A.A 2021-22 – Analisi e Geometria 1
Esercitazione 2. (Preparazione per la seconda prova e l'appello)

1. Calcolare $\int_C ds$ per la curva
$$C(t) = \left(t-1, 1-t^2, 2+\frac{2}{3}t^3\right), \qquad t \in [0,1] \tag{1}$$
Cioè, calcolare la lunghezza della curva C.

2. Le due rette
$$r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 3+3t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2 \\ z = 6+3t \end{cases}$$
$t \in \mathbb{R}$, sono incidenti? Sono parallele? Sono ortogonali?

3. Sia C l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio a contenuta nel primo quadrante del piano $\mathbb{R}^2$. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_C f(x,y)\,ds$, dove $f(x,y) = xy$.

4. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_C f$ dove C è la curva nello spazio $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da
$$C(t) = \left(4, t, -\frac{t^2}{2}\right) \qquad t \in [0,1]$$
e $f = f(x,y,z) = \frac{y}{1-2z}$

5. Poniamo
$$F(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2}\,dt$$
Calcolare $\frac{d}{dx}F(x)$. Stabilire se F ha un punto di massimo in $x_0 = 0$.

6. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+x}{(2+x^3)(x^\alpha)}\,dx$$

7. Stabilire se è convergente la serie
$$\sum \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n!}$$

8. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente la serie
$$\sum \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{(n!)^\alpha}$$

9. La funzione
$$F(x) = \int_0^x e^{|t|}\,dt$$
è derivabile in $x_0 = 0$?

10. Calcolare l'integrale definito
$$\int_0^1 \arctan(x)\,dx$$

11. La funzione $\quad F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t^{10}}{(1+t^2)^6}\,dt \quad$ ha un asintoto orizzontale a $+\infty$?

12. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\sin x}$$
vale zero.

13. Disegnare:
$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \ 2 \le |z| \le 3 \ \text{ e } \ \frac{\pi}{3} \le \operatorname{Arg}(z) \le \frac{\pi}{2} \right\}, \qquad B = \{ z \in \mathbb{C} \mid \ \overline{z} \in A \}$$

14. Poniamo $z = e^{(4+i)}$. $\quad |z| = 1$? $\quad \operatorname{Arg}(z) = \pi/2$? (Ricordare che, per $x, y \in \mathbb{R}$, $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ e $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$.)

15. L'affermazione '*In* $\mathbb{R}$ *ogni successione convergente è limitata*' è vera?

16. L'affermazione '*In* $\mathbb{R}$ *ogni successione limitata è convergente*' è vera?

17. L'affermazione '*In* $\mathbb{R}$*, se una successione* a_n *tende a* 0*, allora* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ ' è vera?

18. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin 2x}$$

19. Calcolare
$$\lim_{x\to +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$$

Esercizi 'carta e penna'

1. Poniamo $f(x) = \log x - \arctan(x-1), \quad x \in (0, +\infty)$. Determinare: (a) gli eventuali punti di massimo o di minimo locale; (b) eventuali asintoti; (c) il polinomio di Taylor del secondo ordine in $x_0 = 1$; (d) un grafico qualitativo; (e) il numero degli zeri.

2. Enunciare dimostrare il teorema del valore medio di Lagrange.

3. Enunciare e dimostrare il criterio della radice (di Cauchy) per la convergenza di una serie numerica.