Introduzione ai limiti

- Definizione di limite (finito). Legame con la continuità.
- Teoremi.
- Esempi importanti
- Simboli di o-piccolo e $\sim$ (asintotico).

(Versione: 09/2022)

Punto di accumulazione di un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$

Definizione (Punto di accumulazione)

Un numero $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice un punto di accumulazione di un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$ se esiste una successione (a_n) in D tale che $a_n \to c$ e $a_n \neq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Un punto di accumulazione di D può appartenere a D, oppure no.

Esempi

(1) $x_0 = 0$ è punto di accumulazione di $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(2) $x_0 = 1$ è punto di accumulazione di $D = [0, 1]$.
(3) $x_0 = 3$ non è punto di accumulazione di $D = [0, 1]$.

Definizione di limite (finito). Prima versione.

Definizione (Limite finito. Prima versione.)

Siano: $D \subset \mathbb{R}$; x_0 *un punto di accumulazione di* D; $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione;* $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

significa:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(1) $0 < |x - x_0|$ equivale a $x \neq x_0$. Quindi, nella definizione del limite, non interessa nulla se f sia definita in x_0 e, nel caso lo sia, quale sia il valore $f(x_0)$.
(2) (Unicità del limite). Non è detto che il limite esista. Però (come nel caso delle successioni, e con con analoga dimostrazione) non possono esistere due limiti distinti.

Funzione continua in un punto (Seconda definizione)

Fissiamo le notazioni:
$D \subset \mathbb{R}$; $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$; $x_0 \in D$; x_0 punto di accumulazione per D.

Definizione (Funzione continua in un punto)

Siano $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$. f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teorema del confronto

La dimostrazione di questo teorema è molto semplice (e la omettiamo):

Teorema (del confronto)

Siano: $D \subset \mathbb{R}$; f, g, h *tre funzioni* $D \longrightarrow \mathbb{R}$; x_0 *un punto di accumulazione di* D. *Se*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in D,\ x \neq x_0$$

e se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L = \lim_{x \to x_0} h(x)$, *allora* $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$.

Un limite fondamentale

Problema geometrico fondamentale

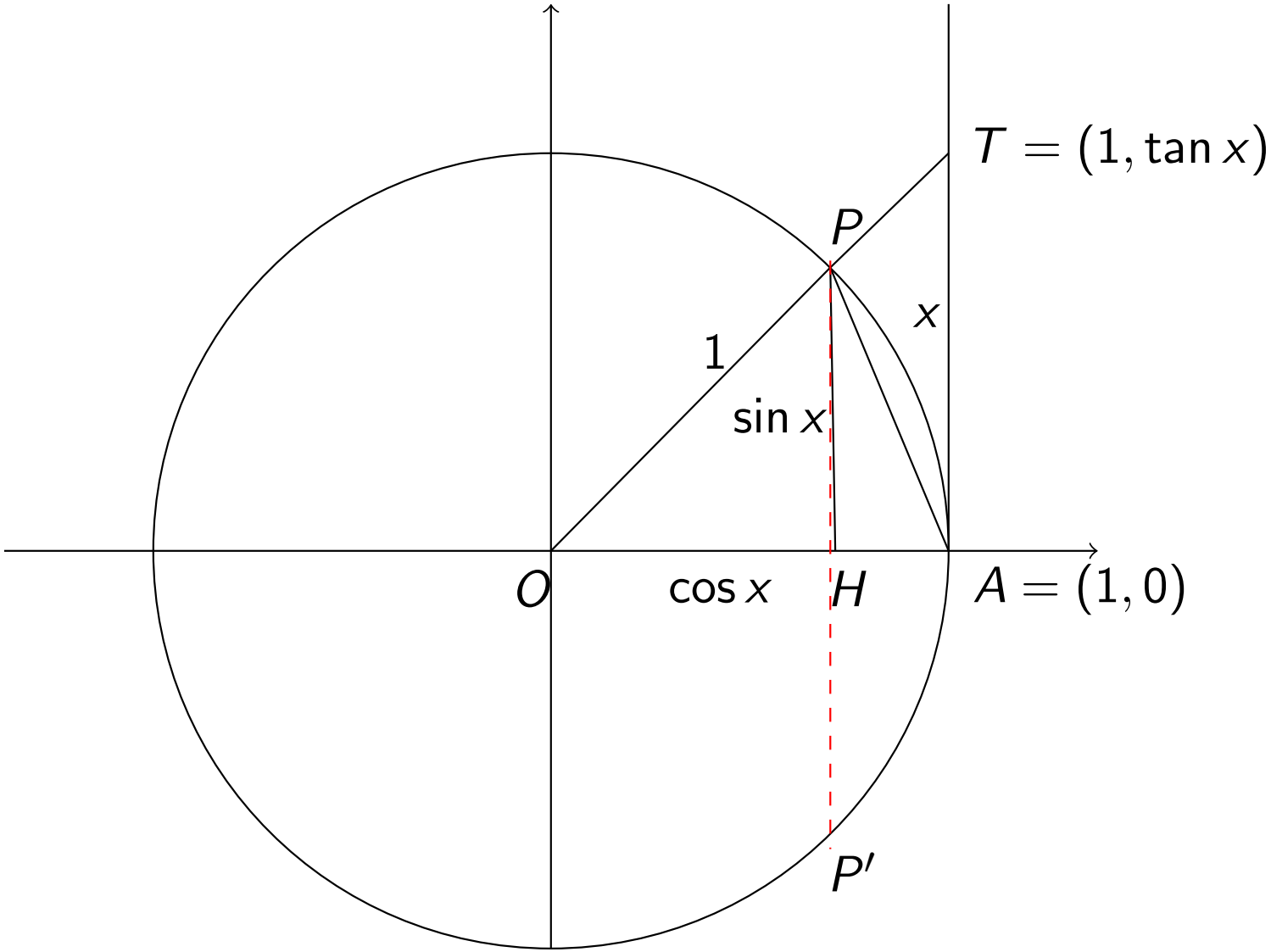
Quando l'angolo al centro di una circonferenza tende a zero, a cosa tende il rapporto tra la lunghezza della corda e la lunghezza dell'arco sotteso?

Versione analitica: Un limite notevole

Quando si misurano gli angoli in radianti,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(Con riferimento alla figura della slide successiva, il rapporto tra la corda PP' e l'arco piccolo PP' è uguale a $\frac{2 \sin x}{2x}$.)



$x =$ misura in radianti di $\angle AOP$
$\quad =$ lunghezza dell'arco AP

Dimostrazione.

Poiché la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari, basta considerare il caso $x > 0$.
Valgono le disuguaglianze ($\mathcal{A}$ significa: area):

$$\mathcal{A}(\text{triangolo } OAP) \ < \ \mathcal{A}(\text{settore circolare } OAP) \ < \ \mathcal{A}(\text{triangolo } OAT)$$

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

Moltiplicando per il numero (positivo) $2/\sin x$, si ottiene

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Quindi

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Per $x \to 0$, per il teorema del confronto e la continuità di cos in 0, si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Altri tipi di limiti

Definizione (Limite $+\infty$ per $x \to +\infty$)

Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. *Allora:*

(1)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

significa:

$$(\forall M > 0)(\exists K > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > K \implies f(x) > M$$

(2)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

significa:

$$(\forall \varepsilon > 0))(\exists K > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > K \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Esempi di limiti (che dimostreremo più avanti)

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\beta}{e^x} = 0$

Più in generale:

per ogni $\beta > 0$.

Simbolo o-piccolo

Notazioni: f e g funzioni definite in un intorno bucato U di x_0 e diverse da zero in ogni $x \in U$.

Definizione

Si dice che $f(x)$ è o-piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$, e si scrive

$$f(x) = o(g(x)), \ \textit{per } x \to x_0 \tag{1}$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{2}$$

(In questa definizione, x_0 può anche essere $+\infty$ o $-\infty$.)

Esempi di uso di o-piccolo

Esempi

1. $1 - \cos x = o(x)$, *per* $x \to 0$.
   $1 - \cos x$ *è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a* x, *per* $x \to 0$.
2. $1 - \cos x = o(\sin x)$, *per* $x \to 0$.
   $1 - \cos x$ *è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a* $\sin x$, *per* $x \to 0$.
3. $x^4 = o(e^x)$, *per* $x \to +\infty$.
   x^4 *è un infinito di ordine inferiore rispetto a* e^x, *per* $x \to +\infty$.
4. *Affermare che* $f(x)$ *è* $o(1)$ *per per* $x \to x_0$ *equivale a dire che* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0$, *cioè che* $f(x)$ *è infinitesima per* $x \to x_0$.

Relazione di equivalenza asintotica

Notazioni: Consideriamo funzioni $f(x), g(x)$ che, in un opportuno intorno bucato di x_0, non si annullino mai (in modo da poter dividere per $f(x)$ o per $g(x)$ senza problemi).

Definizione

Si dice che la funzione $f(x)$ è asintoticamente equivalente alla funzione $g(x)$ per $x \to x_0$, e si scrive

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0 \tag{3}$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{4}$$

Esempi di relazioni asintotiche

Esempi

1. $\sin x \sim x$, *per* $x \to 0$.
2. $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, *per* $x \to 0$.
3. $\arctan x \sim \pi/2$, *per* $x \to +\infty$.
4. $(x + x^3 + x^4) \sim x^4$, *per* $x \to +\infty$.
5. $(x + x^3 + x^4) \sim x$, *per* $x \to 0$.

Diversi modi di scrivere l'equivalenza asintotica

Esercizio

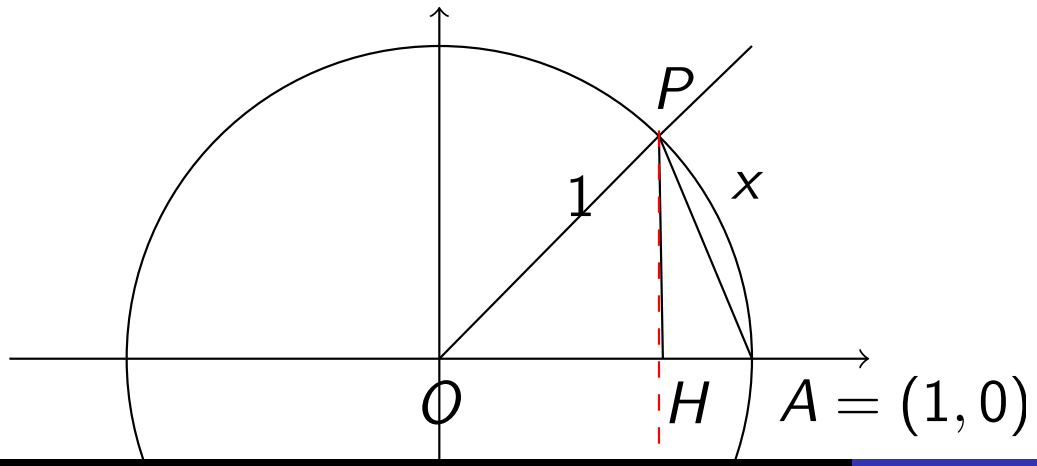
Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ si mantengano diversi da 0 in un intorno bucato di x_0 (cioè, per $x \neq x_0$). Allora, i seguenti fatti sono equivalenti:

1. $f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0, \quad$ *(cioè:* $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1, \quad$ *per* $x \to x_0$*)*
2. $f(x) = g(x) + g(x) \cdot o(1), \qquad x \to x_0$
3. $f(x) = g(x) + o(g(x)), \qquad x \to x_0$

Interpetazione geometrica di un limite

Esercizio. Dimostrare che $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$. Interpretazione geometrica: la saetta è un o-piccolo dell'arco (e della corda).

Interpretazione geometrica. $\angle HPA = \frac{x}{2}$, perché l'angolo alla circonferenza $\angle HPA$ è la metà dell'angolo al centro $\angle AOP = x$.
$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{\overline{HA}}{x} = \frac{\overline{HA}}{\overline{AP}}\frac{\overline{AP}}{x}$ Siccome $\frac{\overline{AP}}{x} \to 1$ per $x \to 0$, si ha $\frac{1-\cos x}{x} \sim \frac{\overline{HA}}{\overline{AP}} = \sin\frac{x}{2}$. Dunque, per $x \to 0$, $\frac{1-\cos x}{x} \to 0$ (e $\frac{1-\cos x}{x^2} \sim \frac{\sin\frac{x}{2}}{x} \to \frac{1}{2}$)



Limiti importanti (1)

(1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

(3) $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

(5) $\lim_{x\to0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$

(6) Per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$

(7) Per ogni $a>0$, $\lim_{x\to0^+} x^a\log_e x = 0$

Limiti importanti (2)

(8) (Funzioni esponenziali)

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

(9) Per ogni $\beta > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{e^x} = 0$$

(Per $x \to +\infty$, x^β è infinito di ordine inferiore rispetto a e^x)

(10) Per ogni $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

(Per $x \to +\infty$, $(\ln x)^\alpha$ è infinito di ordine inferiore rispetto a x^β.)

Limiti da sinistra e da destra. Continuità.

Esercizio

Calcolare i limiti per $x \to 0^-$ *e per* $x \to 0^+$ *di*

$$f(x) = \frac{x\, e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \qquad x \neq 0$$

Sia $\tilde{f}$ *l'estensione di* f *definita da:*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x\, e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ *è continua in* $x_0 = 0$*? (Risposta: Sì.)*