Introduzione alle funzioni continue

- Funzioni continue.
- Intorni. Definizione di funzione continua in termini di intorni.
- La funzione composta di funzioni continue è continua.
- Somme prodotti di funzioni continue. Permanenza del segno.
- Le funzioni continue preservano i limiti di successioni.

(Versione: 29/09/2020)

Continuità. Introduzione euristica.

- Vogliamo trovare la misura y di una grandezza fisica.
- Abbiamo una teoria matematica che ci dice come y dipende da una grandezza x: $y = f(x)$.
  Esempio: $y = \frac{1}{2}gx^2$ (caduta di un grave).
- Tolleriamo una (piccola) imprecisione nella misura di y.
- Sappiamo misurare la grandezza x con una buona (mai perfetta) precisione.

In termini grossolani, dobbiamo affrontare questo:

PROBLEMA IMPORTANTE

$\boxed{\text{Qual è l'effetto su } y \text{ di una piccola variazione di } x?}$

Ad esempio: se vogliamo che y sia accurata fino alla seconda cifra decimale dopo la virgola, mentre abbiamo tolleranza per errore di millesimi, possiamo garantire questa accuratezza, se siamo in grado di misurare x con una sufficiente precisione?

Formulazioni intuitive (da definire in modo rigoroso)

1. Sia $y = f(x)$ il legame tra due grandezze. f è continua in x_0 se si può approssimare la misura $f(x_0)$ mediante $f(x)$ con una tolleranza arbitraria $\varepsilon > 0$, purché la misura x di x_0 sia fatta con una sufficiente precisione $\delta > 0$.
2. Una funzione f è continua in x_0 se i valori $f(x)$ restano vicini quanto si vuole a $f(x_0)$, pur di prendere gli x abbastanza vicini a x_0
3. Una funzione f è continua in x_0 quando è soddisfatta questa condizione: Se la distanza $\mathrm{d}(x, x_0)$ è piccola, allora la distanza $\mathrm{d}(f(x), f(x_0))$ è piccola.

Ma tutte queste formulazioni non sono espresse in linguaggio matematico. Sono suggestive, ma vaghe e inutilizzabili.
Arriviamo adesso a una definizione rigorosa.

Definizione (Funzione continua. (A.Cauchy, 1820))

Siano $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Si dice che f è continua nel punto $x_0 \in D$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ per il quale è soddisfatta questa condizione: Per ogni $x \in D$, se

$$|x - x_0| < \delta$$

allora

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ si dice continua, se è continua in ogni punto del suo dominio D.

In simboli, $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in D$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \Big[\underbrace{\mathrm{d}(x, x_0)}_{|x - x_0|} < \delta \Longrightarrow \underbrace{\mathrm{d}\left(f(x), f(x_0)\right)}_{|f(x) - f(x_0)|} < \varepsilon \Big]$$

Primi esempi

1. Ogni funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ costante è continua. (Qualunque $\delta > 0$ va bene). (f si dice costante se: $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = K$.)
2. La funzione identità $\mathbb{R} \xrightarrow{I} \mathbb{R}$ (per ogni x, $I(x) = x$) è continua. (Basta prendere $\delta = \varepsilon$).
3. La funzione reciproco $\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, che manda ogni $x \neq 0$ in $g(x) = 1/x$, è continua.
4. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è continua.
5. $\mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \xrightarrow{\cos} \mathbb{R}$ sono continue.

([3], [4] e [5] non sono immediati. Occorre studiarli.).

Esercizio

Definiamo la funzione parte intera $\mathbb{R} \xrightarrow{[\,,]} \mathbb{R}$ *come:*

$$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid \ m \leq x\} \tag{1}$$

($[x]$ è il massimo intero minore o uguale a x.)
(a) Disegnare il grafico della funzione parte intera.
(b) In quali punti questa funzione è continua? In quali è discontinua?

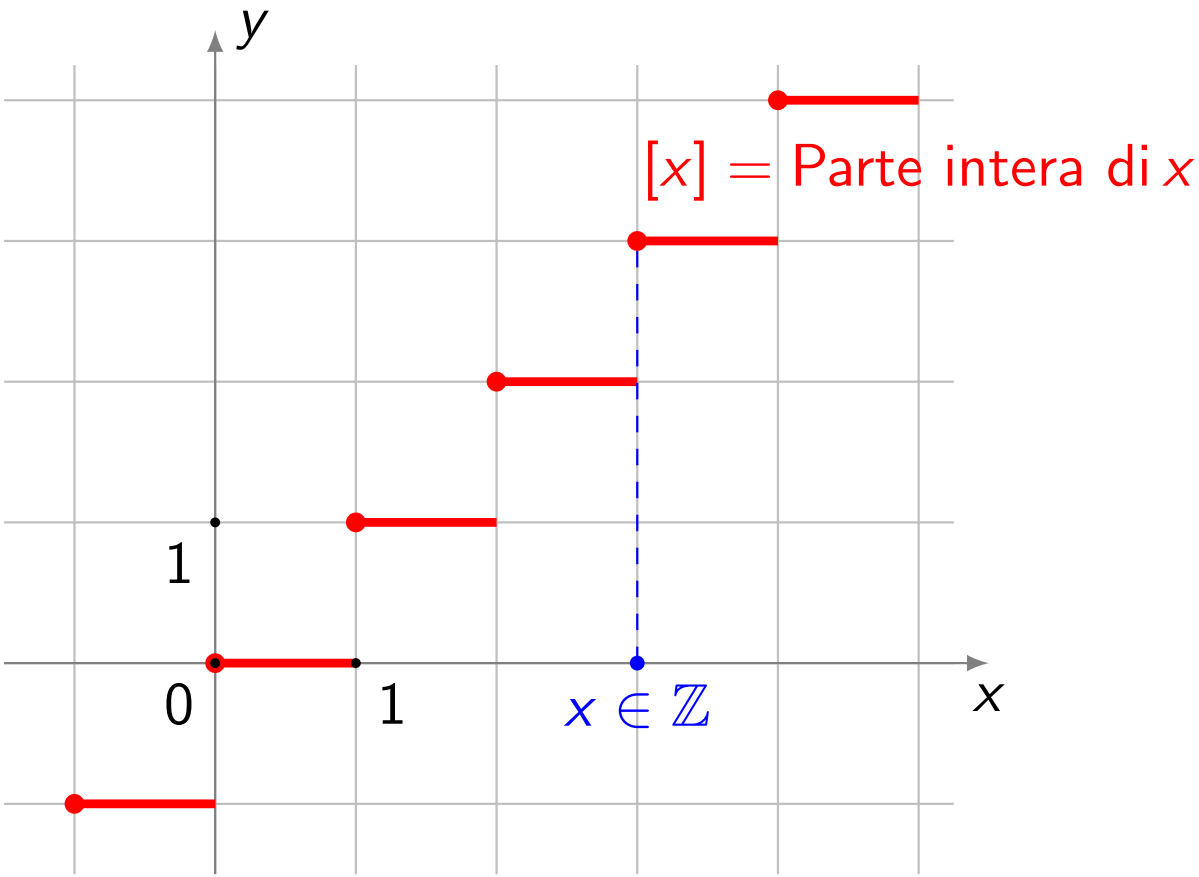
(Soluzione nella slide successiva.)

Soluzione (Funzione parte intera)

SOLUZIONE La funzione parte intera

$$x \to [x] = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$$

è discontinua in ogni $x \in \mathbb{Z}$; è continua in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.



Intorni di un punto

$\mathbb{R}$ è uno spazio metrico: La distanza $\mathtt{d}(x, y)$ tra due numeri reali x, y è il valore assoluto della loro differenza: $\mathtt{d}(x, y) = |x - y|$

Definizione (Intorno di un punto)

- *Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Si chiama intorno simmetrico (intorno sferico, disco aperto) di centro x_0 e raggio r il sottoinsieme*

$$\begin{aligned} I(x_0; r) = (x_0 - r, x_0 + r) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x < x_0 + r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{d}(x, x_0) < r\} \end{aligned}$$

- *Più in generale, un insieme $U \subset \mathbb{R}$ si dice un intorno di un punto x_0 se esiste un $r > 0$ tale che*

$$U \supset (x_0 - r, x_0 + r)$$

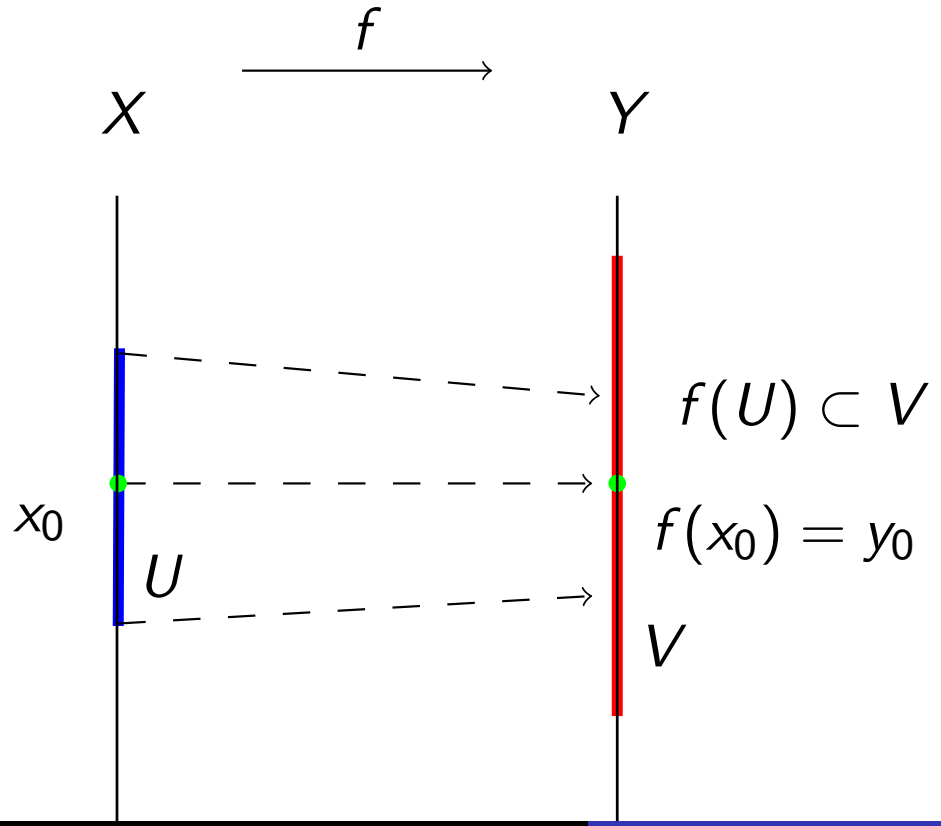
Definizione topologica di continuità (mediante gli intorni)

X, Y spazi metrici. (Ad esempio, $X = Y = \mathbb{R}$.)

$$\boxed{X \xrightarrow{f} Y \text{ continua in } x_0 \in X}$$

significa:

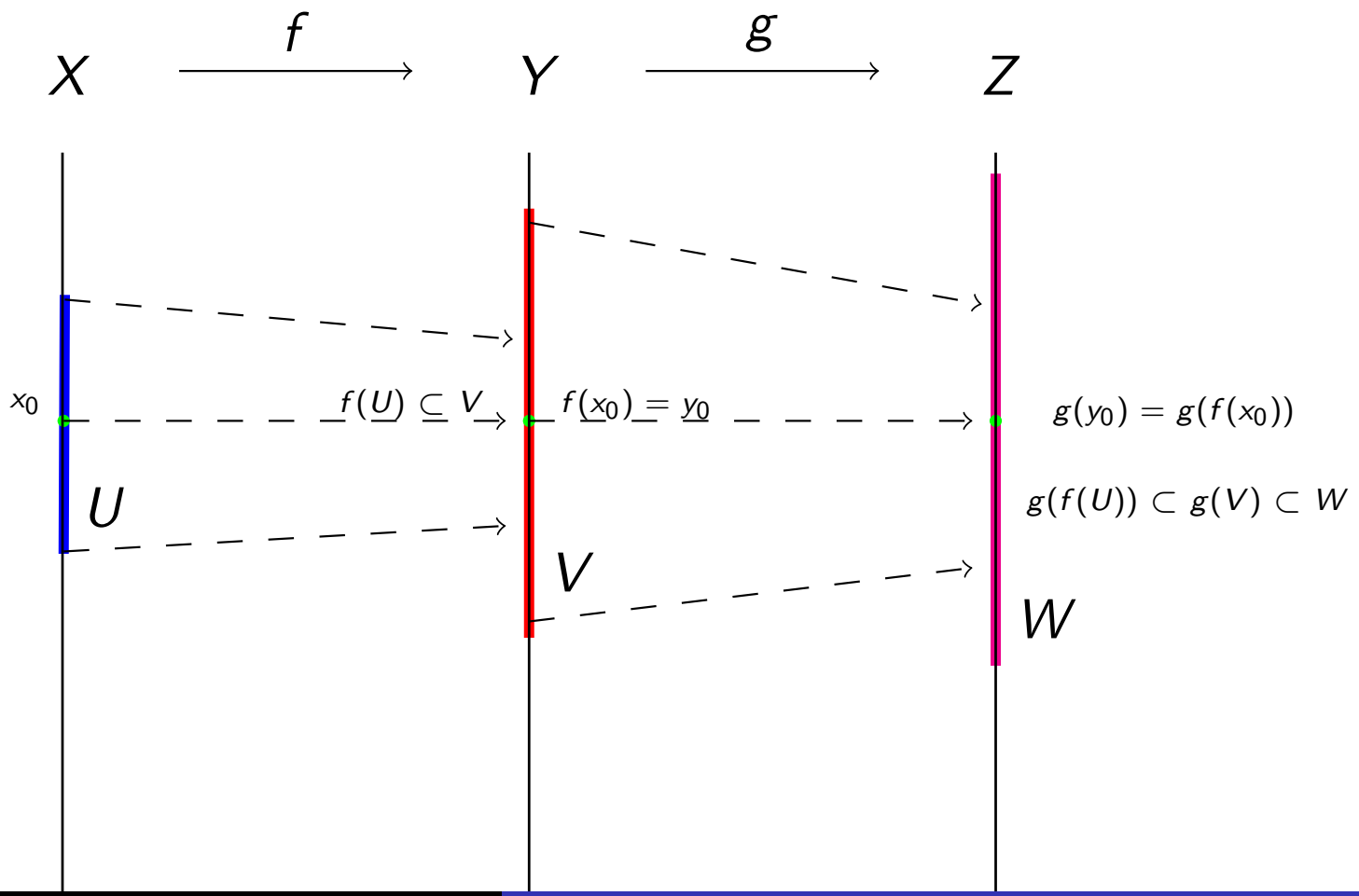
$$\boxed{\text{Per ogni intorno } V \ni f(x_0) \text{ esiste un intorno } U \ni x_0 \text{ tale che } f(U) \subset V}$$



La funzione composta di funzioni continue è continua

Teorema

Se $X \xrightarrow{f} Y$ *e* $Y \xrightarrow{g} Z$ *sono continue,* $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ *è continua.*



Dimostrazione

Siano: $x_0 \in X$; $\quad y_0 = f(x_0)$; $\quad z_0 = g(y_0)$.
(Quindi: $\quad (g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0) = z_0$.)

- Sia W un intorno di $z_0 = g(y_0)$. Poiché g è continua in y_0, esiste un intorno V di y_0 tale che $g(V) \subset W$.
- Poiché V è intorno di $f(x_0)(= y_0)$ e f è continua in x_0, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subset V$.
- Allora $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$.
  ($g(f(U)) \subset g(V)$ perché $f(U) \subset V$.)

Abbiamo così dimostrato che:
per ogni intorno W di $z_0 = (g \circ f)(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che $(g \circ f)(U) \subset W$.
Dunque $(g \circ f)$ è continua in x_0.

Somme e prodotti. Permanenza del segno.

Teorema (Permanenza del segno)

Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *continua in* x_0 *e sia* $f(x_0) > 0$ *(oppure* $f(x_0) < 0$*).*
Allora:
$(\exists U \text{ intorno di } x_0)\,(\forall x \in U) \quad f(x) > 0$ *(oppure* $f(x_0) < 0$*)*

Teorema (Somme e prodotti)

Siano f, g *continue in* x_0*. allora:*

1. *La somma* $f + g$ *è continua in* x_0*.*
2. *Il prodotto* $f \cdot g$ *(definito da* $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$*) è continua in* x_0*.*

Applicazioni: Esercizio

Esercizio

Dimostrare che la funzione

$$g(x) = \frac{\sin(x^3) + x^4}{1 + x^2 + \cos^2(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

è continua.

SOLUZIONE La funzione g si ottiene da funzioni continue mediante somme, prodotti, composizione, passaggio al reciproco (con denominatore $\neq 0$).

Le funzioni continue preservano i limiti di successioni.

Teorema (Continuità per successioni)

Siano $D \subset \mathbb{R}$, $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione, x_0 un punto di D. I due seguenti enunciati sono equivalenti:

(1) *f è continua in x_0.*

(2) *Per ogni successione (x_n) in D,*

$$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$$

(cioè: se $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$, allora $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.)

In breve: Le funzioni continue sono le funzioni che preservano i limiti di successioni.

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2)

(1) IPOTESI: f continua in x_0.

(2) TESI: $\left[x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0\right] \implies \left[f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)\right]$

Supponiamo $x_n \to x_0$. Dobbiamo dimostrare che $f(x_n) \to f(x_0)$.
Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la continuità di f in x_0,
$(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D) \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Ma per n sufficientemente grande, tutti gli elementi x_n soddisfano $|x_n - x_0| < \delta$ (perché $x_n \to x_0$). Pertanto, per tutti gli n sufficientemente grandi, vale $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Questo dimostra che $f(x_n) \to f(x_0)$.

Dimostrazione (per assurdo) di: $(2) \implies (1)$

(2) IPOTESI: $\left[x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0\right] \implies \left[f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)\right]$

(1) TESI: f continua in x_0.

Dimostriamo che la negazione della tesi conduce a una contraddizione. La tesi, "f continua in x_0", si scrive:

$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D) \quad [|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$

La negazione della tesi è:

$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x \in D) \quad [|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon]$

In particolare, scelto $\delta_n = \frac{1}{n}$ (n intero ≥ 1), esiste una successione (x_n) in D tale che:

$$x_n \to x_0 \qquad \text{e} \qquad f(x_n) \not\to f(x_0)$$

Questo fatto contraddice l'ipotesi (2). Dunque la tesi (1) deve essere vera. Q.E.D.

NOTA $[\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}]$ equivale a: $[(\text{non}\,\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}]$. Quindi $\text{non}\,[\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}]$ equivale a: $[\mathcal{P} \wedge (\text{non}\,\mathcal{Q})]$.

Criterio per stabilire la discontinuità di una funzione

Siano $D \subset \mathbb{R}$, $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione, x_0 un punto di D. Se esiste una successione (x_n) tale che $x_n \to x_0$ ma $f(x_n) \not\to f(x_0)$, allora f non è continua in x_0.

Esempio. Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \text{ irrazionale} \\ 0 & \text{per } x \text{ razionale} \end{cases} \tag{2}$$

Dico che f è discontinua in ogni punto. Infatti, fissiamo un qualunque x_0 irrazionale. Siccome $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, esiste una successione x_n di razionali tale che $x_n \to x_0$. Ma $f(x_n) \not\to f(x_0)$, perché $f(x_n) = 0$ e $f(x_0) = 1$. Pertanto, f non è continua nel numero irrazionale x_0. In modo analogo (usando il fatto che gli irrazionali sono densi in $\mathbb{R}$) si dimostra che f è discontinua anche in ogni numero razionale.