Politecnico di Milano
Corso di Analisi e Geometria 1 (a.a. 2022/23)

Federico Lastaria
federico.lastaria@polimi.it

Dimostrazioni da imparare per la prima prova parziale
18 Ottobre 2022

Indice

1 Dimostrazioni da imparare per la prima prova in itinere.

1.1 Irrazionalità di $\sqrt{2}$

Teorema 1.1 (Irrazionalità di $\sqrt{2}$). *Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2.*

Dimostrazione.[1] Supponiamo, per assurdo, che esistano due numeri interi positivi m, n tali che

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \tag{1.1}$$

Non è restrittivo supporre che gli interi m e n siano primi tra loro, cioè che non abbiano fattori primi in comune. (Altrimenti, riduciamo la frazione $\frac{m}{n}$ ai minimi termini). Da (1.1) segue

$$m^2 = 2n^2 \tag{1.2}$$

Dall'uguaglianza (1.2) segue che m^2 è pari. Quindi, m è pari. (Infatti, m dispari implica m^2 dispari.) Quindi si può scrivere:

$$m = 2a \tag{1.3}$$

(con $a \in \mathbb{N}$.) Sostituendo $m = 2a$ nell'uguaglianza (1.2), si ottiene

$$(2a)^2 = 2n^2 \tag{1.4}$$

da cui

$$2a^2 = n^2 \tag{1.5}$$

Ma allora n^2 è pari, e quindi anche n è pari. Ne segue che m e n sono entrambi pari. Siamo arrivati a una contraddizione, perché avevamo supposto che m e n non avessero fattori primi in comune.

Dunque, concludiamo che non esistono numeri interi m, n per i quali risulti $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Q.E.D.

Osservazione. Abbiamo così dimostrato che:

La diagonale e il lato di uno stesso quadrato sono incommensurabili tra loro, cioè non hanno alcun sottomultiplo comune.

Questo significa che, detta d la diagonale e l il lato di un quadrato, non esistono numeri interi m, n per i quali $\frac{1}{m}d = \frac{1}{n}l$. Infatti, se ciò accadesse, il rapporto tra d e l sarebbe dato dal numero razionale $\frac{m}{n}$:

$$\frac{d}{l} = \frac{m}{n}$$

[1] Per facilitare la dimostrazione, richiamiamo alcuni semplici fatti. Per definizione, un numero $m \in \mathbb{N}$ è pari se è divisibile per 2, cioè se si può scrivere come $m = 2h$, per un opportuno h in $\mathbb{N}$; è dispari se diviso per 2 dà resto 1, cioè se si può scrivere come $m = 2k + 1$, con $k \in \mathbb{N}$.

Valgono queste semplici implicazioni:

(i) m pari $\implies$ m^2 pari. (Infatti, $m^2 = (2h)^2 = 2(2h^2)$.)

(ii) m dispari $\implies$ m^2 dispari. (Infatti, $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$)

(iii) m^2 pari $\implies$ m pari. (Altrimenti, se m fosse dispari, m^2 sarebbe dispari, per l'implicazione (ii).)

(iv) m^2 dispari $\implies$ m dispari. (Altrimenti, se m fosse pari, m^2 sarebbe pari, per l'implicazione (i).)

Ma quest'ultima uguaglianza è impossibile. Infatti, per il teorema di Pitagora, abbiamo $d^2 = l^2 + l^2$, ossia $\frac{d}{l} = \sqrt{2}$, e abbiamo dimostrato (teorema 1.1) che $\sqrt{2}$ non si può scrivere come $\frac{m}{n}$, con m, n interi.

1.2 Successioni monotòne limitate

Teorema 1.2 (Successioni monotòne limitate). *Ogni successione in $\mathbb{R}$ che sia crescente*

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots \tag{1.6}$$

e (superiormente) limitata è convergente. Precisamente, converge all'estremo superiore dell'insieme dei suoi termini.

Se invece una successione è decrescente e limitata, convergerà all'estremo inferiore dell'insieme dei suoi termini.

Dimostrazione. Sia (a_n), $n \in \mathbb{N}$, una successione crescente e limitata. Chiamiamo

$$A = \{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$$

l'insieme dei suoi elementi. Per ipotesi l'insieme A è (non vuoto e) limitato. Pertanto (qui si usa la completezza dei reali) A ha un estremo superiore. Poniamo $L = \sup A$.

Ricordiamo che, per definizione, l'estremo superiore L di A è *la minima limitazione superiore* di A, cioè l'unico numero $L \in \mathbb{R}$ che soddisfa queste due proprietà:

1. L è una limitazione superiore per A, cioè:

$$a_n \leq L \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}$$

2. Nessun numero $L' < L$ è una limitazione superiore per A, cioè:

Per ogni $L' < L$ esiste un $a_k \in A$ per il quale $L' < a_k$.

Dimostriamo che a_n converge a L. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Siccome $L - \varepsilon < L$, il numero $L - \varepsilon$ non è una limitazione superiore dell'insieme $A = \{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$. Dunque esiste un intero k per il quale $L - \varepsilon < a_k$. Poiché la successione è crescente, per tutti gli $n > k$ si ha $a_k < a_n$ e quindi $L - \varepsilon < a_n$, definitivamente (cioè, per tutti gli n maggiori di k). Ma per ogni n si ha $a_n \leq L$. Riassumendo, si ha

$$L - \varepsilon < a_n \leq L$$

per tutti gli $n > k$. Per la stessa definizione di limite di una successione, si conclude allora che $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$. Q.E.D.

Osservazione. Si dimostra che in un campo ordinato $\mathbb{K}$, la proprietà delle successioni monotòne limitate ("*Ogni successione monotòna limitata converge in* $\mathbb{K}$") è equivalente alla proprietà dell'estremo superiore ("*Ogni sottoinsieme di* $\mathbb{K}$ *non vuoto e superiormente limitato ha una minima limitazione superiore*").

1.3 Forma polare del prodotto di due numeri complessi. Formula di De Moivre.

Teorema 1.3 (Prodotto di due numeri complessi in forma polare. Formula di De Moivre.). *Il prodotto dei numeri complessi*

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad\qquad z' = r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta') \tag{1.7}$$

è il numero complesso:

$$z \cdot z' = rr'[\cos(\vartheta + \vartheta') + i\sin(\vartheta + \vartheta')] \tag{1.8}$$

In breve, quando si moltiplicano tra loro due numeri complessi, i moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano.

In particolare, vale la Formula di De Moivre:

$$[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)]^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) \tag{1.9}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= [r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)] \cdot [r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')] \\ &= rr'[(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta') + i(\sin\vartheta\cos\vartheta' + \cos\vartheta\sin\vartheta')] \\ &= rr'[\cos(\vartheta + \vartheta') + i\sin(\vartheta + \vartheta')] \end{aligned}$$

La Formula di De Moivre (1.9) segue subito dalla formula del prodotto (1.8), ponendo $z = z'$ e iterando. Q.E.D.

Osservazione. Dalla formula di moltiplicazione segue che l'inverso del numero $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ è

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} = r^{-1}(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)) \tag{1.10}$$

Dalle formule (1.8) e (1.10) segue che *il quoziente di due numeri complessi ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti*: se $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e $z' = r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')$, allora

$$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}(\cos(\vartheta' - \vartheta) + i\sin(\vartheta' - \vartheta)) \tag{1.11}$$

Osservazione. La formula di De Moivre permette di trovare (o ritrovare) diverse identità trigonometriche. Facciamo un esempio ($r = 1, n = 2$): da $(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2 = \cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta$ segue, sviluppando il quadrato a primo membro

$$\cos^2\vartheta + 2i\cos\vartheta\sin\vartheta - \sin^2\vartheta = \cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta$$

e infine, *uguagliando le parti reali e i coefficienti delle parti immaginarie*:

$$\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta \qquad\qquad \sin 2\vartheta = 2\cos\vartheta\sin\vartheta$$

(In questo modo è molto più facile ricordare le formule).

1.4 Radici n-esime di un numero complesso

Teorema 1.4 (Radici n-esime di un numero complesso)**.** *Sia $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ un numero complesso non nullo e sia n un intero positivo. Esistono esattamente n numeri complessi che elevati alla potenza n-esima danno come risultato z. Tali numeri sono:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right], \qquad k = 0, 1, ..., n-1 \quad (1.12)$$

Ciascuno di tali numeri $z_0, ..., z_{n-1}$ si chiama una *radice n-esima* di z. Quindi il teorema dice che ogni numero complesso (non nullo) ha esattamente n radici n-esime. (Nel caso $z = 0$, le n radici n-esime sono coincidenti.)

Dimostrazione. Un numero complesso

$$w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad (1.13)$$

è una radice n-esima di z se $w^n = z$, ossia (per la formula di De Moivre) se

$$|w|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \quad (1.14)$$

Ora due numeri complessi, scritti in forma polare, sono uguali se e solo se hanno i moduli uguali, e gli argomenti *uguali a meno di multipli interi di* 2π:

$$|w|^n = r, \qquad n\alpha = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ma si vede facilmente che si ottengono n radici distinte soltanto per gli n valori $k = 0, 1, ..., (n-1)$, mentre dando a k un qualunque altro valore, si riottiene una delle radici $z_0, ..., z_{n-1}$. Quindi tutte le n radici n-esime distinte hanno modulo e argomento rispettivamente dati da

$$\sqrt[n]{r}, \qquad \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

Q.E.D.

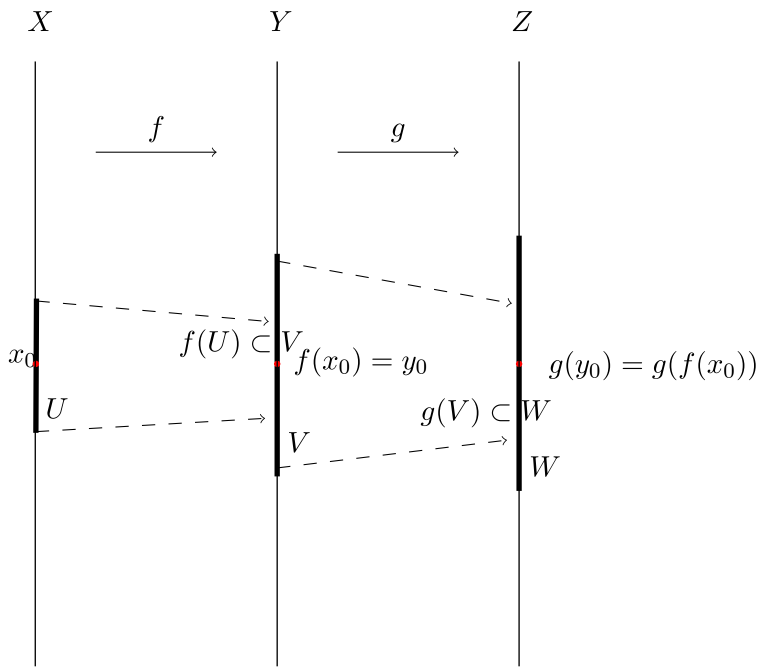
Osservazione. Si noti che le radici n-esime si trovano tutte sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{r}$ e sono equidistanziate tra loro, cioè sono i vertici di un poligono regolare di n lati.

1.5 Continuità della funzione composta

Teorema 1.5 (Composizione di funzioni continue). *Se* $X \xrightarrow{f} Y$ *e* $Y \xrightarrow{g} Z$ *sono funzioni continue* (X, Y, Z *sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$, *oppure, più in generale, spazi metrici), allora anche la funzione composta* $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ *è continua.*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& Z
\end{tikzcd}
$$

Dimostrazione Sia $x_0 \in X$, poniamo $f(x_0) = y_0$, e sia W un qualunque intorno



di $g(f(x_0)) = g(y_0)$.

Per la continuità di g in y_0, esiste un intorno V di y_0 tale che $g(V) \subset W$. Del resto, poiché f è continua in x_0, esiste un intorno U di x_0 per il quale $f(U) \subset V$. Poiché da $f(U) \subset V$ segue $g(f(U)) \subset g(V)$, si ha

$$(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$$

Questo prova la continuità della funzione composta in x_0. Poiché x_0 è un punto arbitario di X, abbiamo dimostrato la continuità della funzione composta $g \circ f$.

Q.E.D.

1.6 Teorema degli Zeri

Teorema 1.6 (Teorema degli Zeri)**.** *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Siano a, b due punti appartenenti a I, con $a < b$. Supponiamo che i valori $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segni opposti ($f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, o viceversa). Allora esiste almeno un punto $\alpha \in (a, b)$ in cui si ha $f(\alpha) = 0$.*

Dimostrazione La dimostrazione del Teorema degli Zeri è costruttiva, cioè presenta un algoritmo (detto **metodo di bisezione** o metodo dicotomico) per mezzo del quale è possibile trovare un punto in cui f si annulla. Per fissare le idee supponiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ e consideriamo il punto medio $c = \dfrac{a+b}{2}$ dell'intervallo $[a, b]$. Possono presentarsi due casi. Se $f(c) = 0$ il problema è risolto (abbiamo trovato uno zero di f). Se invece $f(c) \neq 0$, scegliamo tra i due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ quello in cui la funzione f assume valori discordi agli estremi. Tenuto conto delle nostre scelte iniziali ($f(a) < 0$ e $f(b) > 0$), si tratta di scegliere l'intervallo in cui la funzione assume valore negativo nell'estremo di sinistra e valore positivo nell'estremo di destra. Quindi se $f(c) \neq 0$, scegliamo l'intervallo $I_1 = [i_1, j_1]$ nel modo seguente :

$$I_1 = [i_1, j_1] = \begin{cases} [a, c] & \text{se} \quad f(c) > 0 \\ \\ [c, b] & \text{se} \quad f(c) < 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

Operiamo ora sull'intervallo $I_1 = [i_1, j_1]$ nello stesso modo in cui abbiamo operato sull'intervallo $[a, b]$. Precisamente: sia c_1 il punto medio di $[i_1, j_1]$. Se $f(c_1) = 0$ il problema è risolto (c_1 è uno zero di f). Altrimenti scegliamo tra i due intervalli $[i_1, c_1]$ e $[c_1, j_1]$ quello in cui la funzione assume valore negativo nell'estremo di sinistra e positivo nell'estremo di destra.

Iterando questo procedimento, si possono avere due casi:

1. Esiste un intero positivo k tale che la funzione si annulla nel punto medio c_k dell'intervallo $[i_k, j_k]$. In questo caso abbiamo trovato un punto c_k nel quale la funzione f si annulla, e la tesi del teorema è dimostrata.

2. La funzione non si annulla in nessun punto medio c_k. In questo caso otteniamo una successione infinita di intervalli compatti inscatolati

$$[i_1, j_1] \supset [i_2, j_2] \supset [i_3, j_3] \supset \cdots \supset [i_n, j_n] \supset \cdots$$

con le due seguenti proprietà:

(a) nell'estremo di sinistra di ogni intervallo la funzione assume valore negativo, mentre nell'estremo di destra assume valore positivo, cioè per ogni k ($0 \leq k \leq n$) abbiamo $f(i_k) < 0$ e $f(j_k) > 0$.

(b) gli intervalli hanno ampiezza $j_k - i_k = \dfrac{b-a}{2^k}$

Abbiamo dunque costruito una successione di intervalli compatti inscatolati le cui ampiezze tendono a zero. Per il teorema sugli intervalli inscatolati (conseguenza della completezza di $\mathbb{R}$) esiste un unico numero reale α che appartiene a tutti gli intervallini $[i_n, j_n]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. A tale numero α convergono le due successioni i_n e j_n:

$$\lim_{n \to +\infty} i_n = \alpha = \lim_{n \to +\infty} j_n$$

Poiché f è continua in $x = \alpha$ ('f commuta con lim', nel senso che 'f lim = lim f'), abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} f(i_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} i_n\right) = f(\alpha) \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(j_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} j_n\right) = f(\alpha)$$

Ma poiché $f(i_n) < 0$ (per ogni n), risulta

$$f(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} f(i_n) \leq 0$$

(perché il limite di una successione di termini $f(i_n) < 0$ è certamente ≤ 0). Analogamente, poiché $f(j_n) > 0$ per ogni n, si deve avere

$$f(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} f(j_n) \geq 0$$

Poichè le due ultime disuguaglianze devono valere contemporaneamente, abbiamo $f(\alpha) = 0$ e quindi α è uno zero di f. Q.E.D.

1.7 Teorema dei Valori Intermedi

Teorema 1.7 (Teorema dei Valori Intermedi. Una funzione continua trasforma connessi in connessi)**.** *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Se a e b appartengono a I, la funzione f assume ogni valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$. Detto altrimenti, l'immagine $J = f(I)$ di f è un intervallo.*

In breve: *Le funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ trasformano intervalli in intervalli.*

Dimostrazione Siano $a' = f(a)$ e $b' = f(b)$ due punti di $f(I)$; supponiamo $a' < b'$. Sia w un numero tale che $a' < w < b'$. Dobbiamo dimostrare che $w \in f(I)$. Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - w, \qquad\qquad x \in [a, b]$$

Tale funzione è ovviamente continua sull'intervallo $[a, b]$ e si ha:

$$g(a) = f(a) - w = a' - w < 0 \qquad g(b) = f(b) - w = b' - w > 0 \tag{1.16}$$

Dunque la funzione g soddisfa le ipotesi del Teorema degli Zeri (1.6) sull'intervallo $[a, b]$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ per il quale $g(c) = f(c) - w = 0$, ossia $f(c) = w$, come si voleva dimostrare. Q.E.D.

Commento. Definiamo la seguente proprietà, detta di Darboux:

Proprietà (di Darboux). *Una funzione $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$, soddisfa la* proprietà di Darboux *se per ogni $x_{1,2} \in I$, f assume sull'intervallo $[x_1, x_2]$ ogni valore compreso tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$.*

Il teorema dei Valori Intermedi 1.7 si può allora enunciare dicendo che le funzioni continue su un intervallo soddisfano la proprietà di Darboux. Non è però vero il viceversa. Un controesempio è fornito dalla funzione seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

Si vede facilmente che questa funzione soddisfa la proprietà di Darboux. Ma f non è continua su $\mathbb{R}$, perché in $x_0 = 0$ presenta una discontinuità non eliminabile.

1.8 Derivabilità implica continuità

Teorema 1.8 (Derivabilità implica continuità)**.** *Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0.*

Dimostrazione. Partiamo dall'identità (valida per $x \neq x_0$)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

Allora[2]:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \left(\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \right) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

Questo prova che f è continua in x_0.

Un'altra dimostrazione è la seguente. Poiché f è differenziabile in x_0, si scrive

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + o(h) \qquad (\text{per } \ h \to 0)$$

Passando al limite:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) &= \lim_{h \to 0} \left[f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \right] \\ &= f(x_0) + \lim_{h \to 0} f'(x_0)h + \lim_{h \to 0} o(h) \\ &= f(x_0) + \lim_{h \to 0} f'(x_0)h + \lim_{h \to 0} h \frac{o(h)}{h} \\ &= f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0) \end{aligned}$$

Q.E.D.

[2]Si ricordi che se esistono i limiti di $g_1(x)$ e $g_2(x)$ per $x \to x_0$, allora *il limite della somma $g_1(x) + g_2(x)$ è la somma dei limiti.* Si noti che, a secondo membro, $f(x_0)$ è una costante e quindi $\lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$

1.9 Teorema di Fermat

Teorema 1.9 (Fermat)**.** *Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali definita su un insieme* $D \subset \mathbb{R}$*. Supponiamo che:*

1. x_0 *sia un punto di massimo (o di minimo) locale per* f*;*

2. x_0 *sia interno a* D*;*

3. f *sia derivabile in* x_0*.*

Allora x_0 *è un punto stazionario di* f*, cioè* $f'(x_0) = 0$*.*

Dimostrazione. Per fissare le idee, supponiamo che x_0 sia un punto di massimo locale per f. Poiché, per ipotesi, x_0 è al tempo stesso un punto interno al dominio D di f e un punto di massimo locale, esiste un intorno sufficientemente piccolo I di x_0 con le due proprietà seguenti[3]:

$$I \subset D \tag{1.18}$$

(perché x_0 è interno a D) e

$$\forall x \in I \qquad f(x) - f(x_0) \leq 0 \tag{1.19}$$

(perché x_0 è punto di massimo locale). Per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$, si ha allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \tag{1.20}$$

se $x > x_0$ e

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \tag{1.21}$$

si ricava[4] rispettivamente $f'(x_0) \leq 0$ e $f'(x_0) \geq 0$. Di conseguenza $f'(x_0) = 0$.
Q.E.D.

Osservazione. Si noti che nel teorema dimostrato è essenziale l'ipotesi che x_0 sia interno a D. (Non basta che il punto x_0 appartenga a D). Ad esempio, la funzione $f(x) = x$ nell'intervallo $D = [0, 1]$ ha un punto di massimo locale in $x_0 = 1$, anche se la derivata (sinistra) di f in x_0 non è nulla (è uguale a 1). Naturalmente questo non contaddice il teorema di Fermat. Semplicemente non sono soddisfatte le ipotesi di tale teorema, perché il punto $x_0 = 1$ non è interno a $D = [0, 1]$.

[3]Sappiamo che esiste un intorno U di x_0 che soddisfa la condizione $U \subset D$ e esiste un intorno V di x_0 su cui vale $f(x) \leq f(x_0)$. Allora sull'intersezione $I = U \cap V$ (che è ancora un intorno di x_0) sono soddisfatte entrambe le condizioni.

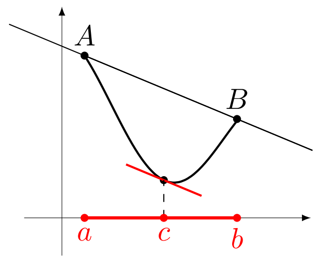
[4]Qui si usa il teorema di *Permanenza del Segno*: *Sia* g *una funzione definita su un intorno* U *di un punto* x_0 *(con la possibile eccezione del punto* x_0*). Supponiamo che, per ogni* $x \in U \setminus x_0$*, si abbia* $g(x) \geq 0$ *e supponiamo che esista (finito) il limite* $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$*. Allora si ha* $L \geq 0$*.*

1.10 Teorema del Valore Medio (di Lagrange)

Teorema 1.10 (del Valore Medio, o di Lagrange)**.** *Sia* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione continua sull'intervallo compatto* $[a, b]$ *e derivabile sull'intervallo aperto* (a, b)*. Allora esiste un punto* $c \in (a, b)$ *per il quale si ha*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{1.22}$$

Dimostrazione.



La funzione, definita sull'intervallo $[a, b]$,

$$g(x) = f(x) - \underbrace{\left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right]}_{\text{retta } AB}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Dunque, esiste un punto c in (a, b) in cui $g'(c) = 0$. La derivata di $g(x)$ è

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quindi si ha

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

che è la tesi. □

Osservazione. Il teorema di Lagrange ha la seguente interpretazione geometrica. Si noti che il numero $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta (secante) che passa per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, di equazione

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{1.23}$$

Quindi il teorema afferma che esiste almeno un punto $(c, f(c))$ appartenente al grafico della funzione f in cui la retta tangente (il cui coefficiente angolare è $f'(c)$) è parallela alla retta secante che unisce i due punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Si noti che la funzione ausiliaria (1.10) è la differenza tra l'ordinata del punto $(x, f(x))$ sul grafico di f e l'ordinata del punto di coordinate

$$\left(x, f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)$$

sulla retta secante.

1.11 Funzioni con derivata di segno costante su un intervallo

Teorema 1.11 (Funzioni con derivata di segno costante su un intervallo)**.** *Sia* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione derivabile su un intervallo aperto* I *di* $\mathbb{R}$.

1. *Se, per ogni* $x \in I$, $f'(x) > 0$, *allora* f *è strettamente crescente su* I.

2. *Se, per ogni* $x \in I$, $f'(x) < 0$, *allora* f *è strettamente decrescente su* I.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per il caso di funzioni con derivata positiva in ogni punto. (L'altro caso si tratta in modo analogo).

Siano x_1, x_2 due punti di I, con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange esiste un punto c, compreso tra x_1 e x_2, per il quale si ha:

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$$

Poiché per ipotesi $f'(c) > 0$ e $x_1 - x_2 < 0$, si deve avere $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Abbiamo allora dimostrato che, per ogni $x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Dunque f è strettamente crescente su I. Q.E.D.

Osservazione. L'potesi che il dominio di f sia un *intervallo* (cioè, un insieme *connesso*), non si può eliminare. Ad esempio, la funzione $f(x) = -1/x$, definita su $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ha derivata positiva su D ($f'(x) = 1/x^2$), ma f non è strettamente crescente *sul suo dominio* D. Ovviamente (per il teorema dimostrato sopra), f è crescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$ (che è un intervallo) ed è crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$ (che è un intervallo), ma non è crescente sul suo dominio $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (che non è un intervallo).

Osservazione. Il teorema non si inverte. Più precisamente, esistono funzioni derivabili e strettamente crescenti che in alcuni punti hanno derivata nulla. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$.

Quindi l'affermazione:

"*Se* f *è strettamene crescente e derivabile, allora* $f'(x) > 0$ *per ogni* x*,*"

è falsa.

Invece, l'affermazione:

"*Se* f *è strettamene crescente e derivabile, allora* $f'(x) \geq 0$ *per ogni* x*,*"

è vera.

1.12 Funzioni con derivata nulla su un intervallo

Teorema 1.12 (Funzioni con derivata nulla su un intervallo)**.** *Una funzione definita su un intervallo aperto $I = (a, b)$ e con derivata nulla in ogni punto di tale intervallo è costante.*

Dimostrazione. Prendiamo due punti qualunque x_1, x_2 in (a, b), $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange – applicato all'intervallo $[x_1, x_2]$ – esiste un punto c, compreso tra x_1 e x_2, per il quale si ha:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

Ne segue $f(x_1) = f(x_2)$. Quindi f è costante. Q.E.D.

Osservazione. Si noti che in questo teorema è essenziale l'ipotesi che il dominio della funzione sia un *intervallo* (un sottoinsieme *connesso* di $\mathbb{R}$).

Esempio 1. La funzione

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ 1 & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

ha derivata nulla in ogni punto del suo dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ma non è costante. (Si noti che $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ non è un intervallo di $\mathbb{R}$, cioè non è *connesso*).

Esempio 2. La funzione

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

ha derivata nulla in ogni punto del suo dominio (come si verifica facilmente calcolando la derivata), ma non è costante. Precisamente,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pi/2 \qquad \text{per } x > 0$$

e

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\pi/2 \qquad \text{per } x < 0$$

1.13 Formula di Taylor (locale) con il resto di Peano

Teorema 1.13 (Formula di Taylor locale, resto di Peano)**.** *Sia f una funzione definita in un intorno J di x_0 e derivabile n volte in x_0 (n intero positivo). Si definisca il resto $R_n(x)$ attraverso l'uguaglianza*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{1.24}$$

Allora $R_n(x)$ è, per $x \to x_0$, un $o((x-x_0)^n)$, cioè

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \tag{1.25}$$

In breve: *Se f una funzione definita in un intorno di x_0 e derivabile n volte in x_0 (n intero positivo), allora*

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)} \tag{1.26}$$

(Il resto è un $o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$.)

Dimostrazione. Dimostriamo la formula di Taylor (1.26) nel caso $n = 2$. Si deve dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 0 \tag{1.27}$$

ossia, in modo equivalente, si deve dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2!} \tag{1.28}$$

Usiamo la regola dell'Hospital (della quale sono soddisfatte le ipotesi, come si vede facilmente). Per la regola dell'Hospital, il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}$$

è uguale al limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x-x_0)}$$

sotto la condizione che tale ultimo limite esista. Ora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x-x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

per la definizione stessa di $f''(x_0)$. Quindi, concludiamo che vale la tesi (1.29):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2!} \tag{1.29}$$

Il caso $n = 2$ è dunque dimostrato.

La dimostrazione nel caso generale (n qualunque) è del tutto analoga. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = 0 \quad (1.30)$$

ossia

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (1.31)$$

Usiamo la regola dell'Hospital. Calcolando successivamente il rapporto delle derivate. Otteniamo infine

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (1.32)$$

per la definizione stessa di derivata $f^{(n)}(x_0)$. Dunque, per l'Hospital vale (1.31) e il teorema è così dimostrato. Q.E.D.

Osservazione Per $n = 1$, la formula di Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o((x-x_0)) \quad (x \to x_0) \quad (1.33)$$

è la proprietà di differenziabilità di f in x_0.