_1, n_2]$$

Esempio: approssimazioni dal basso e dall'alto di $\sqrt{3}$. Le approssimazioni dal basso e dall'alto

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}, \tag{178}$$

utilizzate da Archimede, si possono entrambe ricavare dallo sviluppo di $\sqrt{3}$ in frazione continua. Pertanto, è stato congetturato (si vedano, tra gli altri, Knorr [34] e Thompson [53]) che Archimede, nei suoi calcoli, abbia potuto fare ricorso a qualche tecnica riconducibile, nella sostanza, a tali sviluppi. Siccome $1 < \sqrt{3} < 2$, la scrittura di $\sqrt{3}$ come somma della sua parte intera e di quella frazionaria è

$$\sqrt{3} = \left[\sqrt{3}\right] + \left\{\sqrt{3}\right\} = 1 + \left(\sqrt{3} - 1\right) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}}$$

Ora,

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \tag{179}$$

la cui parte intera è 1. Dunque

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right] + \left\{\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\} = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}$$

Calcoliamo ora la parte intera di $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$. Da

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1$$

segue

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right] + \left\{\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right\} &= \left[\sqrt{3}+1\right] + \left\{\sqrt{3}+1\right\} \\ &= 2 + \left(\sqrt{3}-1\right) \\ &= 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}}\end{aligned}$$

Siamo così tornati al calcolo di $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$, già effettuato al passo (179). Pertanto, lo sviluppo di $\sqrt{3}$ in frazione continua è

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...]$$

Si tratta di uno sviluppo periodico[110] che presenta il ciclo $(1, 2)$ di lunghezza 2.

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= [n_1, n_2, ..., n_r, ...] = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ..] \\ &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}}}}\end{aligned}$$

($n_1 = [\sqrt{3}] = 1$; per ogni $h \geq 2$: $n_h = 1$ se h è pari, $n_h = 2$ se h è dispari.) Le prime 12 convergenti della frazione continua di $\sqrt{3}$ sono riportate nella Tabella 2. In particolare, la nona convergente (che approssima $\sqrt{3}$ dal basso) è

$$[1,1,2,1,2,1,2,1,2] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}}}$$

$$= \boxed{\frac{265}{153}}$$

e la dodicesima convergente (valore approssimato di $\sqrt{3}$ dall'alto) è

$$[1,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}}}}}}}}$$

$$= \boxed{\frac{1351}{780}}$$

In questo modo, ritroviamo le due stime (178) di $\sqrt{3}$ utilizzate nella *Misura del Cerchio*.

Tabella 1: *Schema dello sviluppo di* $\sqrt{3} = [a_1, a_2, ..., a_n, ..]$ *in frazione continua.* Si ha $a_1 = [\sqrt{3}] = 1$; per ogni $h \geq 2$, $a_h = 1$ se h è pari, $a_h = 2$ se h è dispari.

	α	$[\alpha]$	$\{\alpha\}\,(= \alpha - [\alpha])$	$\frac{1}{\{\alpha\}}$	$\frac{1}{\{\alpha\}}$ (semplificato)
1^o Passo	$\sqrt{3}$	$1(= a_1)$	$\sqrt{3} - 1$	$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$	$= \frac{\sqrt{3}+1}{2}$
2^o Passo	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$1(= a_2)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}-1}$	$= \sqrt{3} + 1$
3^o Passo	$\sqrt{3} + 1$	$2(= a_3)$	$\sqrt{3} - 1$	$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$	$= \frac{\sqrt{3}+1}{2}$
4^o Passo $(= 2^o)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$1(= a_4)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}-1}$	$= \sqrt{3} + 1$
5^o Passo $(= 3^o)$	$\sqrt{3} + 1$	$2(= a_5)$	$\sqrt{3} - 1$	$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$	$= \frac{\sqrt{3}+1}{2}$
6^o Passo $(= 2^o)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$1(= a_6)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}-1}$	$= \sqrt{3} + 1$
eccetera		$2(= a_7)$	...	...	...

Tabella 2: (Tratta da [53]) Sviluppo di $\sqrt{3}$ in frazione continua. Le convergenti crescenti di ordine dispari e le convergenti decrescenti di ordine pari approssimano $\sqrt{3}$ dal basso e, rispettivamente, dall'alto. *La nona e la dodicesima convergente danno l'approssimazione* $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ *utilizzata da Archimede nella Misura del Cerchio.*

1^a convergente	[1]	$= 1$	$= 1.0000000$
3^a convergente	[1,1,2]	$= 5/3$	$= 1.6666666$
5^a convergente	[1,1,2,1,2]	$= 19/11$	$= 1.7272727$
7^a convergente	[1,1,2,1,2,1,2]	$= 71/41$	$= 1.7317073$
9^a convergente	[1,1,2,1,2,1,2,1,2]	$= \boxed{265/153}$	$= 1.7320261$
11^a convergente	[1,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2]	$= 989/571$	$= 1.7320493$
		$\sqrt{3}$	$= 1.7320508..$
12^a convergente	[1,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1]	$= \boxed{1351/780}$	$= 1.7320513$
10^a convergente	[1,1,2,1,2,1,2,1,2,1]	$= 362/209$	$= 1.7320574$
8^a convergente	[1,1,2,1,2,1,2,1]	$= 97/56$	$= 1.7321428$
6^a convergente	[1,1,2,1,2,1]	$= 26/15$	$= 1.7333333$
4^a convergente	[1,1,2,1]	$= 7/4$	$= 1.7500000$
2^a convergente	[1,1]	$= 2$	$= 2.0000000$

6.4 Il metodo di Erone per il calcolo delle radici quadrate

Nel suo trattato *Metrica* ([29]), Erone[111] descrive il procedimento che permette di calcolare l'area di un triangolo dati i tre lati, senza bisogno di conoscere alcuna altezza. Si tratta del risultato oggi noto come *formula di Erone*:[112]

$$\text{AREA DEL TRIANGOLO} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dove a, b, c sono i lati e $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ è il semi-perimetro. Questa formula richiede il calcolo di una radice quadrata. Per esempio, per trovare l'area di un triangolo di lati 7, 8 e 9 unità si dovrà calcolare $\sqrt{720}$. Sviluppando questo esempio, Erone, nello stesso passo dell'opera, così descrive il metodo per il calcolo approssimato della radice quadrata (Erone, *Metrica*, [29], *Libro* I, pag. 165):[113]

ἐπεὶ ὁ συνεγγίζων τῷ ψκ΄ τετραγωνός ἐστιν ὁ ψκθ΄ καὶ πλευράν ἕξει τὸν κζ΄, μέρισον τὰς ψκ΄ εἰς τὸν κζ΄·
γίγνεται κϛ΄ καὶ τρίτα δύο·
πρόσθες τὰς κζ΄· γίγνεται νγ΄ τρίτα δύο·
τούτων τὸ ἥμισυ· γίγνεται κϛ΄ ∠΄ γ΄·

ἔσται ἄρα τοῦ ψκ΄ ἡ πλευρὰ ἔγγιστα τὰ κϛ΄ ∠΄ γ΄·
τὰ γὰρ κϛ΄ ∠΄ γ΄ ἐφ᾽ ἑαυτά· γίγνεται ψκ΄ λϛ΄· ὥστε τὸ διάφορον μονάδος ἐστὶ μόριον λϛ΄.
ἐὰν δὲ βουλώμεθα ἐν ἐλάσσονι μορίῳ τοῦ λϛ΄ τὴν διαφορὰν γίγνεσθαι, ἀντί τοῦ ψκθ΄ τάξομεν τὰ νῦν εὑρεθέντα ψκ΄ καὶ λϛ΄ καὶ ταὐτὰ ποιήσαντες εὑρήσομεν πολλῷ ἐλάττονα τοῦ λϛ΄ τὴν διαφορὰν γιγνομένην.

Poiché il quadrato più vicino a 720 è 729, che ha come lato [*radice quadrata*] 27, si divida 720 per 27:
si ottiene 26 e due terzi;
si aggiunga 27; si ottiene 53 e due terzi;
di questo, si prenda la metà; si ottiene 26 1/2 1/3;
il lato [*la radice quadrata*] di 720 sarà dunque molto vicino a 26 1/2 1/3.
Infatti, lo stesso 26 1/2 1/3 [*elevato a quadrato*] dà 720 1/36; pertanto la differenza è di 1/36.
Se poi vogliamo che la differenza sia di una parte minore di 1/36, al posto di 729 sostituiamo 720 1/36, ora trovato, e facendo le stesse cose troveremo [*che è*] molto minore di 1/36 la differenza che si ottiene.

Seguiamo, passo dopo passo, il procedimento descritto da Erone. Il quadrato perfetto più vicino a 720 è $729 = 27^2$. Come prima approssimazione di $\sqrt{720}$, prendiamo allora $\alpha_0 = 27$, che approssima $\sqrt{720}$ dall'alto:

$$\sqrt{720} < \alpha_0$$

Calcoliamo ora $\beta_0 = \frac{720}{\alpha_0} = \frac{720}{27}$. Da $720 = 26 \times 27 + 18$ segue

$$\beta_0 = \frac{720}{\alpha_0} = \frac{26 \times 27 + 18}{27} = 26 + \frac{2}{3}$$

Ovviamente, poiché $\alpha_0\beta_0 = 720$ e α_0 è un'approssimazione di $\sqrt{720}$ dall'alto, ora β_0 approssima $\sqrt{720}$ dal basso; quindi abbiamo

$$\beta_0 < \sqrt{720} < \alpha_0$$

Consideriamo ora la media aritmetica:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0) = \frac{1}{2}\left(27 + 26 + \frac{2}{3}\right) = 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 26\,{}^1\!/\!{}_2\,{}^1\!/\!{}_3$$

La media geometrica $\sqrt{\alpha_0\beta_0} = \sqrt{720}$ di α_0 e β_0 è minore della media aritmetica $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0)$ (si veda il paragrafo 6.4) e $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0) < \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_0) = \alpha_0$. Pertanto,

$$\beta_0 < \sqrt{720} < \alpha_1 < \alpha_0$$

Dunque $\alpha_1 = 26\,{}^1\!/\!{}_2\,{}^1\!/\!{}_3$ è un'approssimazione dall'alto di $\sqrt{720}$ e, essendo minore di $\alpha_0 = 27$, è un'approssimazione migliore rispetto alla stima iniziale $\alpha_0 = 27$. Nel testo, Erone osserva che α_1^2 differisce da 720 solo per ${}^1\!/\!{}_{36}$:

$$\alpha_1^2 = (26\,{}^1\!/\!{}_2\,{}^1\!/\!{}_3)^2 = \left(26 + \frac{5}{6}\right)^2 = 720 + \frac{1}{36} \tag{180}$$

Se poi vogliamo trovare una approssimazione α_2 per $\sqrt{720}$ che sia migliore di α_1, iterando il procedimento (καὶ ταὐτὰ ποιήσαντες, *facendo le stesse cose*), poniamo[114]

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \frac{720}{\alpha_1}\right)$$

La nuova approssimazione α_2 di $\sqrt{720}$ è ancora per eccesso ed è migliore di α_1. (Si veda il paragrafo 6.5 per le dimostrazioni.) Per calcolare $\sqrt{d}$, Erone nella *Metrica* si ferma in generale all'approssimazione $\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha_0 + \frac{d}{\alpha_0}\right)$, dove α_0^2 è il quadrato perfetto più vicino a d ([29], pag. 165, *Nota* 51.)

Un secondo esempio interessante (Erone, *Metrica*, [29]) è il calcolo di $\sqrt{63}$. Il quadrato più vicino a 63 è $64 = 8^2 - 1$. Seguendo il metodo di Erone, consideriamo $\alpha_0 = 8$ come approssimazione iniziale. Calcoliamo poi

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha_0 + \frac{63}{\alpha_0}\right) = \frac{1}{2}\left(8 + \frac{63}{8}\right)$$

È interessante notare che α_1 è scritto nella *Metrica* ([29], pag. 171) con la parte frazionaria (cioè, la differenza tra α_1 e la sua parte intera) in forma diadica, cioè come somma di potenze del tipo $\frac{1}{2^k}$, con k intero positivo:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2}\left(8 + \frac{63}{8}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(8 + 7 + \frac{7}{8}\right)\\ &= 7 + \frac{1}{2} + \frac{2^2 + 2 + 1}{16}\end{aligned}$$

$$= 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

Si ottiene così l'approssimazione

$$\sqrt{63} \approx 7\,{}^1\!/_2\,{}^1\!/_4\,{}^1\!/_8\,{}^1\!/_{16}$$

(che è un'approssimazione dall'alto, in quanto ricavata mediante una media aritmetica. Si veda il prossimo paragrafo.).

Media aritmetica, geometrica e armonica

Per comprendere meglio il metodo di Erone, conviene ricordare alcuni tipi di medie tra numeri e le disuguaglianze tra di esse. Fissati due numeri positivi a, b, la media aritmetica M_{A}, la media geometrica M_{G} e la media armonica M_{H} di a e b sono così definite:

Media aritmetica: $\quad M_{\text{A}}(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$

Media geometrica: $\quad M_{\text{G}}(a,b) = \sqrt{ab}$

Media armonica: $\quad M_{\text{H}}(a,b) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} = \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{M_{\text{G}}^2}{M_{\text{A}}}$

Teorema *Per numeri positivi a, b qualunque, valgono le disuguaglianze*

$$M_H(a,b) \leq M_G(a,b) \leq M_A(a,b) \tag{181}$$

Le tre medie coincidono se, e solo se, $a = b$.

Dimostrazione La disuguaglianza $M_{\text{G}}(a,b) \leq M_{\text{A}}(a,b)$, cioè

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

equivale all'ovvia disuguaglianza

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

in cui vale il segno uguale vale se, e solo se, $a = b$. Dunque, $M_{\text{G}}(a,b) = M_{\text{A}}(a,b)$ se, e solo se, $a = b$. Da

$$M_{\text{H}}(a,b) = \frac{M_{\text{G}}(a,b)^2}{M_{\text{A}}(a,b)} \tag{182}$$

e da $M_{\text{G}}(a,b) \leq M_{\text{A}}(a,b)$ segue allora

$$\frac{M_{\text{H}}(a,b)}{M_{\text{G}}(a,b)} = \frac{M_{\text{G}}(a,b)}{M_{\text{A}}(a,b)} \leq 1$$

Dunque $M_{\text{H}}(a,b) \leq M_{\text{G}}(a,b)$. In conclusione, valgono le disuguaglianze (181). Inoltre, per la (182), $M_{\text{H}}(a,b) = M_{\text{G}}(a,b)$ equivale a $M_{\text{G}}(a,b) = M_{\text{A}}(a,b)$, che a sua volta equivale a $a = b$. Quindi, le tre medie coincidono se, e solo se, $a = b$. $\square$

Per due (tra numerose altre) interpretazioni geometriche, si vedano le figure 19, 20.

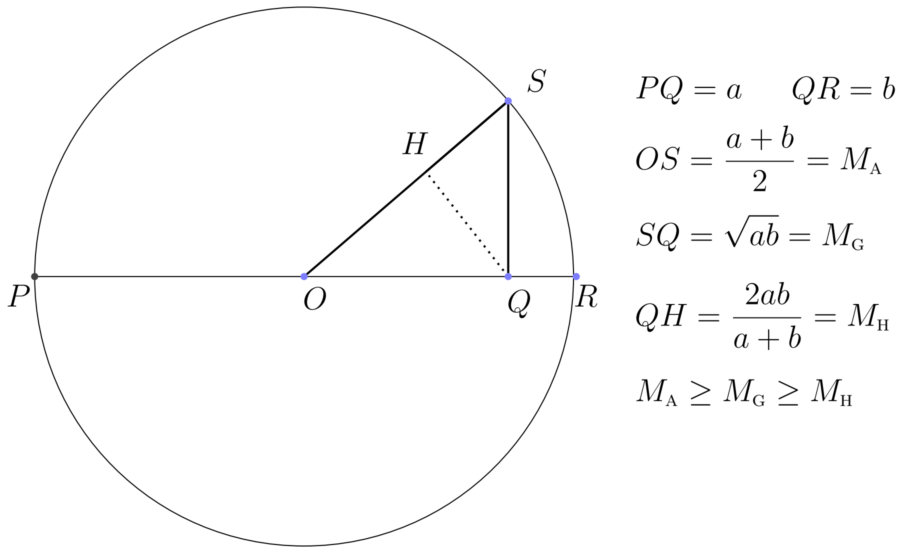


Figura 19: *Disuguaglianze tra media aritmetica, geometrica e armonica.* Se $PQ = a$ e $QR = b$, il raggio è $OS = \frac{a+b}{2}$, la media aritmetica di a e b. Per il *Secondo Teorema di Euclide*, applicato al triangolo rettangolo PSR, l'altezza SQ relativa all'ipotenusa PR è la media geometrica $\sqrt{ab}$. Nel triangolo rettangolo SOQ, per il *Primo Teorema di Euclide*, detta H la proiezione ortogonale di Q sull'ipotenusa OS, si ha $SQ^2 = OS \times HS$, cioè $ab = \frac{a+b}{2} \times HS$. Quindi, $HS = (2ab) : (a + b)$, la media armonica di a e b. Dunque, le disuguaglianze tra le medie equivalgono alle ovvie disuguaglianze $OS \geq QS \geq HS$.

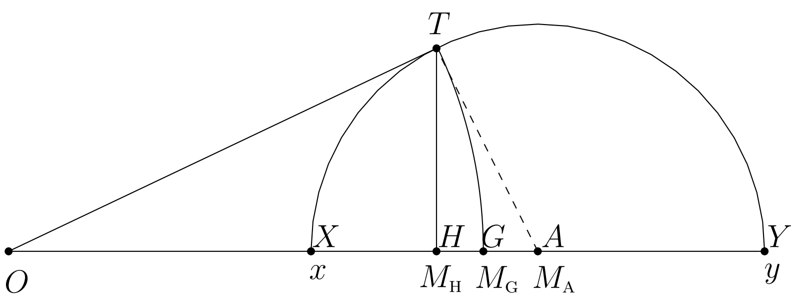


Figura 20: ([7]) *Un'altra interpretazione geometrica delle disuguaglianze tra le medie.* OT è tangente in T alla circonferenza di centro A e diametro XY; H è la proiezione di T sul diametro e $\overline{OG} = \overline{OT}$. Se (fissata un'unità di misura) x e y sono le misure di OX e OY, allora le misure di OH, OG e OA sono, rispettivamente, la media armonica M_{H}, la media geometrica M_{G} e la media aritmetica M_{A} di x e y:

$$M_{\text{H}} \leq M_{\text{G}} \leq M_{\text{A}}$$

Infatti: (i) $\overline{OG}^2 = \overline{OT}^2 = xy$, quindi $\overline{OG} = \sqrt{xy} = M_{\text{G}}$; (ii) $M_{\text{A}} = (x + y)/2$; (iii) nel triangolo rettangolo OTA, $\overline{OT}^2 = \overline{OA}\,\overline{OH}$. Dunque $\overline{OH} = \overline{OT}^2/\overline{OA} = M_{\text{G}}^2/M_{\text{A}} = M_{\text{H}}$.

6.5 Il metodo di Erone rivisitato

Usando i vari tipi di medie che abbiamo ora visto, il metodo di Erone per approssimare la radice quadrata di un numero positivo d può essere descritto nel modo seguente. (Per un'interpretazione geometrica, si veda la Fig: 21.) Scegliamo, in modo arbitrario, un numero positivo z. Associamo a z il numero $z' = d/z$. Poiché $zz' = d$, i due numeri z e z' sono uno maggiore, l'altro minore di d (se $z = z'$, $\sqrt{d} = z = z'$). Chiamiamo α_0, β_0 rispettivamente il maggiore e il minore di essi. Abbiamo dunque:

$$\beta_0 < \sqrt{d} < \alpha_0 \qquad\qquad \alpha_0\beta_0 = d \tag{183}$$

Si noti che $\sqrt{d}$ è la media geometrica di a e b. Ora definiamo

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} \qquad\qquad \beta_1 = \frac{d}{\alpha_1} = \frac{2\alpha_0\beta_0}{\alpha_0 + \beta_0} \tag{184}$$

Poiché α_1 è la media aritmetica di α_0, β_0 e β_1 è la media armonica di α_0, β_0, per le disuguaglianze sulle medie (181) si ha

$$\beta_1 < \sqrt{d} < \alpha_1 \tag{185}$$

Inoltre, $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0) < \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_0) = \alpha_0$ e quindi $\beta_0 = \frac{d}{\alpha_0} < \frac{d}{\alpha_1} = \beta_1$. Dunque

$$\beta_0 < \beta_1 < \sqrt{d} < \alpha_1 < \alpha_0 \tag{186}$$

Definiamo allora un metodo iterativo. Partendo da α_0, β_0 soddisfacenti (183), definiamo per induzione, per ogni intero $n \geq 0$,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \qquad\qquad \text{(Media aritmetica di } \alpha_n \text{ e } \beta_n\text{)} \tag{187}$$

$$\beta_{n+1} = \frac{d}{\alpha_{n+1}} = \frac{2\alpha_n\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} \qquad\qquad \text{(Media armonica di } \alpha_n \text{ e } \beta_n\text{)} \tag{188}$$

Nello stesso modo in cui si sono dimostrate le disuguaglianze (186), si dimostra che

$$\beta_1 < \beta_2 < \sqrt{d} < \alpha_2 < \alpha_1 \tag{189}$$

(Infatti, $\alpha_2 = (\alpha_1 + \beta_1)/2 < (\alpha_1 + \alpha_1)/2 = \alpha_1$ e $\beta_1 = \frac{d}{\alpha_1} < \frac{d}{\alpha_2} = \beta_2$.) Più in generale, si dimostra (per induzione) che, per ogni $n \geq 0$,

$$\beta_n < \beta_{n+1} < \sqrt{d} < \alpha_{n+1} < \alpha_n \tag{190}$$

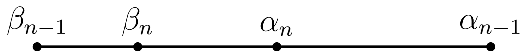
Dunque, la successione α_n è decrescente (e $\sqrt{d}$ ne è una limitazione inferiore) e la successione β_n è decrescente (e $\sqrt{d}$ ne è una limitazione superiore):

$$\beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_n < \beta_{n+1} < \cdots < \sqrt{d} < \cdots < \alpha_{n+1} < \alpha_n < \cdots < \alpha_1 < \alpha_0$$

Inoltre, per ogni $n \geq 1$,

$$\alpha_n - \beta_n < \frac{\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}}{2} \tag{191}$$

Infatti, α_n è il punto medio del segmento $[\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$ e $\beta_{n-1} < \beta_n < \alpha_n$



Dunque, l'ampiezza dell'intervallo $[\beta_n, \alpha_n]$ (cioè, $\alpha_n - \beta_n$) è meno della metà dell'ampiezza dell'intervallo $[\beta_{n-1}, \alpha_{n-1}]$ (data da $\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}$). Quindi la (191) è dimostrata. Partendo da $n = 1$, abbiamo $\alpha_1 - \beta_1 < \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2}$; iterando, si ottiene

$$\alpha_n - \beta_n < \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2^n} \tag{192}$$

Pertanto,[115]

$$\lim_{n \to +\infty} \beta_n = \sqrt{d} = \lim_{n \to +\infty} \alpha_n$$

Per 'metodo di Erone' si intende, di solito, il metodo iterativo con il quale, a partire da una scelta iniziale arbitraria $\alpha_0 > \sqrt{d}$, si costruisce per ricorrenza la successione

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_n + \frac{d}{\alpha_n}\right) \qquad\qquad (n \geq 0) \tag{193}$$

che, come abbiamo dimostrato, converge a $\sqrt{d}$.

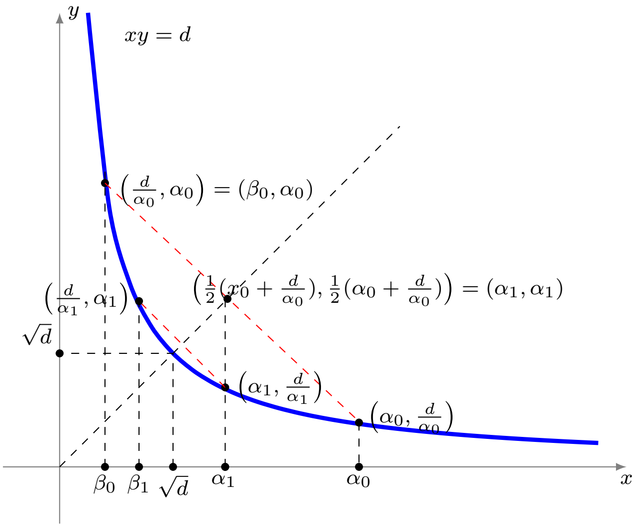


Figura 21: *Una intepretazione geometrica del metodo di Erone.* Si disegni l'iperbole $xy = d$ e si fissi un qualunque $\alpha_0 > 0$ (una prima approssimazione per $\sqrt{d}$). Si considerino il punto dell'iperbole la cui ascissa è α_0, cioè, il punto $A_0 = (\alpha_0, \frac{d}{\alpha_0})$, il suo simmetrico $A_0' = (\frac{d}{\alpha_0}, \alpha_0)$ rispetto alla retta $y = x$ e la proiezione di A_0' sull'asse delle x. Si ottiene così il punto $(\beta_0, 0)$. Ora si considera il punto medio del segmento $A_0 A_0'$. La proiezione di tale punto sull'asse x è $(\alpha_1, 0)$. Si intuisce che la nuova approssimazione dall'alto α_1 sia migliore della iniziale α_0. Poi si itera, ottenendo le due successioni β_n e α_n che convergono a $\sqrt{d}$, rispettivamente dal basso e dall'alto.

6.6 Confronto tra metodo di Erone e altre approssimazioni

Confrontiamo ora le approssimazioni che si ottengono con il metodo di Erone (paragrafo 6.4) con le disuguaglianze fondamentali

$$a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a} \tag{194}$$

del paragrafo 6.1, che abbiamo utilizzato finora nei calcoli delle radici quadrate. Come al solito, supponiamo che l'intero $d = a^2 + b$ (non quadrato perfetto, cioè con $b \neq 0$) sia compreso tra i due quadrati a^2 e $(a+1)^2$:

$$a^2 < a^2 + b < (a+1)^2 \tag{195}$$

Allora

$$1 \leq b \leq 2a \tag{196}$$

Applichiamo il metodo di Erone (6.5). Scegliamo $\beta_0 = a$ come approssimazione dal basso di $\sqrt{a^2+b}$ e

$$\alpha_0 = \frac{a^2+b}{\beta_0} = \frac{a^2+b}{a} = a + \frac{b}{a} \tag{197}$$

come corrispondente approssimazione di $\sqrt{a^2+b}$ dall'alto. La media aritmetica

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0) = \frac{1}{2}\left(a + a + \frac{b}{a}\right) = a + \frac{b}{2a} \tag{198}$$

è allora un'approssimazione dall'alto di $\sqrt{a^2+b}$,

$$\sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a} \tag{199}$$

perché la media aritmetica $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta_0 + \alpha_0) = a + \frac{b}{2a}$ è maggiore della media geometrica $\sqrt{\alpha_0\beta_0} = \sqrt{a^2+b}$ (si veda il paragrafo 6.4). Dunque:

L'approssimazione dall'alto

$$\sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a} \tag{200}$$

già ottenuta con le (194)*, coincide con l'approssimazione dall'alto* (199) *che si ottiene con il metodo di Erone.*

Continuando con l'algoritmo di Erone, troviamo poi l'approssimazione dal basso

$$\frac{a^2+b}{\alpha_1} = \frac{a^2+b}{a+\frac{b}{2a}} < \sqrt{a^2+b} \tag{201}$$

cioè

$$a + \frac{b}{2a+\frac{b}{a}} < \sqrt{a^2+b} \tag{202}$$

Questa approssimazione dal basso non coincide con l'approssimazione dal basso $a + \frac{b}{2a+1}$, già trovata con le (131). Per confrontare tra loro le varie approssimazioni in modo elementare, è utile considerare la funzione

$$\varphi(x) = a + \frac{b}{2a+x}, \qquad x \geq 0 \tag{203}$$

Chiamiamo h la parte frazionaria di $\sqrt{a^2+b}$, cioè la differenza tra $\sqrt{a^2+b}$ e la sua parte intera a:

$$\sqrt{a^2+b} = a + h \tag{204}$$

Elevando a quadrato i due membri dell'uguaglianza (204), otteniamo

$$h = \frac{b}{2a+h} \tag{205}$$

Quindi abbiamo

$$\sqrt{a^2+b} = a + h = a + \frac{b}{2a+h} \tag{206}$$

Allora:

(a) $0 < h < 1$ (Perché $a < \sqrt{a^2+b} < a+1$.)

(b) Si ha

$$\varphi(h) = \sqrt{a^2+b} \tag{207}$$

Si noti che se in $\frac{b}{2a+h}$ si effettua ancora la sostituzione $h = \frac{b}{2a+h}$ e si procede iterando la sostituzione, si costruisce una frazione continua.

(c) Poiché $\frac{b}{2a} > \frac{b}{2a+h}$, dall'uguaglianza (205) segue

$$\frac{b}{2a} > h \tag{208}$$

(d) Siccome φ è una funzione decrescente, da (208) segue

$$\varphi\left(\frac{b}{2a}\right) < \varphi(h) \tag{209}$$

ossia

$$a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}} = a + \frac{2ab}{4a^2+b} < \sqrt{a^2+b} \tag{210}$$

(e) Poiché (per la (196)) $\frac{b}{2a} \leq 1$,

$$a + \frac{b}{2a+1} \leq a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}} < \sqrt{a^2+b} \tag{211}$$

Ritroviamo così, per altra via, l'approssimazione dal basso $a + \frac{b}{2a+1}$ per $\sqrt{a^2+b}$

$$a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} \tag{212}$$

che è meno accurata rispetto a $a + \frac{b}{2a+\frac{b}{2a}}$, ma più semplice da usare nei conti.

(f) Quanto all'approssimazione dal basso (202) data dal metodo di Erone, si noti che (essendo $\frac{b}{a} < \frac{b}{2a}$), essa è meno accurata della precedente (210):

$$a + \frac{b}{2a + \frac{b}{a}} < a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}} < \sqrt{a^2 + b} \tag{213}$$

(g) Delle due approssimazioni dal basso

$$a + \frac{b}{2a + \frac{b}{a}} < \sqrt{a^2 + b}, \qquad a + \frac{b}{2a + 1} < \sqrt{a^2 + b}$$

la prima, ottenuta con il metodo di Erone, è più accurata se $\frac{b}{a} \leq 1$, cioè se $a^2 + b$ è più vicino a a^2 che al quadrato perfetto successivo $(a + 1)^2$.

Riassumendo:

Usando il metodo di Erone, per il calcolo approssimato di $\sqrt{a^2 + b}$ (quando a^2 è il massimo quadrato che non supera $a^2 + b$), oltre alle disuguaglianze

$$a + \frac{b}{2a + 1} < \sqrt{a^2 + b} < a + \frac{b}{2a} \tag{214}$$

abbiamo anche le disuguaglianze, più accurate,

$$\boxed{a + \frac{2ab}{4a^2 + b} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}} < \sqrt{a^2 + b} < a + \frac{b}{2a}} \tag{215}$$

Seguendo G. Loria[116] diamo altri esempi di calcolo approssimato di radici quadrate, utilizzando le disuguaglianze (215).

Esempi

1. $\sqrt{2}$.
   Da $\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b} = \sqrt{1^2 + 1}$, con $a = b = 1$, si ottengono i valori approssimati
   $$1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} < \sqrt{2} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
   L'approssimazione per difetto è il valore approssimato $\sqrt{2} \approx \frac{7}{5}$ utilizzato da Aristarco da Samo (G. Loria, [38]).

2. $\sqrt{5}$. Poiché $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1}$, otteniamo
   $$\left(\frac{38}{17} =\right) 2 + \frac{4}{17} < \sqrt{5} < 2 + \frac{1}{4} \left(= \frac{9}{4}\right)$$

7 Note

1 *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e ai moti locali*, Leida, 1638.

2 Per la traduzione del testo greco della *Misura del Cerchio* (Κύκλου Μέτρησις; latino: *Dimensio Circuli*), mi sono basato sull'edizione critica in Heiberg [26], *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii*, Teubner, Lipsia, 1880, pag. 232-243. Il testo greco, senza apparato critico, è anche riprodotto in Thomas [52] e in Mugler [2]. Un'edizione del 1828, con testo greco e versione in tedesco, è in Gutenäcker [23].

3 L'opera persa di Archimede alla quale si allude potrebbe essere quella che il matematico Pappo cita sotto il titolo *Sulla circonferenza del Cerchio* (Περὶ τῆς τοῦ κύκλου μέτρησις) in: *Collectio,* V, 2, [41], pag. 243.
Per una ricostruzione della trasmissione del testo di Archimede, si veda W. Knorr [35]. Questo Autore congettura che il rifacimento dell'originario testo archimedeo a noi pervenuto sia da attribuire a Ipazia, matematica, astronoma e filosofa di grande prestigio, brutalmente assassinata ad Alessandria d'Egitto nell'anno 415.

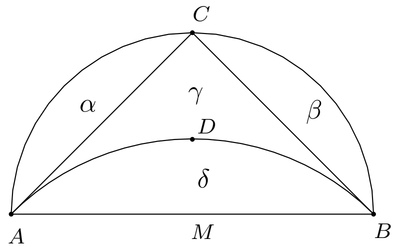
4 Nella *Misura del Cerchio*, Archimede assume implicitamente che la corda sia minore dell'arco, e quindi che il perimetro del poligono inscritto sia minore del perimetro del cerchio (cioè, della circonferenza). Analogamente, nella seconda parte della dimostrazione della *Proposizione* 1 assume che il perimetro del poligono circoscritto sia maggiore del perimetro del cerchio. In un'altra sua opera - *Sulla Sfera e il Cilindro*, della quale non sappiamo con certezza se sia anteriore o posteriore a quella in esame - Archimede preciserà la questione, con l'introduzione di opportuni postulati. (Si veda il paragrafo 5.1.)

5 Latino: *reductio ad absurdum*; greco: ἡ εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγή.

6 Eudosso (408-355 a.C.), frequentatore dell'*Accademia* di Platone, fu scienziato universale, grande matematico, astronomo, studioso di macchine, filosofo. A Eudosso si deve, tra l'altro, la fondamentale teoria delle proporzioni, esposta in modo sistematico nel libro V degli *Elementi* di Euclide. Per i contributi di Eudosso al calcolo infinitesimale, si vedano l'importante libro di E. Rufini *Il "Metodo" di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità* [45] e, dello stesso autore, gli *Studi geometrici su Eudosso*, [46].

7 Questo risultato è talvolta accostato alle ricerche di Ippocrate sulla quadratura di certe lunule, ma in realtà ne differisce profondamente per obiettivi e metodi. Per chiarire meglio la questione, diamo un esempio di quadratura di una lunula di Ippocrate. Con il termine *quadratura* di una figura piana, si intende, in termini generali, la determinazione teorica della sua area. In un'accezione più restrittiva, invece, la quadratura di una figura $\mathcal{F}$ consiste invece nella *costruzione con riga e compasso* di un rettangolo o, in modo equivalente, di un quadrato (di qui il nome 'quadratura') che abbia la stessa area di $\mathcal{F}$.
Nel caso particolare che ora descriviamo, il triangolo che ha la stessa area della lunula è *effettivamente costruibile con riga e compasso* a partire dai dati del problema. Per il testo greco sulle lunule di Ippocrate, tratto dal *Commentario* di Simplicio alla *Fisica* di Aristotele, curato da H. Diels (1982), si veda la preziosa antologia di testi matematici greci curata di Ivor Thomas, [51], pag. 238. Si veda anche il capitolo 1 di W. Knorr, *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, [36].

Vediamo i dettagli. Consideriamo il semicerchio circoscritto a un triangolo rettangolo isoscele ABC. Sia ADB l'arco di circonferenza di raggio uguale alla corda $AC(= BC)$ interno al semicerchio. Dimostriamo che la lunula $ACBDA$ (delimitata dalla semicirconferenza ACB e e dall'arco di circonferenza ADB) è uguale al triangolo ABC. Il rapporto tra due cerchi è il rapporto tra i quadrati dei rispettivi raggi. Di qui segue che segmenti di cerchi che siano simili tra loro - o, il che è lo stesso, segmenti circolari i cui corrispondenti angoli al centro siano uguali -, hanno rapporto uguale al quadrato dei rispettivi raggi.



I tre segmenti α, β, δ sono simili, perché i corrispondenti angoli al centro sono retti. Allora, poiché il raggio di α (uguale a quello di β) e il raggio di δ sono lato e diagonale di uno stesso quadrato, abbiamo le proporzioni: $\alpha : \delta = 1 : 2 = \beta : \delta$. Dunque, $\alpha = \frac{1}{2}\delta$ e $\beta = \frac{1}{2}\delta$ Allora, poiché $ABC = \gamma + \delta$, il triangolo ABC e la lunula $ACBDA$ sono uguali:

$$\text{LUNULA } ACBDA = \gamma + \alpha + \beta = \gamma + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \gamma + \delta = \text{TRIANGOLO } ABC$$

> "*The fundamental importance of this discovery lies in proving the* possibility of areas bounded by curved lines being commensurable with areas bounded by straight lines. *The problem of "squaring the circle" derived its great appeal from this discovery.*" (O. Toeplitz, [54])
>
> ("*L'importanza fondamentale di questa scoperta sta nel dimostrare la possibilità di aree limitate da linee curve che siano commensurabili con aree limitate da linee rette. Il problema di "quadrare il cerchio" ha derivato il suo grande fascino da questa scoperta.*")

Consiglio l'ottimo libro di Otto Toeplitz (*The Calculus: A Genetic Approach,* [54]), per un approfondimento su questi temi della matematica greca e, più in generale, per un'originale presentazione del calcolo infinitesimale con una prospettiva storica. In particolare, per gli argomenti qui trattati si veda il Capitolo 1, *The nature of the infinite process.*

8 Il termine *quadratura aritmetica* è in Dijksteruis ([11], pag. 222), secondo cui la *Proposizione* 1 riduce la quadratura aritmetica del cerchio alla *rettificazione aritmetica* della circonferenza, vale a dire permette di calcolare (in via teorica) l'area di un cerchio se si conosce la lunghezza della circonferenza, e viceversa. Usando il simbolismo algebrico (ovviamente estraneo a Archimede), abbiamo

$$\text{CERCHIO} = \frac{1}{2}\,\text{CIRCONFERENZA} \times \text{RAGGIO} \tag{216}$$

e quindi possiamo scrivere l'area $\mathcal{A}$ del cerchio come:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,2\pi r \times r = \pi r^2$$

9 Come osserva Lucio Russo (*La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*, [47]):

> *Le proposizioni che compongono gli* Elementi *di Euclide sono di due tipi:* teoremi (θηωρέματα) *e* problemi (προβλήματα). *L'enunciato di un teorema consiste nell'affermazione che determinate proprietà ne implicano altre ed è seguito dalla dimostrazione. L'enunciato di un problema è invece la richiesta di costruire una figura geometrica con proprietà assegnate ed è seguito prima dalla costruzione della figura e poi dalla dimostrazione che la figura così costruita effettivamente soddisfa le proprietà richieste. [...] Euclide non distingue i due tipi di proposizioni con questi termini, ma la distinzione è chiara dalla formula con cui la dimostrazione si chiude, che nel caso dei teoremi è* "come si doveva dimostrare" (ὅπερ ἔδει δεῖξαι) *e nell'altro* "come si doveva fare" (ὅπερ ἔδει ποιῆσαι). (Lucio Russo, [47], pag. 61.)

Con questa distinzione terminologica, la *Proposizione* 1 di Archimede si deve considerare come l'enunciato di un *teorema* - con una dimostrazione per assurdo, senza carattere costruttivo -, non come l'enunciato di un *problema* risolto *mediante la costruzione* di una figura con riga e compasso.

10 Nel 1892 Ferdinand von Lindemann dimostrò che π è un numero *trascendente*, cioè non è radice di alcuna equazione algebrica a coefficienti interi. Come conseguenza della trascendenza di π, si è potuto infine dimostrare che *la quadratura del cerchio con riga e compasso è impossibile.*

11 Per *rettificazione della circonferenza* con riga e compasso si intende, ovviamente, una costruzione geometrica che, dato il raggio di una circonferenza e con l'uso solo di riga e compasso (cioè, prendendo in considerazione solo rette e cerchi), permetta di disegnare un segmento che sia lungo quanto la circonferenza fissata.

Spieghiamo perché, dai risultati di Archimede nella *Misura del Cerchio*, segue l'*equivalenza* dei due seguenti problemi (che nel 1892 furono dimostrati essere entrambi impossibili):
Un cerchio si può quadrare con riga e compasso se, e solo se, una circonferenza si può rettificare con riga e compasso.
Come discuteremo più avanti (si vedano i commenti alla successiva *Proposizione 2*), i risultati della *Misura del Cerchio* mostrano come (notazioni a parte) Archimede fosse a conoscenza del fatto che

$$\frac{\text{CERCHIO}}{\text{QUADRATO SUL RAGGIO}} = \frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}} \; (= \pi)$$

Con le notazioni moderne, scriviamo allora che l'area del cerchio di raggio r è πr^2 e la lunghezza della circonferenza è $2\pi r$.

a) Supponiamo che esista una costruzione con riga e compasso che rettifichi la circonferenza di un cerchio di raggio assegnato, cioè che produca un segmento che abbia la stessa lunghezza della circonferenza, ossia $2\pi r$. Possiamo allora considerare il rettangolo di dimensioni r e πr. Allora, per la costruzione in Euclide, *Elementi*, Libro II, *Proposizione* 14 ("*costruire un quadrato uguale a una figura rettilinea data*," cioè costruire, con riga e compasso, un quadrato equivalente a un poligono), possiamo costruire il quadrato equivalente a tale rettangolo. Per la Proposizione 1 in Archimede, *Misura del Cerchio*, il quadrato così costruito avrà la stessa area del cerchio. Ne segue che se la circonferenza di un cerchio si può rettificare, allora il cerchio stesso si può quadrare.

b) Viceversa, supponiamo che esista una costruzione, con riga e compassso, per la quadratura di un cerchio di assegnato raggio r. Per la *Proposizione* 1 in Archimede, *Misura del Cerchio*, questa costruzione produrrà un quadrato di area πr^2. Utilizziamo la costruzione descritta in Euclide, Libro VI, *Proposizione* 12, che risolve il problema: "*Date tre rette, trovare la quarta proporzionale dopo di esse.*" Cioè, dati tre segmenti A, B, C, possiamo costruire un quarto

segmento X che soddisfi
$$A : B = C : X$$
Prendiamo $A = \frac{1}{2}r$ e $B = C = \ell$, dove ℓ è il lato del quadrato costruito, equivalente al cerchio. Con questa scelta di A, B, C il segmento quarto proporzionale X soddisfa $\frac{1}{2}rX = \pi r^2$ (uguale all'area del cerchio) e quindi, per la *Proposizione* 1, abbiamo costruito il segmento $X = 2\pi r$ uguale alla circonferenza. Dunque, se il cerchio può essere quadrato, anche la circonferenza può essere rettificata.

12 Il teorema che afferma che due cerchi qualunque stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi diametri è generalmente attribuito a Eudosso, l'ideatore del metodo di esaustione. La dimostrazione, basata su tale metodo, si trova in Euclide, *Elementi,* libro XII, *Proposizione* 2.

13 Durante il Medioevo, la conclusione di Archimede è stata spesso fraintesa, perché si è pensato che il valore del rapporto tra circonferenza e diametro fosse esattamente dato da $3\,{}^1/_7$.

14 La rappresentazione decimale di $3 + \frac{10}{71}$ presenta un periodo di lunghezza 35,
$$3 + \frac{10}{71} = 3,\overline{14084507042253521126760563380281690}$$
La rappresentazione decimale della frazione $3 + 1/7$ è
$$3.\overline{142857}$$
Ovviamente, i greci non usavano le odierne rappresentazioni dei numeri in una base fissata. Nella valutazione di rapporti tra grandezze, i greci ricorrevano a tecniche, con un interessante carattere 'intrinseco' (cioè, come diremmo nel linguaggio odierno, indipendenti dalla scelta della base della rappresentazione), basate sulle divisioni successive, vicine a quelle delle frazioni continue (si veda il paragrafo 6.3).

15 Nella *Misura del Cerchio*, il fatto che la circonferenza sia minore del perimetro di ogni poligono circoscritto e maggiore del perimetro di ogni poligono inscritto è assunto tacitamente. Nel trattato *Sulla Sfera e il Cilindro* la questione viene affrontata in modo teorico più generale e dedotta da assiomi specifici. Si veda il paragrafo 5.1

16 Il teorema della bisettrice, applicato al triangolo $EZ\Gamma$ e alla bisettrice EH, dice che vale l'uguaglianza
$$\frac{r_n}{l_n - l_{2n}} = \frac{r}{l_{2n}} \tag{217}$$
Moltiplicando per $1 - \frac{l_{2n}}{l_n}$ si ottiene la (8). Nel testo, Archimede ricava questo risultato dalla proporzione
$$r_n : (l_n - l_{2n}) = r : l_{2n} \tag{218}$$
applicando le proprietà del *comporre* e del *permutare*.

17 Per il teorema della bisettrice, applicato al triangolo $AB\Gamma$, si ha
$$2r/d_n = (s_n - BZ)/BZ \tag{219}$$
Ne segue
$$\frac{2r + d_n}{s_n} = \frac{2r}{s_n - BZ} \tag{220}$$

Poiché i triangoli rettangoli $AH\Gamma$ e ΓHZ sono simili, vale l'uguaglianza

$$\frac{2r}{s_n - BZ} = \frac{d_{2n}}{2n} \tag{221}$$

Pertanto, dall'uguaglianza (220) segue

$$\frac{2r + d_n}{s_n} = \frac{d_{2n}}{s_{2n}}$$

cioè

$$\gamma_{2n} = \delta_n + \gamma_n$$

che è la (16).

18 A questo scopo, sono diponibili ottimi riferimenti generali, tra i quali Dijksterhuis [11], Heath [24], Hofmann [30] e Hultsch [31].

19 Le dimostrazioni dei teoremi citati (contenute nel trattato *Sulla Sfera e il Cilindro*, Περὶ Σφαῖρας καὶ κυλίνδρου), fondate su una catena di una trentina di lemmi, sono lunghe e impegnative. Per approfondimenti, si vedano L. Russo [48], E. J. Dijksterhuis [11], il trattato di Archimede tradotto e annotato da C. Mugler[2] e le opere di Archimede curate da T. Heath [24] o da A. Fraiese [20].

20 Letteralmente: *del massimo cerchio tra quelli nella stessa (sfera).*

21 Letteralmente: *uguale al cerchio massimo tra quelli nella sfera.*

22 Per dare un altro esempio di risultato espresso in forma geometrica, citiamo la *Proposizione* 14 dello stesso trattato *Sulla Sfera e il Clindro I*, che afferma:

> *La superficie laterale di un cono (la superficie, esclusa la base) è uguale a quella di un cerchio il cui raggio sia medio proporzionale tra il raggio del cerchio di base del cono e il suo lato obliquo.*

Detto r il raggio di base e ℓ il lato obliquo, il medio proporzionale tra r e ℓ è $\sqrt{r\ell}$. Dunque, in formule, la superficie laterale del cono è $\pi\left(\sqrt{r\ell}\right)^2$, cioè $\pi r\ell$.

23 Nel 75 a.C. Cicerone assunse l'incarico di questore in Sicilia, presso la sede di Lilybaeum (Marsala). Una trentina di anni dopo, scrivendo le *Tusculanae Disputationes*, così ricorda la sua scoperta della tomba di Archimede:

"*Di lui [Archimede] io, da questore, andai a esplorare la tomba, ignorata dai Siracusani, in quanto negavano assolutamente che ci fosse, [una tomba] circondata da ogni parte e ricoperta da rovi e cespugli. Infatti, ricordavo alcuni brevi senari che avevo saputo che erano stati scritti sul suo monumento, i quali dichiaravano che in cima al sepolcro era collocata una sfera con un cilindro. Quindi, mentre li passavo in rassegna tutti con lo sguardo (c'è infatti presso la porta Agrigentina un gran numero di sepolcri), notai una colonnina che sporgeva non molto dai cespugli, nella quale si trovava la figura di una sfera e di un cilindro. E io subito ai Siracusani (ed erano con i personaggi più importanti) dissi di ritenere che proprio quello fosse ciò che cercavo. Molti [operai] mandati avanti con falci ripulirono e resero accessibile il luogo; ed essendovi stato aperto un passaggio, ci avvicinammo alla base che era rivolta* *verso di noi; appariva un epigramma quasi dimezzato, essendo state corrose le parti finali dei brevi versi. Così la città più celebre della Grecia, un tempo in verità anche la più dotta, avrebbe ignorato il monumento del suo cittadino di massimo genio, se non gliela avesse fatto conoscere un uomo di Arpino.*" (Cicerone, *Tusculanae Disputationes*, V, 23,64.)

"*Cuius ego quaestor ignoratum ab Syracusanis, cum esse omnino negarent, saeptum undique et vestitum vepribus et dumetis indagavi sepulcrum. Tenebam enim quosdam senariolos, quos in eius monumento esse inscriptos acceperam, qui declarabant in summo sepulcro sphaeram esse positam cum cylindro. Ego autem, cum omnia conlustrarem oculis (est enim ad portas Agrigentinas magna frequentia sepulcrorum), animum adverti columellam non multum e dumis eminentem, in qua inerat sphaerae figura et cylindri. Atque ego statim Syracusanis (erant autem principes mecum) dixi me illud ipsum arbitrari esse quod quaererem. Inmissi cum falcibus multi purgarunt et aperuerunt locum; quo cum patefactus esset aditus, ad adversam basim accessimus; apparebat epigramma exesis posterioribus partibus versiculorum dimidiatum fere. Ita nobilissima Graeciae civitas, quondam vero etiam doctissima, sui civis unius acutissimi monumentum ignorasset, nisi ab homine Arpinati didicisset.*"

"Cicerone questore in Sicilia scopre la tomba del grande Archimede." (Tommaso De Vivo (1790 *ca.*-1884), pittore attivo principalmente a Napoli. *Certosa e Museo Nazionale di San Martino,* Napoli).

24 Mi sembra convincente l'osservazione di Attilio Frajese ([20], pag. 70): il rapporto 2 : 3 è così

semplice da esprimere qualcosa di più della commensurabilità. Pertanto Frajese preferisce mantenere il termine suggestivo *simmetria*, e io l'ho seguìto in questa scelta. Anche Mugler, [2], non usa esplicitamente il termine 'commensurabilità' e traduce: "*ne s'étant aperçu que les mesures de ces figures sont comparables*" (non essendosi accorti che le misure di queste figure sono confrontabili). In conclusione:

Se per misurare la sfera si sceglie il cilindro - se sfera e cilindro si 'commisurano'- si scopre che sussiste una simmetria *semplice e sorprendente: la sfera sta al cilindro come* $2:3$, sia come volume sia come superficie.

Ignoro se nella valutazione di questa armonia di rapporti si possano riverberare le conoscenze che i greci avevano nel campo della musica. (Si pensi alla scuola pitagorica). Ad esempio, se le lunghezze di due corde che vibrano stanno tra loro nel rapporto $1:2$, $2:3$ o $3:4$, il suono della corda più breve è più alto rispettivamente di un'ottava, una quinta e una quarta rispetto al suono dell'altra corda.

25 In questo contesto, affermare che il cerchio è 'uguale' (ἴσος) a un triangolo significa che le due figure hanno la stessa estensione (la stessa area). Oggi noi diremmo che sono figure equivalenti.

26 Il testo greco è un po' involuto, ma il significato è chiaro:
Ogni cerchio è equivalente a un triangolo rettangolo, nel quale un cateto è uguale al raggio e l'altro cateto è uguale alla circonferenza del cerchio.
In un cerchio, *il segmento dal centro* (ἡ ἐκ τοῦ κέντρου) è il raggio. In un triangolo rettangolo, i lati che sono *attorno all'angolo retto* (περὶ ὀρθήν) (cioè, che delimitano l'angolo retto) sono i cateti.

27 Il cerchio viene qui designato mediante un quadrato ΑΒΓΔ in esso inscritto.

28 La *Proposizione* 1 è dimostrata con il cosiddetto *metodo di esaustione*. Si utilizzano due lemmi, che per comodità riportiamo qui sotto (senza dimostrazione). Per le dimostrazioni di questi lemmi e approfondimenti sulla *Proposizione* 1, si veda il paragrafo 3.

(A) **Lemma A** (Poligoni inscritti) *Dato un cerchio C, fissiamo una qualunque area D. Denotiamo con P_{2^n} i poligoni regolari con 2^n lati, inscritti nel cerchio. Allora, per tutti gli n sufficientemente grandi si ha*

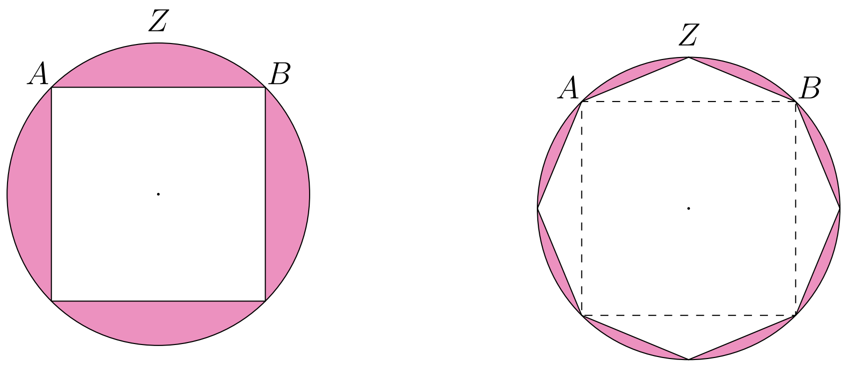
$$\text{AREA}(C) - \text{AREA}(P_{2^n}) < D \tag{222}$$

(Cioè: per ogni area D esiste un intero n_0 tale che, per ogni intero $n \geq n_0$, si ha: $\text{AREA}(C) - \text{AREA}(P_{2^n}) < D$.)

(B) **Lemma B** (Poligoni circoscritti) *Dato un cerchio C, fissiamo una qualunque area D. Denotiamo P'_{2^m} i poligoni regolari con 2^m lati, circoscritti al cerchio. Allora, per tutti gli m sufficientemente grandi si ha*

$$\text{AREA}(P'_{2^m}) - \text{AREA}(C) < D \tag{223}$$

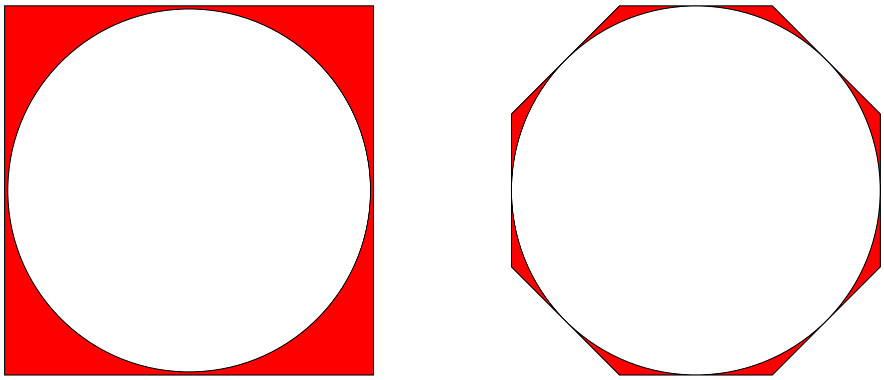
La differenza $P'_{2^n} - C$ si può rendere piccola quanto si vuole, pur di prendere n abbastanza grande.



(a) La figura tratteggiata (somma di 4 segmenti circolari) è la differenza $C-P_4$ tra il cerchio e il quadrato inscritto.

(b) La figura tratteggiata (somma di 8 segmenti circolari) è l'eccesso $C-P_8$ di C rispetto all'ottagono regolare P_8 inscritto.

La differenza $C - P_{2^n}$ si può rendere piccola quanto si vuole, pur di prendere n abbastanza grande.



(a) $P'_4 - C$.

(b) $P'_8 - C$

29 Si deve dimostrare che il cerchio C è uguale al triangolo rettangolo E che ha come base la circonferenza e come altezza il raggio. Si tratta allora di dimostrare che non può essere né $C > E$, né $C < E$. Supponiamo dapprima che *sia maggiore il cerchio* (ἔστω μείζων ὁ κύκλος), cioè che si abbia $C > E$.

30 Se $C > E$, consideriamo la quantità $C - E$, cioè la differenza per la quale il cerchio supera il triangolo. *Si inscriva il quadrato (di diagonale)* ΑΓ (καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον) e poi *si dividano a metà gli archi* (καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι διχα) tra due vertici consecutivi del poligono. Procedendo in questo modo, prendiamo in considerazione successivamente i poligoni regolari inscritti con 2^2, 2^3, 2^4,.., 2^n,.. lati. Supponiamo ora che il numero n sia sufficientemente elevato, in modo tale che si abbia

$$C - P_{2^n} < C - E \tag{224}$$

Supponiamo dunque che i *segmenti* (circolari che sommati insieme costituiscono $C - P_{2^n}$) *siano minori della differenza* (data da $C - E$) *per la quale il cerchio supera il triangolo* (καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερεχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου). Il fatto che valga la disuguaglianza (224) per tutti gli n sufficientemente grandi è assicurato dal *Lemma* A della nota precedente: basta prendere $D = C - E$.

31 Se n è sufficientemente grande, dalla disuguaglianza (224) segue segue subito che

$$P_{2^n} > E \tag{225}$$

e quindi il poligono regolare inscritto P_{2^n} sarà maggiore del triangolo E. (Ma questo è assurdo, come sarà dimostrato nel periodo successivo.)

32 Il poligono regolare inscritto P_{2^n} è uguale a (ha la stessa area di) un triangolo che ha come base e relativa altezza, rispettivamente, il perimetro del poligono e il suo apotema (il segmento condotto dal centro del cerchio ortogonalmente a un lato del poligono). Quindi l'area di P_{2^n} è data da

$$P_{2^n} = \frac{1}{2}(\text{PERIMETRO DI } P_{2^n}) \times (\text{APOTEMA DI } P_{2^n})$$

D'altra parte, l'area del triangolo E è data da

$$E = \frac{1}{2}(\text{CIRCONFERENZA}) \times (\text{RAGGIO})$$

Poiché

$$(\text{PERIMETRO DI } P_{2^n}) < \text{CIRCONFERENZA} \qquad \text{e} \qquad \text{APOTEMA DI } P_{2^n} < \text{RAGGIO},$$

l'area di P_{2^n} è minore dell'area di E:

$$P_{2^n} < E \tag{226}$$

Ma abbiamo già dimostrato che $P_{2^n} > E$ (si veda la (225)). In definitva, l'ipotesi $C > E$ porta a un assurdo.

33 Il termine ἄτοπον significa letteralmente 'che non ha luogo'; ossia, 'assurdo', 'impossibile'.

34 Abbiamo già dimostrato che non può essere $C > E$, perché questa ipotesi porta a un assurdo. Supponiamo allora che sia $C < E$. Consideriamo i poligoni regolari circoscritti al cerchio. Dapprima *si inscriva il quadrato* (καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον); poi *si dividano gli archi in due parti uguali* (καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα) e si traccino le tangenti nei punti di divisione. Si otterrà così l'ottagono regolare circoscritto. Procedendo in questo modo, consideriamo successivamente i poligoni regolari circoscritti al cerchio, con un numero di lati pari a 2^2, 2^3, 2^4 eccetera.

35 L'angolo $\angle OAP$ è retto perché la retta ΠP tangente al cerchio nel punto A è perpendicolare al raggio NA (Fig:24. In questa figura, tratta da Heiberg [26], si usano lettere maiuscole dell'alfabeto greco. In particolare, P è la forma maiuscola di ρ (*rho*).)

36 Nel triangolo OAP, rettangolo in A, si ha $OP > PA$, perché l'ipotenusa è maggiore di un cateto. Inoltre, $PA = PM$, in quanto segmenti di rette tangenti al cerchio mandate dallo stesso punto esterno P. Pertanto, $OP > PM$.

37 Dimostriamo che: *il triangolo* $PO\Pi$ *è pertanto maggiore della metà della figura* $OZAM$. (τὸ ΡΟΠ τρίγωνον ἄρα τοῦ ΟΖΑΜ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ).
In questo passo, il termine *figura* (σχῆμα) $OZAM$ denota il quadrilatero mistilineo il cui bordo è costituito dai due segmenti rettilinei OM, OZ e dai due *archi* di circonferenza AZ e AM.
Anzitutto, dimostriamo che il triangolo OAP è maggiore del triangolo PAM. Infatti, la base OP del primo triangolo è maggiore della base PM del secondo (come già dimostrato nella nota precedente), mentre le relative altezze sono uguali. Pertanto, per l'evidente simmetria della figura, valgono le seguenti disuguaglianze tra triangoli (a contorni rettilinei):

$$OAP > \frac{1}{2}OAM, \qquad OA\Pi > \frac{1}{2}OAZ$$

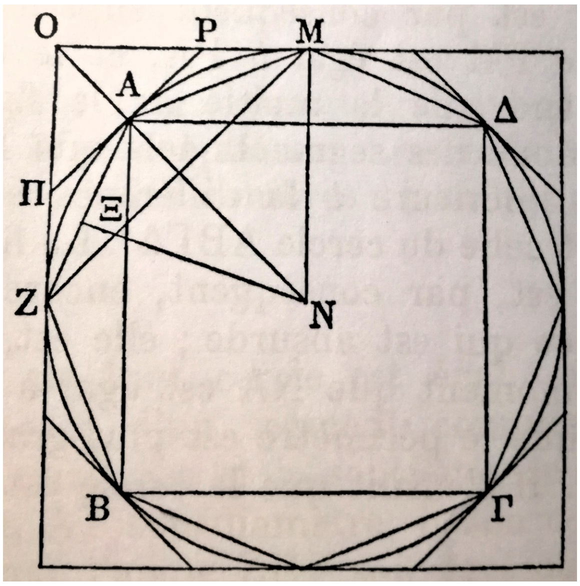


Figura 24: Cerchio con poligoni inscritti e circoscritti.

Sommando membro a membro, vediamo allora che il triangolo $PO\Pi = OAP + OA\Pi$ è maggiore della metà del quadrilatero a contorni rettilinei $\overline{OZAM}$:

$$\Pi OP = OAP + OA\Pi > \frac{1}{2}\,(OAM + OAZ) = \frac{1}{2}\,\overline{OZAM} \tag{227}$$

Consideriamo ora il quadrilatero a bordo mistilineo $OZAM$ il cui bordo include i due archi di circonferenza AZ e AM (e non i due *segmenti* AZ e AM). Poiché $OZAM$ è una parte di $\overline{OZAM}$, si ha $\overline{OZAM} > OZAM$. Quindi, dalla disuguaglianza (227) segue

$$\Pi OP > \frac{1}{2}\,OZAM \qquad (OZAM\text{: Figura con bordo mistilineo.}) \tag{228}$$

come volevamo dimostrare.

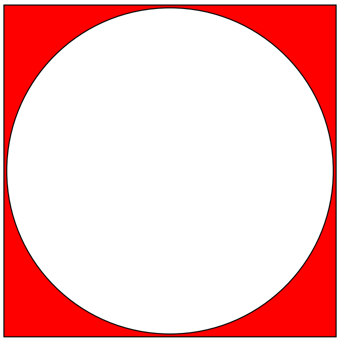
38 *I segmenti simili al segmento ΠZA* (οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι) costituiscono, sommati insieme, la figura $P'_{2^n} - C$, cioè la parte del poligono regolare circoscritto P'_{2^n} (con 2^n lati) che è esterna al cerchio C. Lo scopo di questo paragrafo - che richiede la conoscenza di alcuni concetti di geometria esposti negli *Elementi* di Euclide (si veda anche il paragrafo 3.1) - è di dimostrare che esiste un intero n per il quale la figura $P'_{2^n} - C$ è minore *della differenza, per la quale E supera il cerchio ABΓΔ* (τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου). Cioè, esiste un intero $n \geq 2$ per il quale

$$P'_{2^n} - C < E - C \tag{229}$$

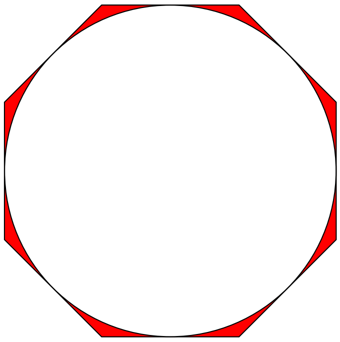
La differenza $P'_{2^n} - C$ si può rendere piccola quanto si vuole, pur di prendere n abbastanza grande.

Il testo di Archimede (o di chi per lui) è qui un po' oscuro. Proviamo a ricostruire l'argomentazione, che non è di facile comprensione, nel modo seguente. Scriviamo anzitutto il risultato (228) in una forma più espressiva. Detti P'_4 e P'_8 il quadrato e l'ottagono regolare circoscritti, abbiamo

$$\Pi OP = \frac{1}{4}\,(P'_4 - P'_8)\,, \qquad OZAM = \frac{1}{4}\,(P'_4 - C)\,,$$



(a) $P'_4 - C$.



(b) $P'_8 - C$

Quindi, la (228) è equivalente a

$$P'_4 - P'_8 > \frac{1}{2}\left(P'_4 - C\right) \tag{230}$$

Inoltre, notiamo che

$$(P'_4 - C) - (P'_4 - P'_8) = P'_8 - C \tag{231}$$

Riassumiamo:

Se da $P'_4 - C$ sottraiamo $P'_4 - P'_8$, allora:

(a) La parte $P'_4 - P'_8$ sottratta da $P'_4 - C$ è *più della metà* della stessa $P'_4 - C$ (per la (230));

(b) La parte restante è $P'_8 - C$ (per la (231)).

Ora, con la stessa argomentazione, possiamo generalizzare il nostro risultato. Per ogni intero positivo $n \geq 2$, chiamiamo P'_{2^n} il poligono regolare con 2^n lati circoscritto al cerchio C. Sottraiamo da $P'_{2^n} - C$ la parte $P'_{2^n} - P'_{2^{n+1}}$. Allora:

(a) La parte $P'_{2^n} - P'_{2^{n+1}}$ che sottraiamo da $P'_{2^n} - C$ è *più della metà* di $P'_{2^n} - C$;

(b) La parte restante è $P'_{2^{n+1}} - C$:

$$(P'_{2^n} - C) - (P'_{2^n} - P'_{2^{n+1}}) = P'_{2^{n+1}} - C \tag{232}$$

Possiamo allora utilizzare la *Proposizione* 1 del Libro X degli *Elementi* di Euclide (per la cui dimostrazione rimandiamo al paragrafo 3.1, o direttamente agli *Elementi*), che parafrasiamo nel modo seguente:

PROPOSIZIONE 1 (Euclide, *Elementi, Libro X*) *Fissate due grandezze (omogenee) disuguali* A *e* D*, con* A $>$ D*, operiamo nel modo seguente:*

(1) Sottraiamo dalla grandezza A *una parte che sia maggiore della sua metà;*

(2) Dalla parte che resta, sottraiamo ancora una parte che sia maggiore della sua metà;

(3) Iteriamo il procedimento (cioè, applichiamolo successivamente nello stesso modo).

Allora, dopo un numero finito di passi, resterà una grandezza che sarà minore della più piccola, D*, delle due grandezze fissate.*

Prendiamo allora A $= P'_4 - C$ e D $= E - C$ (si ricordi che stiamo supponendo $E > C$). Sottraiamo da A $= P'_4 - C$ la parte $P'_4 - P'_8$ (maggiore della sua metà); dalla parte restante

$P'_8 - C$ sottraiamo la parte $P'_8 - P'_{16}$ (maggiore della sua metà) eccetera. Allora, per la precedente PROPOSIZIONE 1 di Euclide, esiste un intero n per il quale si avrà

$$P'_{2^n} - C < E - C \tag{233}$$

come si voleva dimostrare.

39 Abbiamo dimostrato che esiste un intero n per il quale si ha $P'_{2^n} - C < E - C$. Di qui si deduce subito che si deve avere $P'_{2^n} < E$.

40 Abbiamo visto che l'ipotesi $C < E$ implica che esiste un n per il quale si ha

$$P'_{2^n} < E$$

Ma allora arriviamo subito a un assurdo. Infatti, per un (qualunque) poligono P' circoscritto al cerchio C (in particolare, per P'_{2^n}) si deve sempre avere

$$P' > E$$

Infatti, P' è uguale a un triangolo che ha come base il perimetro di P' e come relativa altezza il raggio NA, mentre il triangolo rettangolo E, per definizione, ha per cateti lo stesso raggio NA e la circonferenza (rettificata), che è minore del perimetro di P'.

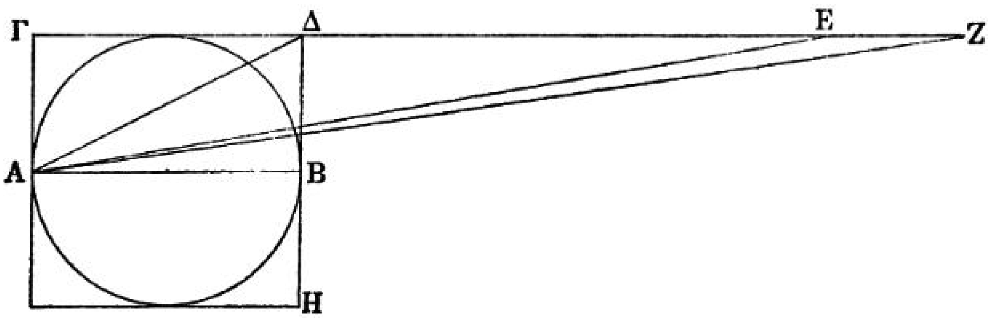
41 Riassumendo, abbiamo dimostrato che non può essere né $C > E$ né $C < E$, perché entrambe queste disuguaglianze conducono a un assurdo. Pertanto, concludiamo che $C = E$, come si voleva dimostrare.

42 Per seguire la dimostrazione della *Proposizione* 2 si deve osservare, anzitutto, che essa presuppone entrambe le Proposizioni 1 e 3. Detto altrimenti, l'ordine delle proposizioni è, dal punto di vista logico, sbagliato: le proposizioni 2 e 3 andrebbero scambiate tra loro.
I tre triangoli rettangoli $A\Gamma\Delta$, $A\Gamma E$ e $A\Gamma Z$ hanno in comune, per costruzione, il cateto $A\Gamma$, uguale al raggio. Gli altri cateti sono, rispettivamente: il diametro $\Gamma\Delta$; il triplo del diametro, $\Gamma E = 3\,\Gamma\Delta$; il segmento $EZ = \frac{1}{7}\,\Gamma\Delta$. Pertanto, i triangoli in questione soddisfano:

$$A\Gamma E = 3\,A\Gamma\Delta \qquad\qquad AEZ = \frac{1}{7}\,A\Gamma\Delta \tag{234}$$

Allora, $A\Gamma Z$ sta a $A\Gamma\Delta$ come 22 a 7. Infatti,

$$\frac{A\Gamma Z}{A\Gamma\Delta} = \frac{A\Gamma E + AEZ}{A\Gamma\Delta} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \tag{235}$$



43 Il quadrato la cui diagonale è ΓH ha come lato il diametro AB del cerchio. Pertanto è il quadruplo del triangolo rettangolo $A\Gamma\Delta$, che è uguale al quadrato costruito sul raggio del cerchio.

44 Il triangolo $A\Gamma\Delta Z$ non è uguale al cerchio, come si afferma nel testo, ma approssima il cerchio per eccesso. (Si veda la prossima nota.)

45 Nella successiva *Proposizione* 3, sarà dimostrato che

$$\textsc{circonferenza} \approx \left(3 + \frac{1}{7}\right) \textsc{diametro} \tag{236}$$

Quest'ultima scrittura deve essere intesa come una approssimazione dall'alto della circonferenza. Del resto, la precedente *Proposizione* 1 afferma che il cerchio è uguale a un triangolo rettangolo che ha come cateti il raggio e la circonferenza. Quindi, il triangolo rettangolo $A\Gamma Z$, i cui cateti sono il raggio $A\Gamma$ e $\left(3 + \frac{1}{7}\right)$ DIAMETRO, approssima (dall'alto) il cerchio:

$$\begin{aligned} \textsc{triangolo}\, A\Gamma Z &= \frac{1}{2}\textsc{raggio} \times \left(3 + \frac{1}{7}\right) \textsc{diametro} \\ &\approx \frac{1}{2}\textsc{raggio} \times \textsc{circonferenza} \\ &= \textsc{cerchio} \end{aligned}$$

Si conclude allora che il triangolo $A\Gamma Z$ (pur non essendo esattamente uguale al cerchio) è un'approssimazione per eccesso del cerchio.

46 Secondo Heiberg ([26] pag. 237), tutto il testo greco tra parentesi quadre: [ἐπεὶ ... δειχθήσεται], è assai confuso e non si deve attribuire ad Archimede, ma a un trascrittore (forse responsabile anche dell'inversione dell'ordine delle Proposizioni 2 e 3).

47 Riassumiamo l'argomentazione. Abbiamo dimostrato che

$$\text{CERCHIO} \underbrace{\approx}_{\text{“}=\text{”}} A\Gamma Z = \left(3 + \frac{1}{7}\right) A\Gamma\Delta \tag{237}$$

(La scrittura corretta è ovviamente: $\text{CERCHIO} < A\Gamma Z = \left(3+\frac{1}{7}\right) A\Gamma\Delta$, ma nel testo si usa il termine "uguale" cioè si afferma: $\text{CERCHIO} = A\Gamma Z = \left(3+\frac{1}{7}\right) A\Gamma\Delta$) Inoltre, si ha ovviamente (si veda la figura)

$$\text{QUADRATO SUL DIAMETRO} = 4\, A\Gamma\Delta \tag{238}$$

Concludiamo allora che

$$\frac{\text{CERCHIO}}{\text{QUADRATO SUL DIAMETRO}} < \frac{\left(3+\frac{1}{7}\right) A\Gamma\Delta}{4\, A\Gamma\Delta} = \frac{11}{14} \tag{239}$$

Nel testo, invece della precedente disuguaglianza, si asserisce l'uguaglianza:

$$\frac{\text{CERCHIO}}{\text{QUADRATO SUL DIAMETRO}} \underbrace{\text{“} = \text{”}}_{<} \frac{\left(3+\frac{1}{7}\right) A\Gamma\Delta}{4\, A\Gamma\Delta} = \frac{11}{14} \tag{240}$$

Si noti che, nel linguaggio moderno,

$$\frac{\text{CERCHIO}}{\text{QUADRATO SUL DIAMETRO}} = \frac{\pi}{4}$$

e la differenza tra $\frac{11}{14} = 0.785714..$ e $\frac{\pi}{4} = 0.78539..$ è minore di 10^{-3}.
In questa *Proposizione* 2, un aspetto concettualmente importante è il seguente: la costante π (approssimata per eccesso nella (successiva) *Proposizione* 3 come $\left(3+\frac{1}{7}\right)$) e considerata come rapporto tra due lunghezze (la circonferenza e il diametro), viene qui considerata come rapporto tra estensioni: precisamente, come rapporto tra il cerchio (approssimato dal triangolo $A\Gamma Z$) e il quadrato avente come lato il raggio $A\Gamma$ (uguale al triangolo $A\Gamma\Delta$).

48 Con 'perimetro del cerchio' (τοῦ κύκλου περίμετρος), oppure 'periferia del cerchio', si intende la circonferenza.

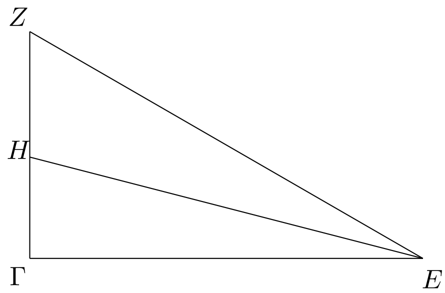
49 Dunque, l'enunciato di questa *Proposizione* 3 si può trascrivere nel modo seguente:

$$3\,\text{Diametro} + \frac{10}{71}\,\text{Diametro} < \text{Circonferenza} < 3\,\text{Diametro} + \frac{1}{7}\,\text{Diametro}$$

Ovvero, in termini di rapporti:

$$3 + \frac{10}{71} < \frac{\text{Circonferenza}}{\text{Diametro}} < 3 + \frac{1}{7}$$

50 Nel triangolo rettangolo ΓEZ, con l'angolo ZEΓ uguale a un terzo di angolo retto, l'ipotenusa EZ è doppia del cateto minore ZΓ.

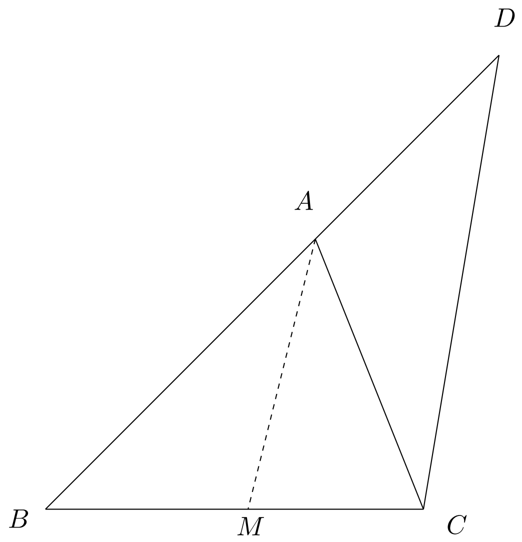


Dunque l'ipotenusa EZ sta al cateto minore ZΓ come 306 : 153, ossia come 2 : 1. Il rapporto 2 : 1 viene qui scritto come 306 : 153 perché Archimede approssima dal basso il rapporto tra il cateto maggiore ΓE e il cateto minore ΓZ (cioè, approssima dal basso $\sqrt{3}$) con la frazione 265/153:

$$\Gamma E/\Gamma Z = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} > \frac{265}{153} \qquad (241)$$

Nel testo della *Misura del Cerchio* non si trovano cenni ai metodi seguiti da Archimede per calcolare approssimazioni delle radici quadrate (dall'alto o dal basso, a seconda della necessità; in questo caso, per approssimare $\sqrt{3}$ dal basso). Per possibili motivazioni della disuguaglianza (241) si veda la (149) del paragrafo (6.2).

51 Qui si utilizza il *teorema della bisettrice* (Euclide, *Elementi*, Libro VI, Proposizione 3), al quale Archimede farà ricorso più volte nel seguito:
In un qualunque triangolo ABC, chiamiamo M il punto in cui la bisettrice dell'angolo in A interseca il lato BC. Allora: $AB : AC = BM : MC$



Per dimostrare questo teorema, si tracci la parallela a AM passante per C e si denoti D la sua intersezione con la retta BA. Abbiamo:
(i) $\angle ACD = \angle MAC$, perché angoli alterni interni (rispetto alle rette parallele MA e CD tagliate dalla secante AC);
(ii) $\angle ADC = \angle BAM (= \angle MAC)$, in quanto angoli corrispondenti rispetto alle rette parallele MA e CD tagliate dalla secante BA.
Pertanto i due angoli $\angle ACD$ e $\angle ADC$ sono uguali tra loro, perché entrambi uguali a $\angle MAC$. Il triangolo ABC è dunque isoscele: $AD = AC$. Ora, per il teorema di Talete, abbiamo

$$AB : AD = BM : MC.$$

Poiché $AD = AC$, sostituendo nell'ultima proporzione otteniamo la tesi:

$$AB : AC = BM : MC$$

52 L'espressione (tra parentesi, nel testo greco di Heiberg) καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι, 'permutando e componendo' (che si riferisce alle proprietà del permutare e del comporre nelle proporzioni) si riferisce al contenuto del periodo successivo (si veda la nota seguente). Anche questo dettaglio, come il verosimile scambio nell'ordine dei teoremi (infatti, il secondo teorema della *Misura del Cerchio* presuppone il terzo) mostra come il testo che ci è pervenuto sia verosimilmente corrotto.

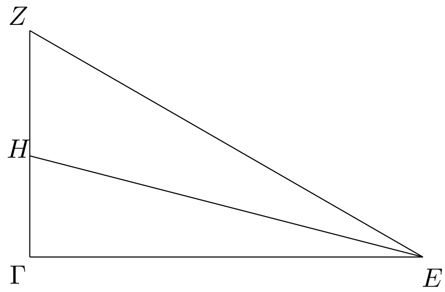
53 Ricordiamo le proprietà delle proporzioni che verranno utilizzate nel seguito. Dalla proporzione $a : b = c : d$ (dove a, b, c, d sono grandezze omogenee, nel nostro caso quattro segmenti) si deducono le proporzioni seguenti:
(1) Per la proprietà del comporre (componendo, συνθέντι),

$$(a + b) : b = (c + d) : d$$

(2) Per la proprietà del permutare (permutando, ἐναλλὰξ),

$$a : c = b : d$$

Ora, per il teorema della bisettrice applicato al triangolo ΓΕΖ (metà di un triangolo equilatero),



abbiamo $\mathrm{ZE : E\Gamma = ZH : H\Gamma}$. Applicando la proprietà del comporre (*componendo*) si ha

$$\mathrm{(ZE + E\Gamma) : E\Gamma = (ZH + H\Gamma) : H\Gamma}$$

ovvero (essendo $\mathrm{ZH + H\Gamma = Z\Gamma}$)

$$\mathrm{(ZE + E\Gamma) : E\Gamma = Z\ \Gamma : H\Gamma}$$

Permutando, otteniamo

$$\mathrm{(ZE + \Gamma E) : Z\Gamma = E\Gamma : \Gamma H}$$

ossia,

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{ZE}{Z\Gamma} + \frac{\Gamma E}{Z\Gamma} \tag{242}$$

Quindi,

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{ZE + \Gamma E}{Z\Gamma} = \frac{ZE}{Z\Gamma} + \frac{\Gamma E}{Z\Gamma} > 2 + \frac{265}{153} = \frac{571}{153} \tag{243}$$

perché $ZE/Z\Gamma = 2$ e $\Gamma E/Z\Gamma > 265/153$ (si veda (241)).

54 δυνάμει, *'al quadrato'.* Se AB è un segmento, AB δυνάμει significa: *il quadrato di lato* AB. Quindi, qui si intenda: *Il quadrato costruito su* EH *sta al quadrato costruito su* $H\Gamma$ *come* 349.450 *sta a* 23.409. Invece, per denotare il rapporto di EH a $H\Gamma$ come segmenti (e non il rapporto dei rispettivi quadrati) viene qui usata l'espressione: Ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΓ μήκει. EH *sta a* $H\Gamma$ *in lunghezza* (μήκει).

55 Per il teorema di Pitagora,

$$EH^2 = H\Gamma^2 + E\Gamma^2$$

Possiamo allora calcolare (o meglio, approssimare, in questo caso dal basso) il rapporto tra il quadrato di lato EH e il quadrato di lato $H\Gamma$, nel modo seguente. Poiché

$$\frac{E\Gamma}{H\Gamma} > \frac{571}{153} \tag{244}$$

(come si è visto in (243)), abbiamo

$$\frac{EH^2}{H\Gamma^2} = \frac{H\Gamma^2 + E\Gamma^2}{H\Gamma^2} > \frac{153^2 + 571^2}{153^2} = \frac{349.450}{153^2} = \frac{349.450}{23.409} \tag{245}$$

56 Partiamo dalla disuguaglianza (245). Nel testo si fornisce, sena spiegazioni, l'approssimazione dal basso

$$\sqrt{349.450} > 591 + \frac{1}{8} \tag{246}$$

(Per una possibile motivazione, si vedano i calcoli dopo la (158).) Quest'ultima approssimazione e la disuguaglianza (245)

$$\frac{EH^2}{H\Gamma^2} > \frac{349.450}{23.409} = \frac{349.450}{153^2}$$

danno allora

$$\frac{EH}{H\Gamma} > \frac{\sqrt{349.450}}{\sqrt{23.409}} > \frac{591 + \frac{1}{8}}{153} \tag{247}$$

Nel testo che ci è pervenuto, le stime approssimate (dal basso o dall'alto) sono spesso presentate come uguaglianze. Ad esempio, nel caso in esame, al posto della disuguaglianza corretta (247), nel testo è scritto che EH e HΓ stanno tra loro come $591\frac{1}{8}$ a 153. (il che, a rigore, non è corretto).

57 Finora abbiamo visto il caso dei poligoni regolari di 6 e 12 lati. Passiamo ora al poligono regolare circoscritto di 24 lati. Usando ancora il teorema della bisettrice, otteniamo:

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{E\Gamma}{\Gamma H} + \frac{EH}{\Gamma H} \tag{248}$$

Dalle precedenti maggiorazioni (243) e (247)) ricaviamo allora:

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{E\Gamma}{\Gamma H} + \frac{EH}{\Gamma H} > \frac{571}{153} + \frac{591 + \frac{1}{8}}{153} = \frac{1162 + \frac{1}{8}}{153} \tag{249}$$

58 Per il teorema di Pitagora, otteniamo (come in (245); basta sostituire H al posto di Z e Θ al posto di H):

$$\frac{E\Theta^2}{\Theta\Gamma^2} = \frac{\Theta\Gamma^2 + E\Gamma^2}{\Theta\Gamma^2} > \frac{(1162 + \frac{1}{8})^2 + 153^2}{153^2} = \frac{1.373.943 + \frac{33}{84}}{153^3} \tag{250}$$

L'approssimazione dal basso scelta da Archimede (si veda una giustificazione dopo la (161)) è

$$\sqrt{1.373.943 + \frac{33}{84}} > 1172 + \frac{1}{8} \tag{251}$$

Da (250) segue allora

$$\frac{E\Theta}{\Theta\Gamma} > \frac{1172 + \frac{1}{8}}{153} \tag{252}$$

59 Con la stessa argomentazione con cui si è ricavata l'uguaglianza (242), e tenendo conto delle ultime disuguaglianze (249) e (252), abbiamo:

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma K} = \frac{\Gamma E}{\Gamma\Theta} + \frac{E\Theta}{\Gamma\Theta} > \frac{1162 + \frac{1}{8}}{153} + \frac{1172 + \frac{1}{8}}{153} = \frac{2334 + \frac{1}{4}}{153} \tag{253}$$

60 Ragionando come nei casi precedenti, per il teorema di Pitagora, abbiamo:

$$\frac{EK^2}{\Gamma K^2} = \frac{K\Gamma^2 + E\Gamma^2}{\Gamma K^2} > \frac{(2334 + \frac{1}{4})^2 + 153^2}{153^2} = \frac{5.472.132 + \frac{1}{16}}{153^2} \tag{254}$$

L'approssimazione dal basso della radice quadrata è

$$\sqrt{5.472.132 + \frac{1}{16}} > 2339 + \frac{1}{4} \tag{255}$$

(si veda il calcolo (163)).

Da (254) segue allora

$$\frac{EK}{\Gamma K} > \frac{2339 + \frac{1}{4}}{153} \tag{256}$$

61 Iterando il procedimento già seguito più volte e tenendo conto di (253) e (256), otteniamo:

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma\Lambda} = \frac{E\Gamma}{\Gamma K} + \frac{EK}{\Gamma K} > \frac{2334 + \frac{1}{4}}{153} + \frac{2339 + \frac{1}{4}}{153} = \frac{4673 + \frac{1}{2}}{153} \tag{257}$$

62 $\angle ZE\Gamma = \frac{1}{2^4}\frac{1}{3}$ANGOLO RETTO $= \frac{1}{48}$ANGOLO RETTO.

63 Si ricordi che con $A\Gamma$ si è denotato il diametro della circonferenza e con $E\Gamma$ il raggio.

64 Il perimetro del poligono regolare circoscritto di 96 lati è

$$96 \times (2\Gamma\Lambda) \tag{258}$$

Dall'uguaglianza (257),

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma\Lambda} > \frac{4673 + \frac{1}{2}}{153}, \tag{259}$$

segue allora:

$$\frac{\text{DIAMETRO DEL CERCHIO}}{\text{PERIMETRO DEL 96-GONO CIRCOSCRITTO}} = \frac{2E\Gamma}{96 \times (2\Gamma\Lambda)} > \frac{4673 + \frac{1}{2}}{96 \times 153} = \frac{4673 + \frac{1}{2}}{14688} \tag{260}$$

65 Questo significa che vale l'uguaglianza

$$14688 = 3\left(4673 + \frac{1}{2}\right) + \left(667 + \frac{1}{2}\right) \tag{261}$$

con

$$667 + \frac{1}{2} < \frac{1}{7}\left(4673 + \frac{1}{2}\right) \tag{262}$$

66 Dall'equazione (260), passando ai reciproci, ricaviamo

$$\begin{aligned}\frac{\text{PERIMETRO DEL 96-GONO CIRCOSCRITTO}}{\text{DIAMETRO DEL CERCHIO}} &< \frac{14688}{4673 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{3\left(4673 + \frac{1}{2}\right) + \left(667 + \frac{1}{2}\right)}{4673 + \frac{1}{2}} \\ &< \frac{3\left(4673 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{7}\left(4673 + \frac{1}{2}\right)}{4673 + \frac{1}{2}} \\ &= 3 + \frac{1}{7}\end{aligned}$$

Secondo alcuni studiosi (tra gli altri, Loria [37] e Thompson [53]) Archimede avrebbe calcolato le approssimazioni mediante divisioni successive, con una tecnica che si ritrova negli sviluppi delle frazioni continue (si veda [53]). A titolo di esempio, vediamo come questo metodo possa fornire, nel caso in esame, le approssimazioni trovate da Archimede:

$$\frac{14688}{4673+\frac{1}{2}} = \frac{29376}{9347} = 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{2}{1335}} < 3 + \frac{1}{7} \tag{263}$$

Riassumendo, abbiamo dimostrato:

$$\frac{\text{PERIMETRO DEL 96-GONO CIRCOSCRITTO}}{\text{DIAMETRO DEL CERCHIO}} < 3 + \frac{1}{7} \tag{264}$$

67 In conclusione,

$$\frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}} < \frac{\text{PERIMETRO DEL 96-GONO CIRCOSCRITTO}}{\text{DIAMETRO}} < 3 + \frac{1}{7} \tag{265}$$

68 Detto $A\Gamma$ il diametro della circonferenza, poniamo $B\Gamma$ uguale al lato dell'esagono regolare inscritto. Il triangolo rettangolo $BA\Gamma$ ha gli angoli acuti di 30 e 60 gradi. Pertanto,

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \sqrt{3}, \qquad \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = 2$$

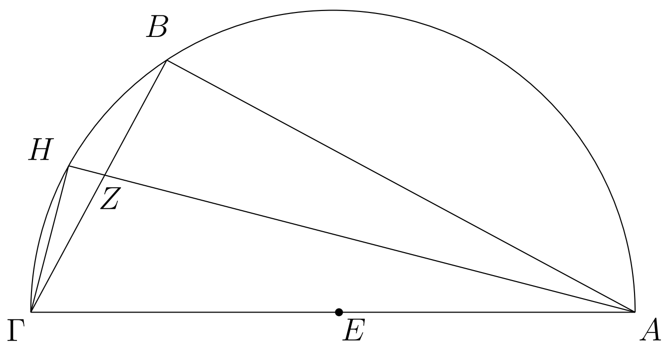


Figura: $B\Gamma$ e $H\Gamma$ sono lati dei poligoni regolari inscritti di 6 e 12 lati.

Ora Archimede usa (senza spiegazioni, nel testo pervenuto) l'approssimazione dall'alto:

$$\sqrt{3} < \frac{1351}{780} \tag{266}$$

Per motivare la (266), si veda la (149). In conclusione,

$$\frac{AB}{B\Gamma}(=\sqrt{3}) < \frac{1351}{780} \qquad \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1560}{780}(=2) \tag{267}$$

69 Si ha

$$\angle BAH = \angle H\Gamma B$$

perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco HB, e

$$\angle BAH = \angle HA\Gamma$$

perché, per costruzione, AH è bisettrice di $\angle BA\Gamma$. Di conseguenza,

$$\angle H\Gamma B = \angle HA\Gamma \tag{268}$$

perché questi ultimi due angoli sono entrambi uguali a $\angle BAH$.

70 L'angolo $AH\Gamma$ è retto perché inscritto in una semicirconferenza.

71 Per l'uguaglianza (268), i triangoli rettangoli $AH\Gamma$ e ΓHZ hanno una coppia di angoli acuti uguali:

$$\angle H\Gamma Z = \angle HA\Gamma \tag{269}$$

e quindi sono simili. Dunque,

$$AH : H\Gamma = \Gamma H : HZ = A\Gamma : \Gamma Z \tag{270}$$

72 Per il teorema della bisettrice (Euclide, *Elementi*, libro VI, Prop.3) applicato al triangolo ΓAB, abbiamo

$$A\Gamma : \Gamma Z = BA : BZ \tag{271}$$

Da questa proporzione deduciamo successivamente:

$$\begin{aligned} &\text{Permutando:} && A\Gamma : BA = \Gamma Z : BZ \\ &\text{Componendo:} && (A\Gamma + BA) : (\underbrace{\Gamma Z + BZ}_{= B\Gamma}) = A\Gamma : \Gamma Z \\ &\text{Poiché } AH : H\Gamma = A\Gamma : \Gamma Z \text{ (per (270)):} && (BA + A\Gamma) : B\Gamma = AH : H\Gamma \end{aligned}$$

Così è dimostrato quanto è scritto nel testo, cioè che la somma $BA + A\Gamma$ (συναμφότερος ἡ ΒΑΓ) sta a $B\Gamma$ (πρὸς ΒΓ) come AH a $H\Gamma$:

$$\frac{BA + A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{AH}{H\Gamma} \tag{272}$$

73 Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{AH}{H\Gamma} &= \frac{BA + A\Gamma}{B\Gamma} && \text{(Per (272))} \\ &= \frac{BA}{B\Gamma} + \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \\ &< \frac{1371}{780} + 2 = \frac{2911}{780} && \text{(Per (267))} \end{aligned}$$

Dunque

$$\frac{AH}{H\Gamma} < \frac{2911}{780} \tag{273}$$

74 Dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo $HA\Gamma$,

$$A\Gamma^2 = \Gamma H^2 + AH^2, \tag{274}$$

segue

$$\begin{aligned}\left(\frac{A\Gamma}{\Gamma H}\right)^2 &= \frac{\Gamma H^2 + AH^2}{\Gamma H^2}\\ &= 1 + \left(\frac{AH}{\Gamma H}\right)^2\\ &< 1 + \left(\frac{2911}{780}\right)^2 && \text{(per (273))}\\ &= \frac{780^2 + 2911^2}{780^2}\\ &= \frac{9082321}{780^2}\end{aligned}$$

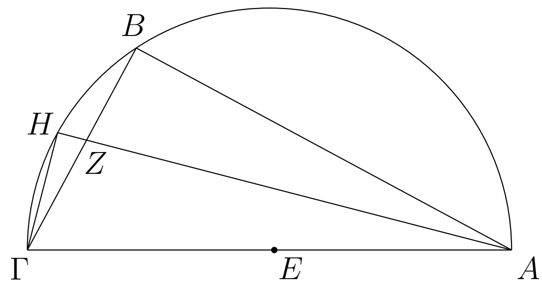


Figura: $B\Gamma$ e $H\Gamma$ sono lati dei poligoni regolari inscritti di 6 e 12 lati.

Quindi,

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma H} < \frac{\sqrt{9082321}}{780} \tag{275}$$

Ora Archimede approssima dall'alto $\sqrt{9082321}$ con $3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$:

$$\sqrt{9082321} < 3013 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \tag{276}$$

(Si veda la (166).) Pertanto, abbiamo infine

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma H} < \frac{3013 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{780} \tag{277}$$

Secondo alcuni autori, Archimede avrebbe ricavato la sua approssimazione dall'alto (276) della radice quadrata di 9082321 (e di altre radici quadrate) usando il cosiddetto *metodo babilonese*, che ora richiamiamo brevemente (si veda ad esempio Heath [24], pag.lxxxii, e Dijksteruis [11]). Si supponga di dover calcolare la radice quadrata di un numero y che non sia un quadrato perfetto. Scriviamo y come

$$y = a^2 + b$$

(a, b interi positvi) dove a^2 è il massimo quadrato perfetto che non supera y. Allora (come si vede facilmente)

$$a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a} \tag{278}$$

In modo analogo, se si scrive $y = a^2 - b$, dove a^2 è il più piccolo quadrato perfetto che supera y, valgono le approssimazioni:

$$a - \frac{b}{2a-1} < \sqrt{a^2-b} < a - \frac{b}{2a} \tag{279}$$

Nel nostro caso, scriviamo $y = 9082321$ come $a^2 + b$ (Heath [24] fa un calcolo simile, ma basato sulle disuguaglianze (279)). Si trova facilmente che il massimo quadrato perfetto che non supera y è $3013^2 = 9078169$. Dunque, $a = 3013$ e $b = y - 3013^2 = 4152$:

$$9082321 = 3013^2 + 4152 = a^2 + b$$

Pertanto, utilizzando la (278) e opportune divisioni successive, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{9082321} &< 3013 + \frac{4152}{2 \times 3013} \\
&< 3013 + \frac{3013 + 1139}{2 \times 3013} \\
&< 3013 + \frac{1}{2} + \frac{1139}{6026} \\
&< 3013 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6026/1139} \\
&< 3013 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \\
&< 3013 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

In questo modo si ritrova la (276). Quanto alla scelta dell'approssimazione $3013 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, invece della più accurata $3013 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$, si può congetturare (Heath [24], pag.lxxxii) che Archimede, per convenienza nel fare i conti, preferisca utilizzare le frazioni del tipo $\frac{1}{2^m}$, con denominatori uguali a potenze di 2.

75 Dimostriamo che

$$\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{740}$$

Ragioniamo esattamente come nel caso precedente: invece del triangolo $BA\Gamma$ e della bisettrice AH, ora consideriamo il triangolo $HA\Gamma$ e la bisettrice AH. Si tratterà di riscrivere le formule precedenti, sostituendo B, H rispettivamente con H, Θ. Allora, al posto della uguaglianza (272), abbiamo

$$\frac{HA + A\Gamma}{H\Gamma} = \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} \tag{280}$$

Allora, ricordando le disuguaglianze (273) e (277) che qui riscriviamo,

$$\frac{AH}{H\Gamma} < \frac{2911}{780} \qquad \frac{A\Gamma}{H\Gamma} < \frac{3013 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{780}$$

ricaviamo:

$$\begin{aligned}
\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} &= \frac{HA + A\Gamma}{H\Gamma} && \text{(Per (280))} \\
&= \frac{HA}{H\Gamma} + \frac{A\Gamma}{H\Gamma}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{2911}{780} + \frac{3013 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{780} && \text{(Per (273) e (277))}\\
&= \frac{5924 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{780}
\end{aligned}
$$

In conclusione,

$$\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{740} \tag{281}$$

come si voleva dimostrare.

76 Infatti,

$$1823 = \frac{4}{13}\left(5924 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$240 = \frac{4}{13}780$$

Quindi, come affermato nel testo,

$$\left(5924 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : 780 = 1823 : 240$$

Archimede semplificherà dunque i conti successivi usando, al posto della disuguaglianza

$$\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{5924 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{780} \tag{282}$$

la disuguaglianza

$$\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{1823}{240} \tag{283}$$

77 Dimostriamo che, come affermato nel testo,

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Theta} < \frac{1838 + \frac{9}{11}}{240}$$

Dal teorema di Pitagora

$$A\Gamma^2 = \Gamma\Theta^2 + A\Theta^2, \tag{284}$$

segue

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{A\Gamma}{\Gamma\Theta}\right)^2 &= \frac{\Gamma\Theta^2 + A\Theta^2}{\Gamma\Theta^2}\\
&= 1 + \left(\frac{A\Theta}{\Gamma\Theta}\right)^2\\
&< 1 + \left(\frac{1823}{240}\right)^2 && \text{(per (283))}\\
&= \frac{3380929}{240^2}
\end{aligned}
$$

Quindi,

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Theta} < \frac{\sqrt{3380929}}{240} \tag{285}$$

Ora Archimede approssima dall'alto $\sqrt{3380929}$ con $1838 + \frac{9}{11}$ (Si veda (169)):

$$\sqrt{3380929} < 1838 + \frac{9}{11} \tag{286}$$

Pertanto, abbiamo infine

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Theta} < \frac{1838 + \frac{9}{11}}{240} \tag{287}$$

come volevamo dimostrare.

78 Si consideri il triangolo rettangolo $\Theta A\Gamma$, il cui cateto $\Theta\Gamma$ è il lato del poligono regolare inscritto di 24 lati, e si bisechi l'angolo $\Theta A\Gamma$ con AK. Dunque, $K\Gamma$ è il lato del poligono regolare inscritto di 48 lati. Ragionando come nei casi precedenti, possiamo calcolare un'approssimazione dall'alto del rapporto $AK/K\Gamma$:

$$\begin{aligned} \frac{AK}{K\Gamma} &= \frac{\Theta A + A\Gamma}{\Theta\Gamma} \\ &= \frac{\Theta A}{\Theta\Gamma} + \frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} \\ &< \frac{1823}{240} + \frac{1838 + \frac{9}{11}}{240} && \text{(Per (283) e (287))} \\ &= \frac{3661 + \frac{9}{11}}{240} \end{aligned}$$

da cui segue

$$\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{3661 + \frac{9}{11}}{240}$$

Ora si ha

$$\frac{11}{40}\left(3661 + \frac{9}{11}\right) = 1007, \qquad \frac{11}{40}240 = 66$$

ossia, in modo equivalente,

$$1007 : \left(3661 + \frac{9}{11}\right) = 66 : 240 = 11 : 40 \tag{288}$$

Dunque, alla fine:

$$\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{3661 + \frac{9}{11}}{240} = \frac{\frac{11}{40}\left(3661 + \frac{9}{11}\right)}{\frac{11}{40}\,240} \tag{289}$$

$$= \frac{1007}{66} \tag{290}$$

Ovviamente, questi ultimi conti non si trovano nel testo. Sono soltanto una possibile ricostruzione "moderna" che non escludo possa essere scarsamente utile, o addirittura fuorviante; si vedano, a questo proposito, i commenti in Fowler [18], pag. 245).
Il testo stesso è un po' criptico: l'espressione ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ιαʹ μʹ (*ciascuno dei due, infatti, rispetto ad altri due, come* 11 *a* 40) si può interpretare in più modi. Sulla base dei conti fatti sopra, interpretiamo comunque nel modo seguente: il rapporto $\frac{AK}{K\Gamma}$ è minore del rapporto di 1007 a 66; infatti, ciascuno di essi (cioè, 1007 e 66) sta, rispettivamente, ad altri due termini (non specificati nel testo, e che sono appunto $(3661 + \frac{9}{11})$ e 240) come 11 sta a 40 (si vedano le proporzioni (288)).

79 Dimostriamo che una stima dall'alto per il rapporto $A\Gamma/\Gamma K$ è data da:

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma K} < \frac{1009 + \frac{1}{6}}{66} \tag{291}$$

Con le stesse argomentazioni utilizzate nei casi precedenti, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{A\Gamma}{\Gamma K}\right)^2 &= \frac{\Gamma K^2 + AK^2}{\Gamma K^2} \\
&= 1 + \left(\frac{AK}{\Gamma K}\right)^2 \\
&< 1 + \left(\frac{1007}{66}\right)^2 && \text{(per (289))} \\
&= \frac{66^2 + 1007^2}{66^2} \\
&= \frac{1018405}{66^2}
\end{aligned}$$

L'approssimazione dall'alto di $\sqrt{1018405}$ scelta da Archimede è

$$\sqrt{1018405} < 1009 + \frac{1}{6} \tag{292}$$

Dunque,

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma K} < \frac{1009 + \frac{1}{6}}{66} \tag{293}$$

come volevamo dimostrare.

80 Ora consideriamo il triangolo rettangolo $KA\Gamma$ e bisechiamo l'angolo $KA\Gamma$ con $A\Lambda$. Dunque, $\Lambda\Gamma$ è il lato del poligono regolare inscritto di 96 lati. Come nei casi precedenti, calcoliamo un'approssimazione dall'alto del rapporto $A\Lambda/\Lambda\Gamma$:

$$\begin{aligned}
\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} &= \frac{KA + A\Gamma}{K\Gamma} \\
&= \frac{KA}{K\Gamma} + \frac{A\Gamma}{K\Gamma} \\
&< \frac{1007}{66} + \frac{1009 + \frac{1}{6}}{66} && \text{(Per (289) e (293))} \\
&= \frac{2016 + \frac{1}{6}}{66}
\end{aligned}$$

Dunque,

$$\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} < \frac{2016 + \frac{1}{6}}{66} \tag{294}$$

81 Dimostriamo che

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Lambda} < \frac{2017 + \frac{1}{4}}{66} \tag{295}$$

Con il solito procedimento, abbiamo:

$$\left(\frac{A\Gamma}{\Gamma\Lambda}\right)^2 = \frac{\Gamma\Lambda^2 + A\Lambda^2}{\Gamma\Lambda^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \left(\frac{A\Lambda}{\Gamma\Lambda}\right)^2 \\
&< 1 + \left(\frac{2016 + \frac{1}{6}}{66}\right)^2 && \text{(per (294))} \\
&= \frac{66^2 + 2016^2 + 672 + \frac{1}{36}}{66^2} \\
&= \frac{4.069.284 + \frac{1}{36}}{66^2}
\end{aligned}
$$

L'approssimazione dall'alto di $\sqrt{4.069.284 + \frac{1}{36}}$ scelta da Archimede è

$$\sqrt{4.069.284 + \frac{1}{36}} < 2017 + \frac{1}{4} \tag{296}$$

Dunque,

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Lambda} < \frac{2017 + \frac{1}{4}}{66} \tag{297}$$

come si voleva dimostrare.

82 'Invertendo' significa qui: passando ai reciproci. Vale a dire: abbiamo trovato, con (297), un'approssimazione dall'alto per il rapporto tra il diametro del cerchio e il lato $\Gamma\Lambda$ del poligono regolare di 96 lati inscritto nel cerchio:

$$\frac{\text{DIAMETRO}}{\text{LATO 96-GONO INSCRITTO}} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Lambda} < \frac{2017 + \frac{1}{4}}{66}$$

Ora dobbiamo passare ai reciproci,

$$\frac{\text{LATO DEL 96-GONO INSCRITTO}}{\text{DIAMETRO}} = \frac{\Gamma\Lambda}{A\Gamma} > \frac{66}{2017 + \frac{1}{4}} \tag{298}$$

in modo da trovare infine (moltiplicando per 96) una stima dal basso del rapporto

$$\frac{\text{PERIMETRO DEL 96-GONO INSCRITTO}}{\text{DIAMETRO}} = \frac{96\,\Gamma\Lambda}{A\Gamma} > \frac{96 \times 66}{2017 + \frac{1}{4}} = \frac{6336}{2017 + \frac{1}{4}} \tag{299}$$

83 Arrivati alla disuguaglianza (299), occorre ora trovare un'approssimazione dal basso per $\frac{6336}{2017+\frac{1}{4}}$. Come abbiamo già visto nel caso delle approssimazioni mediante poligoni circoscritti (si veda lo sviluppo (263)), si può congetturare che Archimede, per svolgere i conti, abbia fatto ricorso a una tecnica basata sulle divisioni successive, utilizzata anche negli sviluppi in frazioni continue. Ad esempio, nel caso in esame:

$$\frac{6336}{2017 + \frac{1}{4}} = \frac{25344}{8069} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{27}{110}}} > 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{10}} = 3 + \frac{10}{71} \tag{300}$$

Quindi, come scritto nel testo, 6336 è maggiore di $2017\frac{1}{4}$ moltiplicato per $3\frac{10}{71}$:

$$6336 > \left(2017 + \frac{1}{4}\right)\left(3 + \frac{10}{71}\right)$$

Dunque, riassumendo, si è dimostrato che

$$3 + \frac{10}{71} < \frac{\text{PERIMETRO DEL 96-GONO INSCRITTO}}{\text{DIAMETRO DEL CERCHIO}} \tag{301}$$

84 Riassumendo, si è dimostrato che da un lato valgono le dusuguaglianze:

$$3 + \frac{10}{71} < \frac{\text{PERIMETRO DEL 96-GONO INSCRITTO}}{\text{DIAMETRO}} < \frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}} \tag{302}$$

e dall'altro:

$$\frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}} < \frac{\text{PERIMETRO DEL 96-GONO CIRCOSCRITTO}}{\text{DIAMETRO}} < 3 + \frac{1}{7} \tag{303}$$

Dunque, da (302) e (303), segue

$$3 + \frac{10}{71} < \frac{\text{CIRCONFERENZA}}{\text{DIAMETRO}} < 3 + \frac{1}{7} \tag{304}$$

Con le notazioni attuali, abbiamo infine dimostrato che

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} \tag{305}$$

85 Si ricordi che τριπλασίων è superlativo di τριπλάσιον, che significa *triplo*. Quindi, significa *più che triplo*.

86 Su questa questione si vedano anche i lavori di D. Richeson [42] e [43], pag.112.

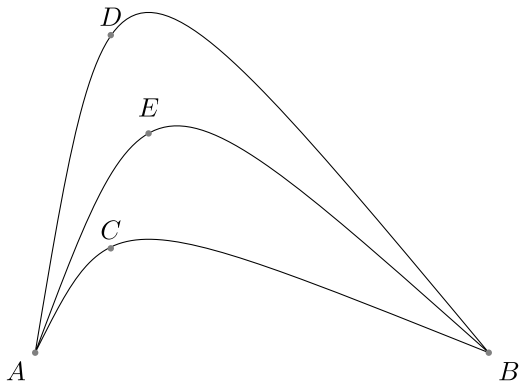
87 Se una linea *piana* (ἐν ἐπιπέδῳ) congiunge il punto A al punto B, i suoi *estremi* (πέρατα) sono i due punti A, B. Le linee curve (καμπύλαι γραμμαὶ) sono chiamate πεπερασμέναι γραμμαὶ (da πέρας: confine, limite, bordo) quando sono *dotate di due punti estremi* (cioè, detto in modo meno corretto, hanno un punto iniziale e un punto finale). Qui non ho tradotto πεπερασμέναι γραμμαὶ come *linee limitate* (come fanno Mugler [2] e Heath [24]). L'espressione 'linea limitata' può essere fuorviante se il temine 'limitata' si interpreta secondo il significato attuale del termine in geometria: una figura piana $\mathcal{F}$ è limitata se esiste un cerchio che la contiene. Nei seguenti assiomi (ἀξιόματα), o definizioni, del trattato *Sulla Sfera e sul Cilindro* (che qui non riportiamo perché non utilizzati nella *Misura del Cerchio*) Archimede estende il concetto di linea con punti estremi a quello di 'superficie con lineea estrema', che potremmo chiamare 'superficie con bordo'.

88 L'arco di curva dal punto estremo A al punto estremo B è sempre tutto contenuto in uno dei due semipiani individuato dall retta AB.

89 L'espressione ἐπὶ τὰ αὐτὰ significa *dalla stessa parte* (o *nella stessa direzione*).

90 Non riportiamo, perché non rilevanti per la *Misura del Cerchio*, le successive interessanti definizioni e i corrispondenti postulati per le superfici convesse, e per le superfici convesse aventi tutte come bordo una stessa linea piana (Mugler, [2], pag. 11).

91 Se tra tutte le curve concave dalla stessa parte, che congiungono gli stessi punti estremi, ce n'è una che è inclusa in tutte le altre, questa è quella di lunghezza minima. Ad esempio, tra le curve disegnate qui sotto, quella di lunghezza minima sarà ACB.



92 Il rapporto $\pi = \frac{\textsc{Circonferenza}}{\textsc{Diametro}}$, nel caso in esame.

93 Seguiamo le notazioni di F. Borceaux [5].

94 Toeplitz aggiunge inoltre che dalle traduzioni arabe di alcune opere di Archimede - in particolare, dai testi di Al Biruni che citeremo più avanti -, sappiamo che Archimede non si limitò a scoprire le formule di duplicazione e bisezione - già presenti, almeno implicitamente, nella *Misura del Cerchio*. Infatti, arrivò a dimostrare un teorema (detto *della corda spezzata*, esposto nel paragrafo 5.4.2), strettamente correlato alle formule di addizione e sottrazione per $\sin(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha - \beta)$.

95 Seguiamo l'esposizione di O. Toeplitz [54], *The Calculus: A Genetic Approach*, pagg. 18-22, *Archimedes'* Measurement of the Circle *and the sine tables.*

96 Da $s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}$ segue

$$4 - s_n^2 = (2 - s_{2n}^2)^2, \qquad \text{da cui} \qquad s_n^2 = 4s_{2n}^2 - s_{2n}^4$$

Ricaviamo quindi la (91):

$$s_n = s_{2n}\sqrt{4 - s_{2n}^2}$$

97 Tābit ibn Qurra (826-901), uno dei più influenti scienziati dell'epoca d'oro islamica, appartenente alla comunità religiosa dei Sabiani di Harrān in Mesopotamia - una religione politeista poco conosciuta - era di madre lingua siriaca e padroneggiava l'arabo e il greco. Fu attivo a Baghdad nella seconda metà del IX secolo, in un luogo e un momento storico tra più importanti di tutta la storia della matematica e della scienza in genere. Scienziato di grande talento, fu influente anche per le sue traduzioni: tra l'altro, degli ultimi tre libri delle *Coniche* di Apollonio e del trattato *Sulla Sfera e il Cilindro* di Archimede. Curò la revisione degli *Elementi* di Euclide e dell'*Almagesto* di Tolomeo; si occupò, oltre che di matematica, anche di astronomia e di filosofia.
La Baghdad di quel tempo era sede della famosa *Casa della Saggezza* (arabo: بَيت ا لِهكمَة *Bayt al-Hikmah*) che possiamo paragonare a una prestigiosa accademia di ricerca, dotata di una delle biblioteche più ricche del tempo.

Per informazioni sulla biografia di Tābit ibn Qurra e per farsi un'idea della vastità e della profondità dei suoi interessi, rimando a Roshdi Rahed (Ed.), [44].

98 Nell'introduzione al suo lavoro sulla costruzione del lato dell'ettagono regolare inscritto nel cerchio ([49], pag. 74) Tābit ibn Qurra dichiara di avere fatto una grande fatica a ricostruire il contenuto del *Libro* di Archimede - il cui originale già a quel tempo era andato perduto - in quanto disponeva soltanto di una copia apocrifa che giudicava corrotta *"a causa dell'ignoranza e della mancanza di comprensione dell'argomento del suo copista."*

99 Un risultato che, come abbiamo visto, era già implicitamente contenuto nella *Misura del Cerchio* (uguaglianza (99)).

100 Il titolo originale arabo del libro:

رِسَالَة اسـتِخرَج الَاوتَار فِ الدَارَة *risālah istiẖrağ ilāwtār fi 'ldārah*

si può tradurre letteralmente come *Trattato sull'estrazione delle corde nel cerchio*, o come *Trattato sul calcolo delle corde nel cerchio*. Tedesco: *Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise*; inglese: *Book of Derivation of Chords in the Circle*, oppure *A Treatise on Drawing Chords in a Circle*. Lo scopo di questo libro era di esporre proposizioni di geometria utili per la costruzione dele tavole delle corde in un cerchio. Si trattava, nella sostanza, di tavole equivalenti a quelle dei seni utilizzate per gli studi di astronomia, come quelle contenute nella classica opera *Almagesto* di Tolomeo (circa 150 d.C.). Il successivo teorema della corda spezzata (dovuto a Archimede) dà un esempio importante del legame tra il calcolo delle corde e la formulazione classica della trigonometria (nel caso del teorema in questione, le formule di addizione e sottrazione del seno).

101 Il grande scienziato islamico persiano al-Birūni nacque nella regione centroasiatica del Khwārizm nel 973 e morì nel 1048 a Ghazna, nell'odierno Afghanistan. Diede importanti contributi in uno spettro molto ampio di discipline, tra le quali la matematica, l'astronomia, la geografia, la medicina, lo studio comparato delle religioni e la filosofia. Si recò in India, per studiarne lingua, scienza, religione e altri aspetti della cultura e della società. Introdusse in India gli *Elementi* di Euclide e *L'Almagesto* di Tolomeo, curandone la traduzione in sanscrito. Il trattato sulle corde di un cerchio ([50]) - da cui abbiamo estratto il teorema attribuito da Al Birūni stesso a Archimede - doveva soprattutto fornire le basi matematiche per la sua classica opera di astronomia *Canone di Masūd*.

102 Altri studiosi, come Brummelen ([8], pag. 32, e Toomer [55]) ritengono invece che il passaggio dal teorema della corda spezzata alle formule di addizione e sottrazione non sia stato così immediato, e quindi sono scettici riguardo alla possibilità che Archimede abbia potuto utilizzare il teorema della corda per gli scopi della trigonometria. Comunque si veda la questione, mi sembra ragionevole sostenere che il calcolo delle corde di Archimede permetteva, sul piano teorico, non soltanto di costruire le tavole dei seni di Tolomeo, ma addirittura di migliorarle. (O. Toeplitz, [54].)

103 Per facilitare la lettura, nella dimostrazione che segue aggiungo qualche spiegazione in più rispetto alla traduzione in tedesco del testo di Al Birūni fatta da Suter [50], pag. 13.

104 S. Günther, [22], *Die quadratischen Irrationalitäten und deren Entwickelungsmethoden*, Abh. zur Geschichte der Mathematik, IV. Heft, 1882. pag. 10: *"Der erste griechische Mathematiker,*

der, was keiner vor ihm gethan, mit irrationalen Grössen rechnen musste und sich nicht damit begnügen konnte, über dieselben zu spekulieren, war Archimedes."

105 Questo potrebbe essere il caso, per dare qualche esempio, delle approssimazioni delle radici quadrate in (158), (161) e (169).

106 Si vedano, ad esempio, gli studi di Hofmann[30], Hultsch [31], Heath [24] e Loria [38].

107 Si veda, ad esempio, l'introduzione alle opere complete di Archimede in Heath [24].

108 Per la ricostruzione del calcolo delle radici quadrate presso i Babilonesi, in particolare per l'approssimazione $\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a}$, si veda Fowler e Robson ([19], pag. 25).

109 Questa semplice osservazione non sembra essere esplicitata dagli autori dei lavori citati sopra.

110 Si dimostra che lo sviluppo in frazione continua di un numero irrazionale è periodico se, e solo se, il numero è un *irrazionale quadratico*, cioè un numero irrazionale che è radice di un polinomio di secondo grado a coefficienti razionali (*Teorema di Lagrange, 1770.* Si veda [33], pag.47).

111 Erone di Alessandria, del quale non si conoscono le date precise di nascita e morte, è vissuto verosimilmente attorno al I secolo dopo Cristo. L'opera *Metrica* è stata ritrovata nel 1896.

112 Erone nella sua opera *Metrica* enuncia e dimostra la formula dell'area di un triangolo in funzione dei lati, ma non ne rivendica la scoperta. Il grande scienziato persiano Al Biruni (vissuto tra i secoli X e XI d.C.) attribuisce il risultato allo stesso Archimede. Inoltre al-Biruni dimostra (senza peraltro attribuirsene la scoperta) l'analoga formula (nota oggi come *formula di Bramaghupta*) relativa al quadrilatero:

$$\text{AREA QUADRILATERO} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

(dove a, b, c, d sono i lati e $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ è il semiperimetro) affermando correttamente che la formula vale se i quadrilateri ciclici, cioè *inscrivibili in una circonferenza* (condizione quest'ultima che sembra sembra essere sfuggita agli Indiani; G. Lorìa [39], pag. 203).

113 Traduzione mia (F.L.).

114 Il testo di Erone dice (in modo un po' stringato) che per passare da $\alpha_1 = 26\,{}^1\!/_2\,{}^1\!/_3$ a un'approssimazione migliore α_2 si deve prendere, al posto di 729, il valore $720 + {}^1\!/_{36}$ e poi 'procedere nello stesso modo'. Interpretiamo così: nello stesso modo in cui si definisce $\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha_0 + \frac{720}{\alpha_0}\right)$ (a partire da $\alpha_0 = \sqrt{729}$), si dovrà definire $\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \frac{720}{\alpha_1}\right)$ (a partire da $\alpha_1 = \sqrt{720 + \frac{1}{36}}$). Si noti, però, che per calcolare α_1 (la media aritmetica di α_0 e $720/\alpha_0$), non occorre estrarre alcuna radice quadrata.

115 Esprimiano la questione nel linguaggio di oggi. Le due successioni reali monotòne e limitate β_n, α_n sono entrambe convergenti e, per la condizione (192), hanno lo *stesso* limite $\sqrt{d}$.

In altri termini, gli intervalli $[\beta_n, \alpha_n]$ costituiscono una *successione di intervalli compatti inscatolati*, di ampiezza tendente a zero per $n \to +\infty$, che *definisce* il numero $\sqrt{d}$.

116 Le approssimazioni

$$a + \frac{2ab}{4a^2 + b} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}} < \sqrt{a^2 + b} < a + \frac{b}{2a}$$

sono utilizzate da Gino Loria in [38] per ricostruire le TABELLE [28], pubblicate da J. Heiberg, contenenti numerosi valori approssimati di radici quadrate calcolate dai matematici greci.

A Tabelle di numeri

Riportiamo la corrispondenza tra lettere e numeri nella numerazione ionica (incluse le lettere arcaiche) e le scritture di tutti i numeri che compaiono nel testo della *Misura del Cerchio*. Per un approfondimento sulla numerazione (e sulle unità di misura) nel mondo greco, rimandiamo all'ottimo lavoro [17] di Heinrich F. Fleck.

α′	β′	γ′	δ′	ε′	ϛ′ (ϝ′)	ζ′	η′	ϑ′
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι′	κ′	λ′	μ′	ν′	ξ′	ο′	π′	ϟ′
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ′	σ′	τ′	υ′	φ′	χ′	ψ′	ω′	ϡ′
100	200	300	400	500	600	700	800	900
͵α	͵β	͵γ	͵δ	͵ε	͵ϛ	͵ζ	͵η	͵ϑ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
͵ι	͵κ	͵λ	͵μ	͵ν	͵ξ	͵ο	͵π	͵ϟ
10 000	20 000	30 000	40 000	50 000	60 000	70 000	80 000	90 000
͵ρ	͵σ	͵τ	͵υ	͵φ	͵χ	͵ψ	͵ω	͵ϡ
100 000	200 000	300 000	400 000	500 000	600 000	700 000	800 000	900 000

Tabella 2: Corrispondenza lettere-numeri nella numerazione ionica.

Lettere arcaiche	Nome	Valore numerico
ϟ	qoppa	90
ϡ	sampi	900
ϛ	stigma	6
ϝ	digamma	6

Tabella 2: Lettere arcaiche e loro valore numerico.

Proposizioni 1 e 2	
$\alpha' = 1$	$\zeta' = 7$
$\beta' = 2$	$\iota\alpha' = 11$
$\iota\delta' = 14$	$\kappa\beta' = 22$
$\kappa\alpha' = 21$	$\zeta' = \frac{1}{7}$

Tabella 3: Numeri che figurano nelle *Proposizioni* 1 e 2 della *Misura del Cerchio*.

τϛ′	$= 306$	͵αφξ′	$= 1560$
ρνγ′	$= 153$	͵βϡια′	$= 2911$
σξε′	$= 265$	͵γιγ′	$= 3013$
φοα′	$= 571$	͵γιγ′∠′	$= 3013\,\frac{1}{2}$
ρνγ′	$= 153$	͵γιγ′∠′ δ′	$= 3013\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$
$\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$͵ϑυν′	$= 349.450$	͵εϡκδ′	$= 5924$
$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$͵γυϑ′	$= 23.409$	͵εϡκδ′∠′	$= 5924\,\frac{1}{2}$
φϟα′	$= 591$	͵εϡκδ′∠′ δ′	$= 5924\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$
φϟα′ η′	$= 591\,\frac{1}{8}$	͵αωκγ′	$= 1823$
ρνγ′	$= 153$	σμ′	$= 240$
͵αρξβ′	$= 1162$	δ′	$= 4$
͵αρξβ′ η′	$= 1162\,\frac{1}{8}$	ιγ′	$= 13$
͵αροβ′	$= 1172$	͵αωλη′	$= 1838$
͵αροβ′ η′	$= 1172\,\frac{1}{8}$	͵αωλη′ ϑ′ια′	$= 1838\,\frac{9}{11}$
͵βτλδ′	$= 2334$	͵αζ′	$= 1007$
͵βτλδ′ δ′	$= 2334\,\frac{1}{4}$	ξϛ′	$= 66$
͵βτλϑ′ δ′	$= 2339$	ια′	$= 11$
͵βτλϑ′ δ′	$= 2339\,\frac{1}{4}$	μ′	$= 40$
͵δχογ′	$= 4673$	͵αϑ′	$= 1009$
͵δχογ′∠′	$= 4673\,\frac{1}{2}$	͵αϑ′ϛ′	$= 1009\,\frac{1}{6}$
μη′	$= 48$	ξϛ′	$= 66$
κδ′	$= 24$	͵βιϛ′	$= 2016$
ϟϛ′	$= 96$	͵βιϛ′ϛ′	$= 2016\,\frac{1}{6}$
͵δχογ′	$= 4673$	͵βιζ′	$= 2017$
͵δχογ′∠′	$= 4673\,\frac{1}{2}$	͵βιζ′ δ′	$= 2017\,\frac{1}{4}$
$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$͵δχπη′	$= 14.688$	͵ϛτλϛ′	$= 6336$
χξζ′	$= 667$	ι′	$= 10$
χξζ′∠′	$= 667\,\frac{1}{2}$	οα′	$= 71$
͵ατνα′	$= 1351$	γ′	$= 3$
ψπ′	$= 780$	οα′	$= 70$

Tabella 4: Numeri che figurano nella *Proposizione* 3 della *Misura del Cerchio*.

B L'alfabeto greco. Piccolo glossario.

L'alfabeto greco

Tabella 3: L'alfabeto greco

Lettere	**Nome**	**Lettere**	**Nome**	**Lettere**	**Nome**
A α	alpha	I ι	iota	P ρ	rho
B β	beta	K κ	kappa	Σ σ	sigma
Γ γ	gamma	Λ λ	lambda	T τ	tau
Δ δ	delta	M μ	mu	Υ υ	upsilon
E ϵ, ε	epsilon	N ν	nu	Φ ϕ, φ	phi
Z ζ	zeta	Ξ ξ	xi	X χ	chi
H η	eta	O o	omicron	Ψ ψ	psi
Θ θ, ϑ	theta	Π π	pi	Ω ω	omega

Piccolo glossario

Elenco delle abbreviazioni

agg. - aggettivo;
aor. - aoristo;
avv. - avverbio;
cong. - congiunzione;
ecc. - eccetera;
femm. - femminile;
fut. - futuro;
gen. - genitivo;
masch. - maschile;
mat. - termine matematico;
neu. - neutro;
part. - participio;
pass. - passivo;
prep. - preposizione;
pron. - pronome;
sing. - singolare;
sost. - sostantivo.
v. - verbo.

ἄγω, *(v.) fare; condurre, tracciare (una retta).*

ἀλλά, *(cong.) ma, per altro.*

ἄλογος -ον *(agg.) irrazionale.*

ἀμφότερος -α -ον, *ciascuno dei due, l'uno e l'altro.*

ἀναλογία, *(sost. mat.) proporzione (matematica).*

ἀνάπαλιν, *inversamente; invertendo.* ἀνάπαλιν λόγος, rapporto reciproco: $\frac{b}{a}$ è ἀνάπαλιν λόγος di $\frac{a}{b}$.

ἄνισος, *disuguale, diverso.* Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, [..], *Assegnate due grandezze disuguali*, [..].

ἀντί, *(prep. con il gen.) al posto di, invece di.*

ἀξίωμα, *(sost.) assioma; principio intuitivo* ἀξιώματα, *assiomi.*

ἀπαγωγή, *(sost.) riduzione.* (Ricondurre una proposizione a una proposizione precedente, o una proposizione a un assurdo.) ἡ εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγή, *riduzione all'assurdo.*

ἀπόδειξις -εως, ἡ, *(sost.) dimostrazione.*

ἄρα, *dunque.*

ἀριθμός, ὁ *(sost.) numero.*

ἀσύμμετρος -ον *(agg.) incommensurabile.*

ἄτοπον, *assurdo.* In modo letterale: *che non ha luogo.* Da τόπος, *spazio.*

αὐτός, -ή, -ό *(pron. e agg. dimostrativo) stesso.*

ἀφαιρέω, *togliere, sottrarre.* ἀφαιρεθῶ, *aor.cong.pass..* ἐὰν ἀφαιρεθῇ, *se viene sottratto* [...]. τὰ ἀφαιρούμενα, *ciò che è sottratto, le [parti] sottratte.* ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα, *in modo simile sarà dimostrato, se le [parti] sottratte sono le metà.*

βάσις, -εως, ἡ *base.* τῇ βάσει: *alla base, per base.*

βούλομαι, *(v.) volere, desiderare.*

γάρ, *(cong.) infatti.*

γίγνομαι, *(v.) risultare, accadere, aver luogo, ottenersi.* γιγνεται: *(mat.) si ottiene, risulta (in un calcolo).*

γωνία, ἡ *(sost.) angolo.*

γράφειν, *(v.) disegnare (una figura)*

γραμμή, ἡ *(sost.) linea, linea retta.* εὐθέῖα γραμμή, linea retta; segmento. καμπύλαι γραμμαὶ, *linee curve.* καμπύλαι πεπερασμέναι γραμμαὶ, *linee curve con* *punti estremi.* ἐν ἐπιπέδῳ γραμμαὶ, *(mat.) linee piane (su un piano).* Τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν κτλ., *tra tutte le linee aventi gli stessi [punti] estremi ecc.*.

δεῖ, *(v.) è necessario.*

δέικνυμι, *dimostro, mostro, spiego.*

δεῖξις -εως, ἡ, *(s.) dimostrazione.*

δέκα, *dieci.*

δειχθήσεται, *fut. pass. di* δέικνυμι: *sarà dimostrato.*

δή, *(cong.) così.*

διὰ τὰ αὐτὰ, *per lo stesso motivo, per le stesse ragioni (spiegate prima).* L'espressione introduce una conclusione logica, basandola su argomentazioni precedenti. Con lo stesso significato: κατὰ τὰ αὐτὰ.

διάμετρος, *(sost.) diametro.*

διαφορά, ἡ, *(sost.) differenza.*

διάφορον, τὸ, *(sost.) differenza.* ὥστε τὸ διάφορον μονάδος ἐστὶ μόριον λϛʹ, *pertanto la differenza rispetto all'unità è una parte [pari a]* 1/36.

διάφορος, ον, *differente, diverso.*

διαίρεσις -εως, ἡ *separazione, divisione.*

διπλασιάζω *(v.) raddoppio.*

δίχα, *in due, in due parti uguali.* δίξα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ΑΗ, *si divida in due parti uguali (l'angolo) BAG mediante AH.*

δυνάμει, (dativo di δύναμις: *potenza*). Come termine matematico: *quadrato.* Esempi. ΑΒ δυνάμει: *il quadrato di lato AB.* In una proporzione (ad esempio, *La Misura del Cerchio*, Prop. 3), se EH e $H\Gamma$ sono segmenti, l'espressione ΕΗ πρὸς ΗΓ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν.. significa: *I quadrati su* EH *e su* $H\Gamma$ *stanno tra loro come ... ecc.* Quando si vuole enfatizzare che si considera il rapporto tra due segmenti EH e $H\Gamma$, e non tra i loro quadrati, si usa talvolta l'espressione ΕΗ πρὸς ΗΓ μήκει λόγον ἔχει, ὃν.. , EH *sta a* $H\Gamma$ *in quanto lunghezze, come...ecc.* Qui μήκει (da μήκος, lunghezza) significa *in lunghezza, in estensione lineare.* Come termine non matematico, in particolare filosofico, δυνάμει significa: *virtualmente, in potenza.*

δυνατόν, *possibile.* Εἰ δυνατόν.., *se possibile...* (Modo per introdurre una dimostrazione per assurdo.)

δύο, *(numerale) due.*

ἕβδομος, η, ον *(agg. num.) settimo.* Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μέν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις: il perimetro di ogni cerchio è più che triplo del diametro e lo supera di meno della settima parte del diametro e più di $^{10}/_{71}$ (del diametro).

ἐγγίων -ον, *(agg. comp. e sup. di* ἐγγύς *) più vicino, il più vicino.*

ἐγγράφειν, *inscrivere.* ἐγγεγράφθω τὸ τετράγωνον: *si inscriva il quadrato.*

ἔγγιστα, *(avv.) molto vicino.* Superlativo dell'avverbio ἐγγύς, *vicino.*

ἐγγύς, *(avv.) vicino.*

εἰ, *se* (particella condizionale).

εἰμί, εἶναι *(v.) essere.*

Εἰλήφθω, *si prenda.* Εἰλήφθω κέντρον τό N: *si prenda (si consideri) il centro* N. (Dal verbo λαμβάνω, prendo.)

εἰρημένα, *part. da* ἐρέω, ἐρῶ(?), *dire, menzionare.* τὰ εἰρημένα σχήματα, *le figure ricordate, esaminate.*

ἑκάτερος, *ognuno dei due, l'uno e l'altro.*

ἔκκειμαι, *passivo di* ἐκτίθεμι, assegnare, esibire.

ἐκκειμένων, *participio, genitivo plurale* di ἔκκειμαι. Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, [..] Assegnate due grandezze disuguali, [..]

ἐλὰσσων, *minore, inferiore.*

ἐναλλάξ, *alternativamente, in posizione incrociata.* Come termine matematico, significa: 'permutando', 'proprietà del permutare' nelle proporzioni. La proporzione $a : b = c : d$ equivale, permutando i termini medi (permutando i termini estremi) alla proporzione $a : c = b : d$ (rispettivamente, $d : b = c : a$.)

ἐπεὶ, *dopo che, poiché.* (Congiunzione temporale e causale).

ἐπιζεύγνυμι, *(v.) congiungere, unire.* ἐισί τινες ... γραμμαὶ ..., αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν ευθειῶν ... ὅλαι ἐπί τὰ αὐτὰ εἴσιν, *ci sono delle linee curve* *che si trovano per intero dalla stessa parte dei segmenti che congiungono i loro estremi.*

ἐπίπεδος, -ον *(agg.) piatto, piano.* ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι πεπερασμέναι γραμμαὶ, *(mat.) linee curve piane con punti estremi.*

ἐπιφάνεια, ἡ, *(sost.) superficie.* Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια , *la superficie di ogni sfera.*

ἔτι, *ancora, inoltre.*

εὐθύς -εῖα -ύ *(agg.) retto, dritto.* εὐθέῖα γραμμή, linea retta; segmento. αἱ εὐθεῖαι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς γραμμῆς, *i segmenti cadono per intero dalla stessa parte della linea* (nella definizione di linea concava nella stessa direzione).

εὐθύγραμμον, *poligono.* Usato anche come aggettivo, significa: *rettilineo.* Per esempio, nella Definizione I.9 degli *Elementi* di Euclide un angolo viene definito rettilineo (ευθύγραμμον) se i suoi lati sono segmenti. (I greci consideravano anche angoli racchiusi da linee non rette, ma curve).

εὑρίσκω, *(v.) trovo.* εὑρήσομεν, troveremo. (La famosa esclamazione εὕρεκα significa: *ho trovato.*)

ἐφάπτεσθαι, *(v.) toccare, essere tangente.*

ἐφαπτομένη, *tangente.* τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων, si bisechino gli archi in due parti uguali e si mandino le tangenti nei punti (di suddivisione).

ἔχειν, *(v.) avere.* λόγον ἔχει, ha rapporto; ..μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ.., ha rapporto maggiore di.. .

ᾖ, verbo essere εἰμί , 3^a sing. congiuntivo. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα, *in modo simile sarà dimostrato, anche qualora le [parti] sottratte siano le metà.*

ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, *il raggio. La (parte di retta) dal centro.* Espressione con la quale i geometri greci denotavano il raggio di un cerchio. ἡ δὲ AB ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου, *AB è il raggio del cerchio.*

ἤτοι, *(avv.) veramente, certamente, proprio.* ..γραμμαὶ, αἳ ... ἤτοι ὅλαι ἐπί τὰ αὐτὰ εἴσιν, .. *linee che stanno proprio per intero dalla stessa parte..((mat.) definizione di convessità).*

ἡ ὑπὸ OAP, *l'angolo (di vertice A) individuato dalle semirette* AO, AP.

ἤδη, *(avv.) già, di già; inoltre.*

ἡμιόλιος, -α, -ον *(agg.) una volta e mezza rispetto a (con il gen.), nel rapporto di uno e mezzo a uno, (cioè, di tre mezzi).* Πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τόν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστὶ τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ μετὰ τῶν βάσεων ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. *Ogni cilindro avente come base il cerchio massimo della sfera e altezza uguale al diametro della sfera è una volta e mezza la sfera e anche la sua stessa superficie, con le basi, è una volta e mezza la superficie della sfera.*

ἥμισυ, *(sost. neu.) la metà.* πλέον ἥμισυ παντός *la metà è più dell'intero.*

ἥμισυς, *(agg.) metà, neu. pl.* ἡμίση *le metà*, ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα, *in modo simile sarà dimostrato, anche se le parti sottratte sono le metà.*

ἤπερ. Dopo un comparativo: *che, di.* ἡ AB πρὸς ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ γ′ πρὸς β′, AB ha rispetto a CD rapporto maggiore di 3 a 2.

ἤτοι, ἤ τοι *veramente, certamente.*

Ἰσογώνιον, *'equiangolo', con gli angoli uguali.* Nella *Misura del Cerchio* (Proposizione 3), il termine indica una *relazione* tra due triangoli: avere gli angoli a due a due uguali. Ἰσογώνιον τὸ AHΓ τῷ ΓHZ τριγώνῳ , *Il (triangolo) AHG ha gli angoli uguali (ordinatamente, a due a due) a quelli del (triangolo) GHZ.* Detto altrimenti, i due triangoli sono simili. Ma il termine ἰσογώνιον, *equiangolo*, oltre che una relazione tra un triangolo e un altro, può anche denotare la proprietà di un singolo triangolo (o poligono) di avere tutti gli angoli *uguali tra loro.* Ad esempio, πολίγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον è un poligono equilatero e equiangolo (un poligono regolare).

ἰσόπλευρον, *(agg.) equilatero.* πολύγωνον ἰσόπλευρον, *poligono equilatero.* πολίγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον è un poligono equilatero e equiangolo (un poligono regolare).

ἴσος, *uguale; equivalente, avente la stessa area.* Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ, *ogni cerchio è equivalente (ha la stessa estensione, la stessa area) di un triangolo.*

κάθετος, *perpendicolare.* Anche come aggettivo sostantivato: segmento perpendicolare a una retta data.

καλέω, *(v.) chiamo.* καλῶ (καλέσω), chiamerò. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμήν κτλ., chiamerò allora *concava dalla stessa parte* una linea tale che *ecc.*.

καμπύλος, -η, -ον, *(agg.) curvo.* καμπύλαι γραμμαὶ, linee curve.

καμπύλος, -η, -ον, *(agg.) curvo.* καμπύλαι γραμμαὶ, linee curve.

κἂν, *anche se,* crasi per καὶ ἄν.

καταλιμπάνω (καταλείπω) *lasciare, rimanere.* ἐὰν ἀπὸ το˜ τοῦ καταλειπομένου ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, se dalla [parte] restante si sottrae più della metà.

κείσθω, *(v.) si ponga* (voce del verbo κεῖμαι, essere posto).

κεῖμαι, *(v.) essere posto.* κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση πρὸς τῷ E ἡ ὑπὸ ΓEM, *si ponga uguale ad esso [l'angolo] GEM, [con vertice] in E.*

κέντρον, *centro.* ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, *il raggio. La (parte di retta) dal centro* era l'espressione con la quale i geometri greci denotavano il raggio di un cerchio. ἡ δὲ AB ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου, *AB è il raggio del cerchio.*

κοίλος, *(agg.) cavo, (agg. mat.) concavo.* Ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμήν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς γραμμῆς, κτλ., dico *concava dalla stessa parte* una tale linea, per la quale, presi comunque due punti su di essa, i segmenti di retta che li congiungono si trovino per intero dalla stessa parte della linea ecc..

κύκλος, *cerchio.* ὁ μέγιστος κύκλος, *il cerchio massimo (di una sfera).*

Κύκλου Μέτρησις, *Misura del Cerchio.*

κύλινδρος, *cilindro.*

κῶνος, *cono.*

λαμβάνω, *(v.) prendo, assumo.* λαμβάνο δὲ ταῦτα, assumo queste [le seguenti] (proprietà, defnizioni etc.). λαμβανόμενα, *(mat.)* assunzioni (o postulati). εἰλήφθω ἐπὶ τῆς *AB* τυχὸν σημεῖον τὸ Z, si prenda sulla retta *AB* un punto qualunque Z.

λαμβανόμενα, *(n.) asunzioni (postulati).* (Verbo λαμβάνω).

λέγω, *(v.) dico, affermo* (λέγειν, dire). λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν *dico che è uguale.* σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ κτλ. *si dicono grandezze commensurabili quelle ecc..*

λείπω, *(v.) lasciare, restare.*

λόγος, *(sost. mat.) rapporto.* λόγον ἔχει: ha rapporto. Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν... : Il cerchio ha rapporto rispetto al quadrato costruito sul diametro, come..(eccetera). ἔχειν λόγον ἐλάσσονα, (μείζονα): avere rapporto minore (maggiore). ἐν τῷ αὐτ˜ λόγῳ, nello stesso rapporto.

λοιπός, ή, όν, *restante, rimanente.* (Da λείπω, *lasciare.*)

μᾶλλον, *più, di più.* (Comparativo dell'avverbio μάλα, *molto.*)

μέγεθος, *grandezza.* (Anche come termine matematico.) Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων.., *Assegnate due grandezze disuguali ecc.* .

μέιζων, μέιζον, *maggiore, più grande.* (Comparativo di μέγας; gen. μείζονος) ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, se si sottrae dalla maggiore una [parte] maggiore della metà. ἡ ΓΕ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ φοα′ πρὸς ρνγ′, GE ha rapporto rispetto a GH maggiore di 571 a 153.

μέρος -ους, *(sost.) parte.*

μερίζω, *(v.) dividere.* μέρισον τὰς ψκ′ εἰς τὸν κζ′, si divida 720 per 27.

μεταξύ, *(avv. di luogo o di tempo) nel mezzo, nel frattempo.*

μέτρησις, *misura.*

μήκει, *in estensione lineare, in lunghezza.* (Termine matematico.) Da μήκος, lunghezza. ΕΗ πρὸς ΗΓ μήκει λόγον ἔχει, ὃν.. , *EH sta a H*Γ *in quanto lunghezze, come...* eccetera.

μήκος, *lunghezza.*

μία, *una.* (Femminile di εἷς.) Dativo: μιᾷ. μία τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, *uno dei lati attorno all'angolo retto, uno dei cateti (di un triangolo rettangolo).*

μονάς -άδος, ἡ *unità.*

μόριον, τό, *parte, pezzo.*

ὅλος [-η, -ον], *(agg.) tutto, intero.*

ὅμοιος [-α, -ον], *(agg.) simile, somigliante.*

ὁμοίως, (*avv. di* ὅμοιος) *similmente, in modo simile.* ὁμοίως δὲ δειχθήσεται [..] *in modo simile si dimostra* [..].

ὅπερ, ὅσπερ *proprio quello che, come.* ὅπερ ἄτοπον, *il che è impossibile; il che è assurdo; questo non può succedere.* ὅπερ ἔδει δεῖξαι, come si doveva dimostrare. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, come si doveva fare.

ὀρθογώνιον, *(agg. mat.) ad angolo retto, rettangolo.* τρίγωνον ὀρθογώνιον, *triangolo rettangolo.*

ὀρθός [-ή, -όν], *(agg. mat.) retto (riferito a un angolo).* ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΓΑΒ: *l'angolo* Γ*AB è retto.*

ὀρθότης, ἡ, *(sost.) precisione, correttezza, esattezza, rettitudine.*

οὗ, *dove.* Genitivo dei pronomi personali ὅς, ὅν.

οὖν, *infatti, certamente.*

οὐδείς, *nessuno.* οὐδενός, gen. *di nessuno.*

οὗτος, αὕτη, τοῦτω, *(pron. dimostrativo) questo.* διὰ ταῦτα, *per questo, perciò.*

οὕτως, *(avverbio di* οὗτος*) in questo modo, così, come.* Nelle proporzioni: ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, A sta a B, come Γ sta a Δ.

πᾶς, *tutto, ogni.* πᾶς κύκλος, *ogni cerchio.* ὁ πᾶς ἀριθμός, *ogni numero.*

πέρας, ατος, *(n.) limite, confine, (mat.) estremo, bordo.* γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα, gli estremi di una linea sono punti. εἰσί τινες ... γραμμαὶ ..., αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν ευθειῶν ... ὅλαι ἐπί τὰ αὐτὰ εἰσιν,, *ci sono delle linee curve che si trovano per intero dalla stessa parte dei segmenti che congiungono le loro estremi.* (Definizione di Archimede delle curve con la concavità tutta da una stessa parte, contenuta nel trattato *Sulla sfera e sul cilindro.*)

πέρατα, *(sost. mat.) estremi (punti estremi).* Plurale di πέρας.

περιγεγραμμένον, *circoscritto.*

περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον, *poligono circoscritto.*

περιγράφειν, *circoscrivere.*

περίμετρος, *perimetro.*

περίμετρος τοῦ κύκλου, *perimetro del cerchio; la circonferenza.*

περιφέρεια, *(sost.) circonferenza, 'periferìa del cerchio'.* Nel 1706 il matematico gallese William Jones utilizzò la lettera greca π, iniziale di περιφέρεια (e di περίμετρος), per denotare il rapporto tra circonferenza e diametro di un cerchio.

περιφέρειαι, *(sost. plurale) archi di circonferenza.*

πίπτω, *(v.) cadere.*

πλευρά, *(sost. mat.) (1) lato. (2) Radice quadrata.* ὁ ψκθʹ πλευράν ἕξει τὸν κζʹ: 729 ha come radice quadrata 27.

πολύγωνον, *(sost. mat.) poligono.*

πόρισμα, *(sost. mat.) corollario.*

πρὸς, *(prep.) riguardo a, rispetto a.* (*mat.*) Nelle proporzioni, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ: A sta a B, come C sta a D. ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ, il rapporto di AB a CD.

προστίθεμι, *(v.) aggiungere, sommare.* πρόσθες, *(aor. imp.) aggiungi.* πρόσθες τὰς κζ′, aggiungi 27.

προ-υπάρχω, *(v.) esistere prima, pre-esistere.* τὰ συμπτώματα προ-υπῆρχεν , *le proprietà pre-esistevano.*

συμμετρία, *(sost.) simmetria (a) Misurazione, misura, metodo per determinare l'area o il volume di una figura. (b) Commensurabilità (proprietà di due grandezze di essere commensurabili).*

σύμμετρος, *(agg.) commensurabile.* σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, *grandezze commensurabili si chiamano quelle che sono misurate* [con numeri interi] *dalla stessa* [unità di] *misura,* Euclide, *Elementi*, Libro X.

σύμπτωμα, *(sost.)* proprietà; pl. συμπτώματα.

συναμφότερος, συναμφότεροι, *ambedue insieme.* συναμφότερος ἡ ΖΕ, ΕΓ, *la somma* ΖΕ + ΕΓ. συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ significa:
(ΒΑ + ΑΓ): ΒΓ = ΑΗ: ΗΓ.

σύνεγγυς, *(avv.) vicino.* συνεγγίζων, più vicino. ὁ συνεγγίζων τῷ ψκ′ τετραγωνός ἐστιν ὁ ψκθ′, il quadrato più vicino a 720 è 729.

συνθέντι, (σύνθεσις λόγου). *(mat.) 'componendo'.* Applicare la 'proprietà del comporre' in una proporzione. 'Componendo' (συνθέντι; letteralmente: per uno che ha composto), dalla proporzione $a : b = c : d$ seguono le proporzioni: $(a + b) : b = (c + d) : d$ e $(a + b) : a = (c + d) : c$.

σφαῖρα, *(sost.) sfera.* Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ κτλ. *la superficie di ogni sfera è quadrupla ecc. .* Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος κτλ. *ogni sfera è quadrupla di un cono avente base ecc. .*

σχῆμα -ατος, τό, *(sost.) figura, forma.* Nel testo di Archimede questo termine, senza altra specificazione, denota in generale una figura il cui contorno contenga (almeno) un arco. Per denotare una figura il cui bordo è costituito solo da segmenti rettilinei, si può specificare: εὐθύγραμμον σχῆμα, *figura rettilinea.* τούτων τῶν σχημάτων ἐστὶν συμμετρία, *tra queste figure c'è simmetria (commensurabilità).*

τέτμηται, *è tagliato.* Perfetto passivo di τέμνω (tagliare). ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τέτμηται τετράκις δίχα, *l'angolo ZEG è stato diviso quattro volte in due parti uguali.*

τετράγωνον, *quadrato.* τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον, anche abbreviato in: τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ, *il quadrato su AB.*

τετράκις, *quattro volte.*

τετραπλάσιος, α, ον *(agg.) quadruplo, quattro volte tanto.*

τμῆμα, *segmento; sezione.* (Da τέμνω, *tagliare.*) τμῆμα κύκλου, *(mat.) segmento di cerchio, segmento circolare* (parte di cerchio compresa tra un arco e la corda che lo sottende).

τρίγωνος -ον, *(agg.) triangolare.*

τρίγωνον, *triangolo.* τρίγωνον ὀρθογώνιον, *triangolo rettangolo.*

τριπλάσιος, *triplo, grande tre volte tanto.*

τριπλασίων, *più che triplo.* Comparativo di τριπλάσιος. La forma τριπλασίων viene utilizzata nel testo anche per denotare semplicemente *triplo.*

τρίτος, η, ον, *terzo.* τρίτα δύο, *due terzi.*

ὑπόκειμαι, *essere assunto come ipotesi. Essere fondamento; essere supposto, essere stabilito.*

ὑπερέχω, *(v.) superare, sopravanzare.*

ὑπεροχῆ, (*sost. femm.*) *la parte eccedente, l'eccedenza; la differenza.*

ὑπὸ, *(prep.) giù, al di sotto.* ἡ ὑπὸ ΖΕΓ (*mat.*): *l'angolo* $\angle ZE\Gamma$.

ὑπόκειμαι, *essere assunto come ipotesi. Essere fondamento; essere supposto, essere stabilito.*

ὑπόκειται, *supposto.* ὡς ὑπόκειται, *come supposto, come stabilito.*

φύσις, *(sost.) natura.* φύσει, *per natura.*

χαίρειν, (χαίρω) *rallegrati, salve (forma di saluto).* χαῖρε, *salve.*

ὥστε, *di conseguenza, perciò, pertanto.* ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι′ οα′, *e di conseguenza il (perimetro del) cerchio è più del triplo e 10/71 (del diametro).*

C Elenco dei passi riportati in greco

- Archimede, *Sulla Sfera e sul Cilindro* I, (Superficie e volume della sfera), pag. 17
- Archimede, *Sulla Sfera e sul Cilindro* I, (Rapporto tra cilindro e sfera), pag. 19
- Archimede, *Sulla Sfera e sul Cilindro* I, (Lettera a Dositeo), pag. 20
- Archimede, *La Misura del cerchio*, pag. 21
- Euclide, *Elementi*, *Libro* X, *Proposizione 1*, pag. 33
- Archimede, *Sulla Sfera e sul Cilindro* I, (*Definizioni*), pag. 46
- Archimede, *Sulla Sfera e sul Cilindro* I, (*Postulati*), pag. 46
- Erone, *Metrica*, (Calcolo delle radici quadrate, Metodo di Erone), pag. 90

Riferimenti bibliografici

[1] Marco Andreatta, *Archimede, l'arte della misura,* Il Mulino, 2021.

[2] *Archimède, Œuvres, Tome I: De la sphère et du cylindre - La mesure du cercle - Sur les conoïdes et les sphéroïdes. Texte établi et traduit par Charles Mugler,* XXX + 488 pages, Les Belles Lettres, Paris, 1970.

[3] *Archimède, Œuvres, Tome IV : Commentaires d'Eutocius - Fragments. Texte établi et traduit par Charles Mugler,* 213 pages, Les Belles Lettres, Paris, 2002.

[4] N.M. Beskin, *Fascinating Fractions*, Mir Publishers, Moscow, 1986.

https://archive.org/

[5] F. Borceux, *An Axiomatic Approach to Geometry. Geometric Trilogy I.*, Springer, 2014.

[6] C. Brezinski, *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer-Verlag, 1980.

[7] E.M. Bruins, *Square roots in Babylonian and Greek mathematics*, Indagationes Mathematicae, 10, 1948, 121-130.

https://www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00018496.pdf

[8] Glen Van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry Princeton,* Oxford: Princeton University Press, 2009.

[9] Stefano Buscherini, Antonio Panaino, *The Table of Chords and Greek Trigonometry,* Conservation Science in Cultural Heritage, Vol. 10 (2010).

https://doi.org/10.6092/issn.1973-9494/v10-n1-2010

[10] A. Day Bradley, *Al-Biruni's Table of Chords*, The Mathematics Teacher, Vol. 63, No. 7 (November 1970), pp. 615-617.

http://www.jstor.org/stable/27958463

[11] E. J. Dijksterhuis, *Archimedes,* Princeton University Press, 1987. (Prima edizione 1956. Edizione italiana: Ponte alle Grazie, 1989.)

[12] Yvonne Dold-Samplonius, *Archimedes: Einander berührende Kreise*, Sudhoffs Archiv, Bd. 57, H. 1 (1973).

https://www.jstor.org/stable/20776141

[13] Maria Drakaki, *From the theory of the broken chord to the beginnings of trigonometry,* Department of Mathematics and Applied Mathematics University of Crete.

https://www.uni-miskolc.hu/~matsefi/HMTM_2020/papers/HMTM_2020_Drakaki_Broken_chord.pdf

[14] Euclide, *Tutte le Opere,* a cura di Fabio Acerbi, testo greco a fronte, Bompiani, 2007.

[15] Gaetano Fichera, *Rigore e profondità nella concezione di Archimede della matematica quantitativa,* in: *Archimede. Mito, Tradizione, Scienza,* Siracusa, Catania, 9-12 ottobre 1989, (a cura di Corrado Dolio), Leo S. Olschki, 1989, Firenze.

[16] Richard Fitzpatrick, *Euclid's Elements of Geometry*, The Greek text of J. L. Heiberg. edited and provided with a new English translation, ISBN 978-0-6151-7984-1, Revised and corrected - 2008.

https://farside.ph.utexas.edu/books/Euclid/Elements.pdf

[17] Heinrich F. Fleck, *Archimede - Arenario,* Ἀρχιμήδης Ψαμμίτης, *Versione italiana commentata con testo greco a fronte, uno studio su Archimede, note sulla numerazione attica e ionica e sulle unità di misure in area greca,* Quaderni di Scienze Umane e Filosofia Naturale - 2, 1, Gennaio MMXVI.

http://www.heinrichfleck.net/quaderni/quaderni.html

[18] Fowler D., *The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction,* Oxford University Press, 1999.

[19] Fowler D. e Robson E., *Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context*, Historia Mathematica 25.4 (1998): 366-378.

http://www.sciencedirect.com/science/article/

[20] A. Frajese (a cura di), *Opere di Archimede*, UTET, Classici della Scienza, 1988.

[21] Mario Geymonat, *Il grande Archimede. Con scritti di Z. Alferov, L. Canfora, P. Odifreddi.*, Sandro Teti Editore, IV Edizione, 2012.

[22] S. Günther, *Die quadratischen Irrationalitäten und deren Entwickelungsmethoden*, Abh. zur Gesch. der Mathematik, IV. Heft, 1882.

https://archive.org/details/acd4263.0002.001.umich.edu/

[23] Joseph Gutenäcker, *Kreis-messung des Archimedes von Syrakus*, Etlinger, 1828.

https://books.google.it/books?id=Xt5FAQAAMAAJ

[24] T. L. Heath (ed.), *The Works of Archimedes*, Dover, 2002.

https://archive.org/details/worksofarchimede029517mbp//

[25] T. L. Heath, *A history og Greek mathematics,* vol.2, Dover 2001.

https://archive.org/details/historyofgreekma029268mbp/

[26] Heiberg, Johan Ludwig, *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii*, Teubner, Lipsia, 1880; Seconda Edizione, a cura di E. Stamatis, Editio stereotypa anni MCMX, Teubner, 1910; Stoccarda, De Gruyter, vol. I, 1972.

https://www.wilbourhall.org/index.html#archimedes

[27] Heiberg J. L., Menge H., *Euclidis Opera Omnia*, Teubner, Lipsia, 1886.

[28] Heiberg J., *Byzantinische Analekte*, Abh. zur Gesch. der Mathematik, ix Heft, 1899, pag. 164. https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ACD4263.0003.001?rgn=main;view=fulltext

[29] Héron d'Alexandrie, *Metrica*, introduction, texte critique, traduction française et notes de commentaire par Fabio Acerbi et Bernard Vitrac, 2014, pp. 712. MATHEMATICA GRAECA ANTIQUA 4. Fabrizio Serra editore, Pisa, Roma.

[30] Jos. E. Hofmann, *Über die Annäherung von Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 43 (1934) 187-210.

http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PID=GDZPPN002130491

[31] F. Hultsch, *Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes*, Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften, N.10, 1893, pag. 368–428.

https://archive.org/details/nachrichtenvond65gtgoog/

[32] IREM (Autori vari), Histoire des mathématiques, Cercle d'Histoire de Sciences, *Aux origines du calcul infinitésimal*, Ellipses, 1999.

[33] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, Phoenix Books, The University of Chicago Press, 1964.

https://archive.org/details/khinchin-continued-fractions/

[34] Wilbur R. Knorr Archimedes, *Archimedes and the Measurement of the Circle: A New Interpretation*, Archive for History of Exact Sciences, 15, 1976, 115–140

http://www.jstor.org/stable/41133444

[35] Wilbur R. Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, pagg. 852, Birkhäuser, Boston, 1989.

[36] Wilbur R. Knorr, *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Dover Publications, 1986.

[37] Gino Lorìa, *Le scienze esatte nell'antica Grecia,* Cisalpino-Goliardica, Milano, 1987.

[38] Gino Lorìa, *Intorno ai metodi usati dagli antichi greci per estrarre le radici quadrate*, International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912, p.518–525.

https://www.mathunion.org/icm/proceedings

[39] Gino Lorìa, *Storia delle Matematiche,* Cisalpino-Goliardica, Milano, 1982 (ristampa di: Ulrico Hoepli, 1950).

[40] Charles Mugler, *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs*, Librairie C. Klincksieck, 1958.

[41] Pappus D'Alexandrie, *La Collection mathématique,* Œuvre traduite pour la première fois du Grec en Français, avec une Introduction et des Notes, par Paul Ver Eecke, Desclée, de Brouwer, Paris, 1933.

https://arxiv.org/

[42] David Richeson, *Circular reasoning: who first proved that C/d is a constant?,* The College Mathematics Journal, vol. 46, no. 3, 2015, pp. 162–71.

https://doi.org/10.4169/college.math.j.46.3.162

[43] David Richeson, *Tales of Impossibility: The 2000-Year Quest to Solve the Mathematical Problems of Antiquity,* 2019, Princeton University Press.

[44] Roshdi Rashed (Ed.), *Tābit ibn Qurrah. Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, edited by Roshdi Rashed, de Gruyter, 2009.

[45] Enrico Rufini, *Il "Metodo" di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità,* Roma, A. Stock, 1926 (Feltrinelli, 1961).

https://archive.org/details/rufini-metodo-di-archimede

[46] Enrico Rufini, *Gli studi geometrici di Eudosso da Cnido,* 1921.

https://doi.org/10.1484/j.arch.3.57

[47] Lucio Russo, *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna.* Seconda edizione, Feltrinelli, 2021 (Prima edizione, Feltrinelli, 1996).

[48] Lucio Russo, *Archimede. Un grande scienziato antico.* Carocci editore, Roma, 2019.

[49] Carl Schoy, *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abu'l-Raihân Muh. Ibn Ahmad al-Bîrûnî dargestellt nach Al-Qanūn al-Masūdi von Carl Schoy.* Hannover, 1927. Contiene, come Appendice ai capitoli I e IV, anche la traduzione in tedesco del testo di Tābit ibn Qurra sulla costruzione del lato dell'ettagono regolare, basato su un lavoro (non pervenutoci) di Archimede.

https://www.jphogendijk.nl/arabsci/Schoy-TL-74-91.pdf

[50] Heinrich Suter, *Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abu'l-Raihān Muhammed al-Birūni.* Übersetzt und Kommentar versehen von Heinrich Suter, *Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*, Teubner, Leipzig 1910-1911.

https://www.jphogendijk.nl/biruni/Suter-Chords.pdf

[51] Ivor Thomas, *Greek Mathematical Works*, Vol.I, The Loeb Classical Library, William Heinemann LTD, London, 1939.

https://archive.org/details/in.gov.ignca.915/

[52] Ivor Thomas, *Greek Mathematical Works*, Vol.II, The Loeb Classical Library, William Heinemann LTD, London, 1941.

https://archive.org/details/in.gov.ignca.916/

[53] John G. Thompson, *Archimedes and Continued Fractions*, *Mathematical Medley Digitized Archive*, Volume 15 (1987).

https://sms.math.nus.edu.sg/index.php/volume-15-1987/

[54] Otto Toeplitz, *The Calculus: A Genetic Approach*, Chicago, University of Chicago Press, 2007 (Prima edizione tedesca: 1949).

[55] G. J. Toomer, *The Chord Table of Hipparchus and the Early History of Greek Trigonometry,* Centaurus, 18(1), 6–28, 1974.

[56] J. Tropfke, *Die Siebeneckabhandlung des Archimedes*, Osiris, Vol. 1 (January, 1936), pp. 636-651.

http://www.jstor.org/stable/301629

Indice Analitico

Al-Birūni, 69, 128
Apollonio, 127
Approssimazioni
di π dal basso, 60
di π dall'alto, 52
di $\sqrt{2}$, 98
di $\sqrt{3}$, 78
di radici quadrate, 78
babilonesi, 76, 129
con frazioni continue, 84

Concava, 45
concava
linea, 45
Convergente
di una frazione continua, 85
Convessità, 45

Erone, 90, 129
Metrica, 90
formula di, 90
metodo di, 90
Eudosso di Cnido, 9, 99
Eudosso-Archimede
proprietà di, 33

Formule
di addizione, 72
di bisezione, 64
di duplicazione, 64
di sottrazione, 72
Frazione continua, 84
convergente r-esima, 85
sviluppo di $\sqrt{3}$, 86

Ipazia, 1, 99

Media
aritmetica, 92
armonica, 92
disuguaglianze tra medie, 92
geometrica, 92

Metodo di Erone, 90
interpretazione geometrica, 95
Metodo di esaustione, 9

π
definizione, 11
stime, 12

Quadratura
aritmetica del cerchio, 10
con riga e compasso, 10
impossibile, 101

Radici quadrate
approssimazioni babilonesi, 76
approssimazioni dal basso e dall'alto, 73
metodo di Erone, 90
Rettificazione
della circonferenza, 101
equivalente a quadratura, 101

Sfera
rapporto sfera cilindro, 19
superficie della sfera, 18
volume della sfera, 18
Sulla Sfera e il Cilindro, 17

Tābit ibn Qurra, 67, 127
Teorema
della bisettrice, 113
della corda spezzata, 69
Tolomeo, 127
Almagesto, 127
trascendente
π, 101
Trigonometria
addizione, 72
bisezione, 64
duplicazione, 64
radici della, 64
sottrazione, 72