

Politecnico di Milano
 Corso di Analisi e Geometria 1 (a.a. 2022/23)

Federico Lastaria
 federico.lastaria@polimi.it

Dimostrazioni per gli appelli

20 Dicembre 2022

Indice

1	Dimostrazioni per gli scritti degli appelli.	2
1.1	Irrazionalità di $\sqrt{2}$	2
1.2	Successioni monotone limitate	4
1.3	Forma polare del prodotto di due numeri complessi. Formula di De Moivre.	5
1.4	Radici n -esime di un numero complesso	6
1.5	Continuità della funzione composta	7
1.6	Teorema degli Zeri	9
1.7	Teorema dei Valori Intermedi	11
1.8	Derivabilità implica continuità	12
1.9	Teorema di Fermat	13
1.10	Teorema del Valore Medio (di Lagrange)	14
1.11	Funzioni con derivata di segno costante su un intervallo	15
1.12	Funzioni con derivata nulla su un intervallo	16
1.13	Formula di Taylor (locale) con il resto di Peano	17
1.14	Teorema della Media Integrale	19
1.15	Continuità della funzione integrale	20
1.16	Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. (Derivata della funzione integrale e Formula di Newton–Leibniz)	21
1.17	Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$	24
1.18	Criterio del confronto asintotico per le serie	24
1.19	Criterio della radice (di Cauchy) per le serie	26
1.20	Teorema di Pitagora (e teorema di Carnot)	27
1.21	Derivata di un vettore di lunghezza costante	29
1.22	Proiezione di un vettore lungo un altro	30
1.23	Equivalenza di due definizioni di curvatura	31

1 Dimostrazioni per gli scritti degli appelli.

1.1 Irrazionalità di $\sqrt{2}$

Teorema 1.1 (Irrazionalità di $\sqrt{2}$). *Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2.*

*Dimostrazione.*¹ Supponiamo, per assurdo, che esistano due numeri interi positivi m, n tali che

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \quad (1.1)$$

Non è restrittivo supporre che gli interi m e n siano primi tra loro, cioè che non abbiano fattori primi in comune. (Altrimenti, riduciamo la frazione $\frac{m}{n}$ ai minimi termini). Da (1.1) segue

$$m^2 = 2n^2 \quad (1.2)$$

Dall'uguaglianza (1.2) segue che m^2 è pari. Quindi, m è pari. (Infatti, m dispari implica m^2 dispari.) Quindi si può scrivere:

$$m = 2a \quad (1.3)$$

(con $a \in \mathbb{N}$.) Sostituendo $m = 2a$ nell'uguaglianza (1.2), si ottiene

$$(2a)^2 = 2n^2 \quad (1.4)$$

da cui

$$2a^2 = n^2 \quad (1.5)$$

Ma allora n^2 è pari, e quindi anche n è pari. Ne segue che m e n sono entrambi pari. Siamo arrivati a una contraddizione, perché avevamo supposto che m e n non avessero fattori primi in comune.

Dunque, concludiamo che non esistono numeri interi m, n per i quali risulti $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Q.E.D.

Osservazione. Abbiamo così dimostrato che:

La diagonale e il lato di uno stesso quadrato sono incommensurabili tra loro, cioè non hanno alcun sottomultiplo comune.

Questo significa che, detta d la diagonale e l il lato di un quadrato, non esistono numeri interi m, n per i quali $\frac{1}{m}d = \frac{1}{n}l$. Infatti, se ciò accadesse, il rapporto tra d e l sarebbe dato dal numero razionale $\frac{m}{n}$:

$$\frac{d}{l} = \frac{m}{n}$$

¹Per facilitare la dimostrazione, richiamiamo alcuni semplici fatti. Per definizione, un numero $m \in \mathbb{N}$ è pari se è divisibile per 2, cioè se si può scrivere come $m = 2h$, per un opportuno h in \mathbb{N} ; è dispari se diviso per 2 dà resto 1, cioè se si può scrivere come $m = 2k + 1$, con $k \in \mathbb{N}$.

Valgono queste semplici implicazioni:

- (i) m pari $\implies m^2$ pari. (Infatti, $m^2 = (2h)^2 = 2(2h^2)$.)
- (ii) m dispari $\implies m^2$ dispari. (Infatti, $m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$)
- (iii) m^2 pari $\implies m$ pari. (Altrimenti, se m fosse dispari, m^2 sarebbe dispari, per l'implicazione (ii).)
- (iv) m^2 dispari $\implies m$ dispari. (Altrimenti, se m fosse pari, m^2 sarebbe pari, per l'implicazione (i).)

Ma quest'ultima uguaglianza è impossibile. Infatti, per il teorema di Pitagora, abbiamo $d^2 = l^2 + l^2$, ossia $\frac{d}{l} = \sqrt{2}$, e abbiamo dimostrato (teorema 1.1) che $\sqrt{2}$ non si può scrivere come $\frac{m}{n}$, con m, n interi.

1.2 Successioni monotòne limitate

Teorema 1.2 (Successioni monotòne limitate). *Ogni successione in \mathbb{R} che sia crescente*

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots \quad (1.6)$$

e (superiormente) limitata è convergente. Precisamente, converge all'estremo superiore dell'insieme dei suoi termini.

Se invece una successione è decrescente e limitata, convergerà all'estremo inferiore dell'insieme dei suoi termini.

Dimostrazione. Sia (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, una successione crescente e limitata. Chiamiamo

$$A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$$

l'insieme dei suoi elementi. Per ipotesi l'insieme A è (non vuoto e) limitato. Pertanto (qui si usa la completezza dei reali) A ha un estremo superiore. Poniamo $L = \sup A$.

Ricordiamo che, per definizione, l'estremo superiore L di A è la *minima limitazione superiore* di A , cioè l'unico numero $L \in \mathbb{R}$ che soddisfa queste due proprietà:

1. L è una limitazione superiore per A , cioè:

$$a_n \leq L \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

2. Nessun numero $L' < L$ è una limitazione superiore per A , cioè:

Per ogni $L' < L$ esiste un $a_k \in A$ per il quale $L' < a_k$.

Dimostriamo che a_n converge a L . Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Siccome $L - \varepsilon < L$, il numero $L - \varepsilon$ non è una limitazione superiore dell'insieme $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Dunque esiste un intero k per il quale $L - \varepsilon < a_k$. Poiché la successione è crescente, per tutti gli $n > k$ si ha $a_k < a_n$ e quindi $L - \varepsilon < a_n$, definitivamente (cioè, per tutti gli n maggiori di k). Ma per ogni n si ha $a_n \leq L$. Riassumendo, si ha

$$L - \varepsilon < a_n \leq L$$

per tutti gli $n > k$. Per la stessa definizione di limite di una successione, si conclude allora che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$. Q.E.D.

Osservazione. Si dimostra che in un campo ordinato \mathbb{K} , la proprietà delle successioni monotòne limitate (“Ogni successione monotòna limitata converge in \mathbb{K} ”) è equivalente alla proprietà dell'estremo superiore (“Ogni sottoinsieme di \mathbb{K} non vuoto e superiormente limitato ha una minima limitazione superiore”).

1.3 Forma polare del prodotto di due numeri complessi. Formula di De Moivre.

Teorema 1.3 (Prodotto di due numeri complessi in forma polare. Formula di De Moivre.). *Il prodotto dei numeri complessi*

$$z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \quad z' = r'(\cos \vartheta' + i \sin \vartheta') \quad (1.7)$$

è il numero complesso:

$$z \cdot z' = rr'[\cos(\vartheta + \vartheta') + i \sin(\vartheta + \vartheta')] \quad (1.8)$$

In breve, quando si moltiplicano tra loro due numeri complessi, i moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano.

In particolare, vale la Formula di De Moivre:

$$[r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)]^n = r^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta) \quad (1.9)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= [r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)] \cdot [r'(\cos \vartheta' + i \sin \vartheta')] \\ &= rr'[(\cos \vartheta \cos \vartheta' - \sin \vartheta \sin \vartheta') + i(\sin \vartheta \cos \vartheta' + \cos \vartheta \sin \vartheta')] \\ &= rr'[\cos(\vartheta + \vartheta') + i \sin(\vartheta + \vartheta')] \end{aligned}$$

La Formula di De Moivre (1.9) segue subito dalla formula del prodotto (1.8), ponendo $z = z'$ e iterando. Q.E.D.

Osservazione. Dalla formula di moltiplicazione segue che l'inverso del numero $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ è

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} = r^{-1}(\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta)) \quad (1.10)$$

Dalle formule (1.8) e (1.10) segue che *il quoziente di due numeri complessi ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti*: se $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ e $z' = r'(\cos \vartheta' + i \sin \vartheta')$, allora

$$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}(\cos(\vartheta' - \vartheta) + i \sin(\vartheta' - \vartheta)) \quad (1.11)$$

Osservazione. La formula di De Moivre permette di trovare (o ritrovare) diverse identità trigonometriche. Facciamo un esempio ($r = 1, n = 2$): da $(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^2 = \cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta$ segue, sviluppando il quadrato a primo membro

$$\cos^2 \vartheta + 2i \cos \vartheta \sin \vartheta - \sin^2 \vartheta = \cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta$$

e infine, *uguagliando le parti reali e i coefficienti delle parti immaginarie*:

$$\cos 2\vartheta = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \quad \sin 2\vartheta = 2 \cos \vartheta \sin \vartheta$$

(In questo modo è molto più facile ricordare le formule).

1.4 Radici n -esime di un numero complesso

Teorema 1.4 (Radici n -esime di un numero complesso). *Sia $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ un numero complesso non nullo e sia n un intero positivo. Esistono esattamente n numeri complessi che elevati alla potenza n -esima danno come risultato z . Tali numeri sono:*

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.12)$$

Ciascuno di tali numeri z_0, \dots, z_{n-1} si chiama una *radice n -esima* di z . Quindi il teorema dice che ogni numero complesso (non nullo) ha esattamente n radici n -esime. (Nel caso $z = 0$, le n radici n -esime sono coincidenti.)

Dimostrazione. Un numero complesso

$$w = |w|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (1.13)$$

è una radice n -esima di z se $w^n = z$, ossia (per la formula di De Moivre) se

$$|w|^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \quad (1.14)$$

Ora due numeri complessi, scritti in forma polare, sono uguali se e solo se hanno i moduli uguali, e gli argomenti *uguali a meno di multipli interi di 2π* :

$$|w|^n = r, \quad n\alpha = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ma si vede facilmente che si ottengono n radici distinte soltanto per gli n valori $k = 0, 1, \dots, (n-1)$, mentre dando a k un qualunque altro valore, si riottiene una delle radici z_0, \dots, z_{n-1} . Quindi tutte le n radici n -esime distinte hanno modulo e argomento rispettivamente dati da

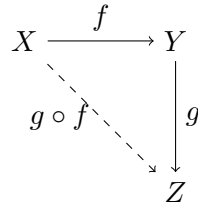
$$\sqrt[n]{r}, \quad \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Q.E.D.

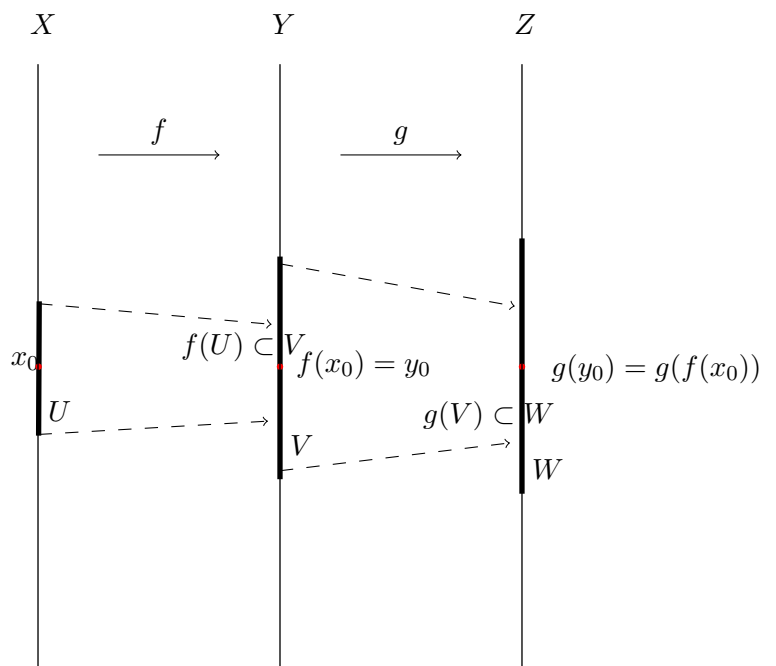
Osservazione. Si noti che le radici n -esime si trovano tutte sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{r}$ e sono equidistanziate tra loro, cioè sono i vertici di un poligono regolare di n lati.

1.5 Continuità della funzione composta

Teorema 1.5 (Composizione di funzioni continue). *Se $X \xrightarrow{f} Y$ e $Y \xrightarrow{g} Z$ sono funzioni continue (X, Y, Z sottoinsiemi di \mathbb{R} , oppure, più in generale, spazi metrici), allora anche la funzione composta $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ è continua.*



Dimostrazione Sia $x_0 \in X$, poniamo $f(x_0) = y_0$, e sia W un qualunque intorno



di $g(f(x_0)) = g(y_0)$.

Per la continuità di g in y_0 , esiste un intorno V di y_0 tale che $g(V) \subset W$. Del resto, poiché f è continua in x_0 , esiste un intorno U di x_0 per il quale $f(U) \subset V$. Poiché da $f(U) \subset V$ segue $g(f(U)) \subset g(V)$, si ha

$$(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$$

Questo prova la continuità della funzione composta in x_0 . Poiché x_0 è un punto arbitrario di X , abbiamo dimostrato la continuità della funzione composta $g \circ f$.
Q.E.D.

1.6 Teorema degli Zeri

Teorema 1.6 (Teorema degli Zeri). *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Siano a, b due punti appartenenti a I , con $a < b$. Supponiamo che i valori $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segni opposti ($f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, o viceversa). Allora esiste almeno un punto $\alpha \in (a, b)$ in cui si ha $f(\alpha) = 0$.*

Dimostrazione La dimostrazione del Teorema degli Zeri è costruttiva, cioè presenta un algoritmo (detto **metodo di bisezione** o metodo dicotomico) per mezzo del quale è possibile trovare un punto in cui f si annulla. Per fissare le idee supponiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ e consideriamo il punto medio $c = \frac{a+b}{2}$ dell'intervallo $[a, b]$. Possono presentarsi due casi. Se $f(c) = 0$ il problema è risolto (abbiamo trovato uno zero di f). Se invece $f(c) \neq 0$, scegliamo tra i due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ quello in cui la funzione f assume valori discordi agli estremi. Tenuto conto delle nostre scelte iniziali ($f(a) < 0$ e $f(b) > 0$), si tratta di scegliere l'intervallo in cui la funzione assume valore negativo nell'estremo di sinistra e valore positivo nell'estremo di destra. Quindi se $f(c) \neq 0$, scegliamo l'intervallo $I_1 = [i_1, j_1]$ nel modo seguente :

$$I_1 = [i_1, j_1] = \begin{cases} [a, c] & \text{se } f(c) > 0 \\ [c, b] & \text{se } f(c) < 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Operiamo ora sull'intervallo $I_1 = [i_1, j_1]$ nello stesso modo in cui abbiamo operato sull'intervallo $[a, b]$. Precisamente: sia c_1 il punto medio di $[i_1, j_1]$. Se $f(c_1) = 0$ il problema è risolto (c_1 è uno zero di f). Altrimenti scegliamo tra i due intervalli $[i_1, c_1]$ e $[c_1, j_1]$ quello in cui la funzione assume valore negativo nell'estremo di sinistra e positivo nell'estremo di destra.

Iterando questo procedimento, si possono avere due casi:

1. Esiste un intero positivo k tale che la funzione si annulla nel punto medio c_k dell'intervallo $[i_k, j_k]$. In questo caso abbiamo trovato un punto c_k nel quale la funzione f si annulla, e la tesi del teorema è dimostrata.

2. La funzione non si annulla in nessun punto medio c_k . In questo caso otteniamo una successione infinita di intervalli compatti inscatolati

$$[i_1, j_1] \supset [i_2, j_2] \supset [i_3, j_3] \supset \dots \supset [i_n, j_n] \supset \dots$$

con le due seguenti proprietà:

(a) nell'estremo di sinistra di ogni intervallo la funzione assume valore negativo, mentre nell'estremo di destra assume valore positivo, cioè per ogni k ($0 \leq k \leq n$) abbiamo $f(i_k) < 0$ e $f(j_k) > 0$.

(b) gli intervalli hanno ampiezza $j_k - i_k = \frac{b-a}{2^k}$

Abbiamo dunque costruito una successione di intervalli compatti inscatolati le cui ampiezze tendono a zero. Per il teorema sugli intervalli inscatolati (conseguenza della completezza di \mathbb{R}) esiste un unico numero reale α che appartiene a tutti gli intervallini $[i_n, j_n]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. A tale numero α convergono le due successioni i_n e j_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} i_n = \alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} j_n$$

Poiché f è continua in $x = \alpha$ (f commuta con \lim , nel senso che $f \lim = \lim f$), abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(i_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} i_n\right) = f(\alpha) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(j_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} j_n\right) = f(\alpha)$$

Ma poiché $f(i_n) < 0$ (per ogni n), risulta

$$f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(i_n) \leq 0$$

(perché il limite di una successione di termini $f(i_n) < 0$ è certamente ≤ 0). Analogamente, poiché $f(j_n) > 0$ per ogni n , si deve avere

$$f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(j_n) \geq 0$$

Poiché le due ultime disuguaglianze devono valere contemporaneamente, abbiamo $f(\alpha) = 0$ e quindi α è uno zero di f . Q.E.D.

1.7 Teorema dei Valori Intermedi

Teorema 1.7 (Teorema dei Valori Intermedi). Una funzione continua trasforma connessi in connessi). Sia I un intervallo di \mathbb{R} e sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Se a e b appartengono a I , la funzione f assume ogni valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$. Detto altrimenti, l'immagine $J = f(I)$ di f è un intervallo.

In breve: Le funzioni continue da \mathbb{R} a \mathbb{R} trasformano intervalli in intervalli.

Dimostrazione Siano $a' = f(a)$ e $b' = f(b)$ due punti di $f(I)$; supponiamo $a' < b'$. Sia w un numero tale che $a' < w < b'$. Dobbiamo dimostrare che $w \in f(I)$. Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - w, \quad x \in [a, b]$$

Tale funzione è ovviamente continua sull'intervallo $[a, b]$ e si ha:

$$g(a) = f(a) - w = a' - w < 0 \quad g(b) = f(b) - w = b' - w > 0 \quad (1.16)$$

Dunque la funzione g soddisfa le ipotesi del Teorema degli Zeri (1.6) sull'intervallo $[a, b]$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ per il quale $g(c) = f(c) - w = 0$, ossia $f(c) = w$, come si voleva dimostrare. Q.E.D.

Commento. Definiamo la seguente proprietà, detta di Darboux:

Proprietà (di Darboux). Una funzione $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, I intervallo di \mathbb{R} , soddisfa la proprietà di Darboux se per ogni $x_1, x_2 \in I$, f assume sull'intervallo $[x_1, x_2]$ ogni valore compreso tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

Il teorema dei Valori Intermedi 1.7 si può allora enunciare dicendo che le funzioni continue su un intervallo soddisfano la proprietà di Darboux. Non è però vero il viceversa. Un controesempio è fornito dalla funzione seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Si vede facilmente che questa funzione soddisfa la proprietà di Darboux. Ma f non è continua su \mathbb{R} , perché in $x_0 = 0$ presenta una discontinuità non eliminabile.

1.8 Derivabilità implica continuità

Teorema 1.8 (Derivabilità implica continuità). *Se f è derivabile in x_0 , allora è continua in x_0 .*

Dimostrazione. Partiamo dall'identità (valida per $x \neq x_0$)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

Allora²:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \right) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

Questo prova che f è continua in x_0 .

Un'altra dimostrazione è la seguente. Poiché f è differenziabile in x_0 , si scrive

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad (\text{per } h \rightarrow 0)$$

Passando al limite:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)] \\ &= f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0)h + \lim_{h \rightarrow 0} o(h) \\ &= f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} f'(x_0)h + \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{o(h)}{h} \\ &= f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0) \end{aligned}$$

Q.E.D.

²Si ricordi che se esistono i limiti di $g_1(x)$ e $g_2(x)$ per $x \rightarrow x_0$, allora *il limite della somma $g_1(x) + g_2(x)$ è la somma dei limiti*. Si noti che, a secondo membro, $f(x_0)$ è una costante e quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = f(x_0)$

1.9 Teorema di Fermat

Teorema 1.9 (Fermat). Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione a valori reali definita su un insieme $D \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che:

1. x_0 sia un punto di massimo (o di minimo) locale per f ;
2. x_0 sia interno a D ;
3. f sia derivabile in x_0 .

Allora x_0 è un punto stazionario di f , cioè $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Per fissare le idee, supponiamo che x_0 sia un punto di massimo locale per f . Poiché, per ipotesi, x_0 è al tempo stesso un punto interno al dominio D di f e un punto di massimo locale, esiste un intorno sufficientemente piccolo I di x_0 con le due proprietà seguenti³:

$$I \subset D \tag{1.18}$$

(perché x_0 è interno a D) e

$$\forall x \in I \quad f(x) - f(x_0) \leq 0 \tag{1.19}$$

(perché x_0 è punto di massimo locale). Per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$, si ha allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \tag{1.20}$$

se $x > x_0$ e

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \tag{1.21}$$

si ricava⁴ rispettivamente $f'(x_0) \leq 0$ e $f'(x_0) \geq 0$. Di conseguenza $f'(x_0) = 0$.
Q.E.D.

Osservazione. Si noti che nel teorema dimostrato è essenziale l'ipotesi che x_0 sia interno a D . (Non basta che il punto x_0 appartenga a D). Ad esempio, la funzione $f(x) = x$ nell'intervallo $D = [0, 1]$ ha un punto di massimo locale in $x_0 = 1$, anche se la derivata (sinistra) di f in x_0 non è nulla (è uguale a 1). Naturalmente questo non contraddice il teorema di Fermat. Semplicemente non sono soddisfatte le ipotesi di tale teorema, perché il punto $x_0 = 1$ non è interno a $D = [0, 1]$.

³Sappiamo che esiste un intorno U di x_0 che soddisfa la condizione $U \subset D$ e esiste un intorno V di x_0 su cui vale $f(x) \leq f(x_0)$. Allora sull'intersezione $I = U \cap V$ (che è ancora un intorno di x_0) sono soddisfatte entrambe le condizioni.

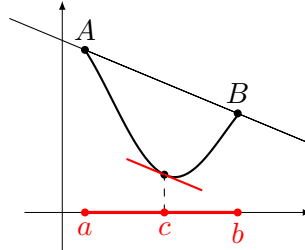
⁴Qui si usa il teorema di *Permanenza del Segno*: Sia g una funzione definita su un intorno U di un punto x_0 (con la possibile eccezione del punto x_0). Supponiamo che, per ogni $x \in U \setminus x_0$, si abbia $g(x) \geq 0$ e supponiamo che esista (finito) il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$. Allora si ha $L \geq 0$.

1.10 Teorema del Valore Medio (di Lagrange)

Teorema 1.10 (del Valore Medio, o di Lagrange). Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo compatto $[a, b]$ e derivabile sull'intervallo aperto (a, b) . Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ per il quale si ha

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (1.22)$$

Dimostrazione.



La funzione, definita sull'intervallo $[a, b]$,

$$g(x) = f(x) - \underbrace{\left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]}_{\text{retta } AB}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Dunque, esiste un punto c in (a, b) in cui $g'(c) = 0$. La derivata di $g(x)$ è

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quindi si ha

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

che è la tesi. □

Osservazione. Il teorema di Lagrange ha la seguente interpretazione geometrica. Si noti che il numero $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è il coefficiente angolare della retta (secante) che passa per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, di equazione

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (1.23)$$

Quindi il teorema afferma che esiste almeno un punto $(c, f(c))$ appartenente al grafico della funzione f in cui la retta tangente (il cui coefficiente angolare è $f'(c)$) è parallela alla retta secante che unisce i due punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Si noti che la funzione ausiliaria (1.10) è la differenza tra l'ordinata del punto $(x, f(x))$ sul grafico di f e l'ordinata del punto di coordinate

$$\left(x, f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)$$

sulla retta secante.

1.11 Funzioni con derivata di segno costante su un intervallo

Teorema 1.11 (Funzioni con derivata di segno costante su un intervallo). *Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un intervallo aperto I di \mathbb{R} .*

1. *Se, per ogni $x \in I$, $f'(x) > 0$, allora f è strettamente crescente su I .*
2. *Se, per ogni $x \in I$, $f'(x) < 0$, allora f è strettamente decrescente su I .*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per il caso di funzioni con derivata positiva in ogni punto. (L'altro caso si tratta in modo analogo).

Siano x_1, x_2 due punti di I , con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange esiste un punto c , compreso tra x_1 e x_2 , per il quale si ha:

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$$

Poiché per ipotesi $f'(c) > 0$ e $x_1 - x_2 < 0$, si deve avere $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Abbiamo allora dimostrato che, per ogni $x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

Dunque f è strettamente crescente su I .

Q.E.D.

Osservazione. L'ipotesi che il dominio di f sia un *intervallo* (cioè, un insieme connesso), non si può eliminare. Ad esempio, la funzione $f(x) = -1/x$, definita su $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ha derivata positiva su D ($f'(x) = 1/x^2$), ma f non è strettamente crescente *sul suo dominio* D . Ovviamente (per il teorema dimostrato sopra), f è crescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$ (che è un intervallo) ed è crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$ (che è un intervallo), ma non è crescente sul suo dominio $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (che non è un intervallo).

Osservazione. Il teorema non si inverte. Più precisamente, esistono funzioni derivabili e strettamente crescenti che in alcuni punti hanno derivata nulla. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, è strettamente crescente su \mathbb{R} , ma $f'(0) = 0$.

Quindi l'affermazione:

“Se f è strettamente crescente e derivabile, allora $f'(x) > 0$ per ogni x ,”
è falsa.

Invece, l'affermazione:

“Se f è strettamente crescente e derivabile, allora $f'(x) \geq 0$ per ogni x ,”
è vera.

1.12 Funzioni con derivata nulla su un intervallo

Teorema 1.12 (Funzioni con derivata nulla su un intervallo). *Una funzione definita su un intervallo aperto $I = (a, b)$ e con derivata nulla in ogni punto di tale intervallo è costante.*

Dimostrazione. Prendiamo due punti qualunque x_1, x_2 in (a, b) , $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange – applicato all’intervallo $[x_1, x_2]$ – esiste un punto c , compreso tra x_1 e x_2 , per il quale si ha:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

Ne segue $f(x_1) = f(x_2)$. Quindi f è costante.

Q.E.D.

Osservazione. Si noti che in questo teorema è essenziale l’ipotesi che il dominio della funzione sia un *intervallo* (un sottoinsieme *connesso* di \mathbb{R}).

Esempio 1. La funzione

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ 1 & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

ha derivata nulla in ogni punto del suo dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ma non è costante. (Si noti che $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ non è un intervallo di \mathbb{R} , cioè non è *connesso*).

Esempio 2. La funzione

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

ha derivata nulla in ogni punto del suo dominio (come si verifica facilmente calcolando la derivata), ma non è costante. Precisamente,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pi/2 \quad \text{per } x > 0$$

e

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\pi/2 \quad \text{per } x < 0$$

1.13 Formula di Taylor (locale) con il resto di Peano

Teorema 1.13 (Formula di Taylor locale, resto di Peano). *Sia f una funzione definita in un intorno J di x_0 e derivabile n volte in x_0 (n intero positivo). Si definisca il resto $R_n(x)$ attraverso l'uguaglianza*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (1.24)$$

Allora $R_n(x)$ è, per $x \rightarrow x_0$, un $o((x-x_0)^n)$, cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \quad (1.25)$$

In breve: *Se f una funzione definita in un intorno di x_0 e derivabile n volte in x_0 (n intero positivo), allora*

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)} \quad (1.26)$$

(Il resto è un $o((x-x_0)^n)$ per $x \rightarrow x_0$.)

Dimostrazione. Dimostriamo la formula di Taylor (1.26) nel caso $n = 2$. Si deve dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 0 \quad (1.27)$$

ossia, in modo equivalente, si deve dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2!} \quad (1.28)$$

Usiamo la regola dell'Hospital (della quale sono soddisfatte le ipotesi, come si vede facilmente). Per la regola dell'Hospital, il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}$$

è uguale al limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x-x_0)}$$

sotto la condizione che tale ultimo limite esista. Ora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x-x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

per la definizione stessa di $f''(x_0)$. Quindi, concludiamo che vale la tesi (1.29):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2!} \quad (1.29)$$

Il caso $n = 2$ è dunque dimostrato.

La dimostrazione nel caso generale (n qualunque) è del tutto analoga. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \dots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = 0 \quad (1.30)$$

ossia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \dots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (1.31)$$

Usiamo la regola dell'Hospital. Calcolando successivamente il rapporto delle derivate. Otteniamo infine

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (1.32)$$

per la definizione stessa di derivata $f^{(n)}(x_0)$. Dunque, per l'Hospital vale (1.31) e il teorema è così dimostrato. Q.E.D.

Osservazione Per $n = 1$, la formula di Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o((x-x_0)) \quad (x \rightarrow x_0) \quad (1.33)$$

è la proprietà di differenziabilità di f in x_0 .

1.14 Teorema della Media Integrale

Denotiamo $\mathcal{R}[a, b]$ lo spazio delle funzioni Riemann-integrabili su $[a, b]$.

Teorema 1.14 (Teorema della Media Integrale). *Sia $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Siano*

$$m = \inf f \quad M = \sup f \quad (1.34)$$

l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f su $[a, b]$. Allora

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \quad (1.35)$$

Inoltre, se f è continua, esiste un punto c in $[a, b]$ per il quale vale l'uguaglianza:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c) \quad (1.36)$$

Dimostrazione. Da $m \leq f(x) \leq M$ (per ogni $x \in [a, b]$) segue, per la proprietà di monotonia dell'integrale,

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \quad (1.37)$$

ossia

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (1.38)$$

(in quanto $\int_a^b m dx = m(b-a)$ e $\int_a^b M dx = M(b-a)$). Di qui segue subito la tesi (1.35).

Per dimostrare (1.36), supponiamo f continua su $[a, b]$. Per le disuguaglianze (1.35), il numero

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (1.39)$$

è compreso tra l'estremo inferiore m e l'estremo superiore M di f in $[a, b]$. Poiché f è continua sull'intervallo $[a, b]$, assume tutti i valori compresi tra il suo estremo inferiore e il suo estremo superiore (Teorema dei Valori Intermedi). Quindi esiste un punto $c \in [a, b]$ per il quale vale (1.36). Q.E.D.

1.15 Continuità della funzione integrale

Denotiamo $\mathcal{R}[a, b]$ lo spazio delle funzioni Riemann-integrabili su $[a, b]$. Sappiamo che esistono funzioni che non sono continue su $[a, b]$, ma sono comunque Riemann-integrabili su $[a, b]$. Vale però il seguente risultato: se f è una qualunque funzione Riemann-integrabile su $[a, b]$ (anche non continua), la sua funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è continua.

Teorema 1.15 (Continuità della funzione integrale). *Sia $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Allora la funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1.40)$$

è continua su $[a, b]$.

Più precisamente, la dimostrazione di questo teorema assicura che F soddisfa una *condizione di Lipschitz*: esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che

$$|F(z) - F(w)| \leq K|z - w| \quad (1.41)$$

per ogni $w, z \in [a, b]$.

Dimostrazione. Per ipotesi f , essendo integrabile, è limitata: esiste una costante $K > 0$ per cui $|f(x)| \leq K$ per ogni $x \in [a, b]$.

Sia $x_0 \in [a, b]$ arbitrario. Allora, per ogni $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f| \right| && \text{perché } \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \quad (a < b) \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x K \right| && \text{perché } |f| \leq K \\ &= K|x - x_0| \end{aligned}$$

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, se $|x - x_0| < \delta = \varepsilon/K$, si ha $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$. Dunque F è continua in x_0 . Q.E.D.

Osservazione 1 Il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale* (che vedremo più avanti), dice che se f è continua, allora la sua funzione integrale F è addirittura derivabile e $F' = f$.

1.16 Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. (Derivata della funzione integrale e Formula di Newton–Leibniz)

Teorema 1.16 (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Caso f continua.). *Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora valgono i due fatti seguenti.*

1 (Derivata della funzione integrale)

Poniamo

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b] \quad (1.42)$$

(F si chiama funzione integrale di f , con punto iniziale a). Allora F è una antiderivata (o primitiva) di f , ossia F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni x in $[a, b]$:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x) \quad (1.43)$$

2 (Formula di Newton–Leibniz)

Se G è una qualunque antiderivata (o primitiva) di f su $[a, b]$ (ossia G è una funzione differenziabile su $[a, b]$ tale che $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$), allora

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a) \quad (1.44)$$

Dimostrazione

1. (Derivata della funzione integrale)

Fissiamo un punto x in $[a, b]$. Allora

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c) \quad (1.45)$$

dove c è un opportuno punto tra x e $x+h$. La (1.45) segue dal Teorema della Media Integrale, applicato all'intervallo di estremi x e $x+h$. Quando h tende a zero, il punto c , compreso tra x e $x+h$, tende a x . Poiché f è continua, $f(c)$ tende a $f(x)$ e quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \quad (1.46)$$

Dunque $F'(x) = f(x)$.

2. (Formula di Newton–Leibniz)

Sia $G(x)$ una qualunque primitiva di $f(x)$ su $[a, b]$. Poiché

$$G'(x) = f(x) = F'(x)$$

le due funzioni $G(x)$ e $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ hanno la stessa derivata sull'intervallo $[a, b]$. Quindi differiscono per una costante:

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt + c \quad (1.47)$$

Ponendo in questa uguaglianza prima $x = b$ e poi $x = a$ e sottraendo, si ottiene la tesi:

$$G(b) - G(a) = \left[\int_a^b f(t) dt + c \right] - \left[\int_a^a f(t) dt + c \right] \quad (1.48)$$

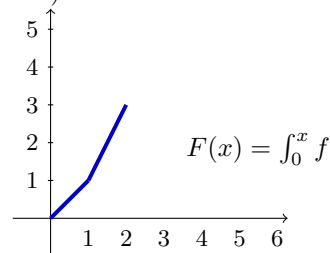
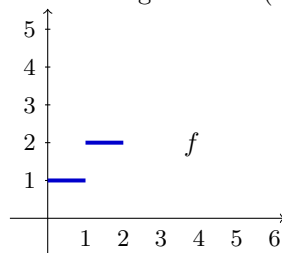
$$= \int_a^b f(t) dt \quad (1.49)$$

Q.E.D.

Osservazione 1 Si noti che il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale* dice che la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è derivabile quando f è continua. Se invece f è integrabile ma non continua, non è detto che $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ sia derivabile. Ad esempio, consideriamo la funzione

$$[0, 2] \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

La funzione f è (Riemann-)integrabile su $[0, 2]$ (con $\int_0^2 f = 3$), ma non è continua in $x_0 = 1$. La funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è comunque ben definita, e anch'essa ha dominio $[0, 2]$, ma non è derivabile in $x_0 = 1$. Infatti, in tale punto la funzione integrale F è ancora continua (la funzione integrale F è sempre continua, anche quando f non lo è), ma non è derivabile. Infatti, la derivata sinistra di F in $x_0 = 1$ vale 1, mentre la derivata destra è uguale a 2. (Si vedano i grafici qui sotto.)



Osservazione 2 Si noti che dal *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale* segue che, se la funzione integranda f è di classe C^0 (ossia, è continua), la sua funzione integrale F è di classe C^1 . Di conseguenza, se f è di classe C^k , F è di classe C^{k+1} .

Osservazione 3 Abbiamo dimostrato che la derivata della funzione integrale coincide con la funzione integranda (*Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*) sotto l'ipotesi che la funzione integranda f sia continua *su tutto l'intervallo* $[a, b]$, cioè continua *in ogni punto* $x \in [a, b]$. Ma quest'ultima ipotesi si può indebolire. Si può infatti dimostrare che se esiste un punto x_0 in cui f è continua, la funzione integrale F è derivabile in quel punto x_0 . Ovviamente, quest'ultimo enunciato implica il precedente. Più precisamente, vale questa formulazione del *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*, della quale, per completezza, riportiamo la dimostrazione.

Teorema 1.17 (TFCI, Caso ‘puntuale’; f integrabile e continua in un punto). *Sia $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, b]$. Definiamo F su $[a, b]$ ponendo*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \tag{1.50}$$

Se f è continua in un punto $x_0 \in [a, b]$, allora F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

(Se $x_0 = a$, oppure $x_0 = b$, con $F'(x_0)$ intendiamo, rispettivamente, la derivata di F da destra, o da sinistra.)

Dimostrazione

Sia $x_0 \in (a, b)$. Dimostriamo dapprima che la funzione integrale F di punto iniziale a , definita da

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è derivabile a destra in x_0 e $F'_+(x_0) = f(x_0)$. Poiché f è continua in x_0 , dato $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $x_0 \leq x < x_0 + \delta$, allora

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \tag{1.51}$$

Sia $0 < h < \delta$. Integrando sull'intervallo $[x_0, x_0 + h]$, e usando la proprietà di monotonia, otteniamo

$$(f(x_0) - \varepsilon) \cdot h < \int_{x_0}^{x_0+h} f < (f(x_0) + \varepsilon) \cdot h \quad (1.52)$$

Ora $\int_{x_0}^{x_0+h} f = F(x_0 + h) - F(x_0)$. (Infatti, $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^{x_0+h} f$). Dunque le disuguaglianze (1.52) si scrivono

$$(f(x_0) - \varepsilon) \cdot h < F(x_0 + h) - F(x_0) < (f(x_0) + \varepsilon) \cdot h \quad (1.53)$$

Se dividiamo per $h > 0$, otteniamo

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} < f(x_0) + \varepsilon \quad (1.54)$$

Ma, poiché ε è arbitrario, concludiamo che

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0) \quad (1.55)$$

Questo significa che la derivata destra di F in x_0 esiste ed è uguale a $f(x_0)$.

Nello stesso modo si dimostra che F è derivabile da sinistra in x_0 , e $F'_-(x_0) = f(x_0)$. Quindi F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$. La stessa dimostrazione vale anche quando $x_0 = a$ (oppure $x_0 = b$). In questo caso, F è derivabile solo da destra (rispettivamente, solo da sinistra) e $F'_+(a) = f(a)$ (rispettivamente, $F'_+(b) = f(b)$).

Q.E.D.

1.17 Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$

Teorema 1.18 (Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$). *L'integrale generalizzato*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx \quad \begin{cases} \text{è divergente} & \text{se } a \leq 1 \\ \text{è convergente} & \text{se } a > 1 \end{cases} \quad (1.56)$$

Dimostrazione Se $a = 1$, abbiamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t - \ln 1) = +\infty \quad (1.57)$$

e quindi l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ è divergente.

Se $a \neq 1$, si ha

$$\int_1^t \frac{1}{x^a} dx = \frac{1}{1-a} [x^{1-a}]_1^t = \frac{1}{1-a} (t^{1-a} - 1) \quad (1.58)$$

Ora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-a} (t^{1-a} - 1) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 1 \\ \frac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Riassumendo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx \quad \begin{cases} \text{è divergente} & \text{se } a \leq 1 \\ \text{è convergente} & \text{se } a > 1 \end{cases} \quad (1.59)$$

Q.E.D.

1.18 Criterio del confronto asintotico per le serie

Come per gli integrali generalizzati, anche per le serie numeriche *a termini positivi* valgono il criterio del confronto e il criterio del confronto asintotico.

Per completezza, premettiamo il criterio del confronto (del quale il criterio del confronto asintotico è conseguenza).

Teorema 1.19 (Criterio del confronto). *Siano a_n e b_n successioni reali e supponiamo che per qualche $K \in \mathbb{N}$ si abbia*

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{per } n \geq K \quad (1.60)$$

Allora:

- (a) *La convergenza di $\sum b_n$ implica la convergenza di $\sum a_n$.*
- (b) *La divergenza di $\sum a_n$ implica la divergenza di $\sum b_n$.*

Dimostrazione. Se $S_k = a_0 + \dots + a_k$ e $S'_k = b_0 + \dots + b_k$, dalle disuguaglianze (1.60) segue

$$0 \leq S_k \leq S'_k$$

Quindi: se la successione S'_k converge, allora la successione S_k converge; e se la successione S_k diverge, allora la successione S'_k diverge. \square

Ricordiamo ora la relazione di equivalenza asintotica tra successioni:

Date due successioni reali positive a_n e b_n ($n \in \mathbb{N}$), si dice che a_n è *asintoticamente equivalente* a b_n , e si scrive

$$a_n \sim b_n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Teorema 1.20 (Criterio del confronto asintotico). *Siano a_n e b_n successioni reali positive. Supponiamo $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$. Allora le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere, vale a dire entrambe convergono oppure entrambe divergono a $+\infty$.*

Dimostrazione. Per ipotesi, $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$. Per definizione di limite, questo significa: fissato $\varepsilon > 0$, per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grandi, si ha

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| < \varepsilon \quad (1.61)$$

cioè:

$$1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon \quad (1.62)$$

Per i nostri scopi, ci basta fissare un qualunque valore di ε per il quale si abbia $1 - \varepsilon > 0$ (in modo tale che le disuguaglianze seguenti siano tutte tra termini positivi). Diciamo, ad esempio, $\varepsilon = \frac{1}{2}$; dunque, $1 - \varepsilon = \frac{1}{2}$ e $1 + \varepsilon = \frac{3}{2}$. Scriviamo allora la (1.62) come

$$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} \quad (1.63)$$

Poiché $b_n > 0$, la (1.62) equivale (per n sufficientemente grande) alle disuguaglianze tra termini positivi:

$$\frac{1}{2}b_n < a_n < \frac{3}{2}b_n \quad (1.64)$$

La tesi segue allora dalle disuguaglianze (1.64) e dal *Criterio del Confronto* (1.19). Infatti:

1. Se $\sum_n a_n$ converge, allora, poiché $\frac{1}{2}b_n < a_n$, anche $\sum_n \frac{1}{2}b_n$ converge. Quindi anche $\sum_n b_n$ converge.
2. Se $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$, allora, poiché $a_n < \frac{3}{2}b_n$, anche $\sum_n \frac{3}{2}b_n$ diverge a $+\infty$. Quindi $\sum_n b_n$ diverge a $+\infty$. \square

1.19 Criterio della radice (di Cauchy) per le serie

Teorema 1.21 (Criterio della radice). *Sia $\sum_n a_n$ una serie a termini positivi, e supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \quad (1.65)$$

Allora:

1. Se $0 \leq L < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge.
2. Se $L > 1$, o $L = +\infty$, la serie $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$.

Dimostrazione. 1. Supponiamo $0 \leq L < 1$. Scegliamo un q che soddisfi $L < q < 1$. Poiché $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow L < q$, esiste n_0 tale che

$$\sqrt[n]{a_n} < q \quad (1.66)$$

per tutti gli $n > n_0$. Allora avremo $a_n < q^n$ per tutti gli $n > n_0$, e siccome la serie geometrica $\sum_n q^n$ converge (in quanto $q < 1$), concludiamo, per il *Criterio del Confronto* (Teorema 1.19) che anche la serie $\sum_n a_n$ converge.

2. Se invece $L > 1$, si avrà definitivamente $\sqrt[n]{a_n} > 1$, e quindi (elevando alla potenza n -esima), si ha definitivamente (cioè, per tutti gli n sufficientemente grandi) $a_n > 1$. Pertanto, la successione a_n non tende a zero, e quindi la serie $\sum_n a_n$ non converge (altrimenti, la successione a_n tenderebbe a zero). Quindi la serie $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$ (non potendo oscillare, in quanto, essendo una serie a termini positivi, non può oscillare, perché la somma delle somme parziali è crescente). \square

Osservazione Nel caso si abbia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L = 1$$

non si può concludere nulla. Per convincersene, consideriamo le due serie

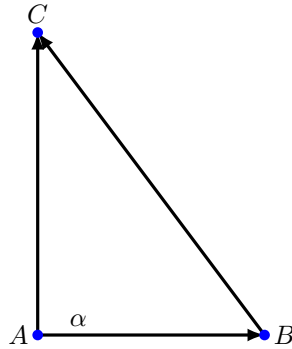
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

In entrambi i casi, si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L = 1$, ma le due serie si comportano in modo diverso: la prima diverge a $+\infty$, la seconda converge.

1.20 Teorema di Pitagora (e teorema di Carnot)

Teorema 1.22 (Teorema di Pitagora). *In un triangolo rettangolo, siano a, b, c le lunghezze, rispettivamente, dell'ipotenusa e dei cateti. Allora*

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{1.67}$$



Dimostrazione. Consideriamo i tre vettori \vec{AB} , \vec{AC} e $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$. Allora, poiché $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} a^2 &= |\vec{BC}|^2 = |\vec{AC} - \vec{AB}|^2 \\ &= (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= \vec{AC} \cdot \vec{AC} - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AB} \\ &= |\vec{AC}|^2 + |\vec{AB}|^2 \\ &= b^2 + c^2 \end{aligned}$$

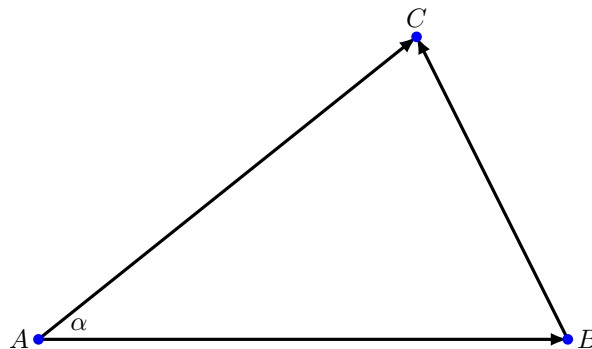
□

Più in generale, vale il:

Teorema 1.23 (Teorema di Carnot). *In un triangolo qualunque ABC , chiamiamo a, b, c le lunghezze dei lati che sono opposti, rispettivamente, ai vertici A, B, C , e sia α l'angolo di vertice A . Allora*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \tag{1.68}$$

Dimostrazione. Consideriamo i tre vettori \vec{AB} , \vec{AC} e $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$.



Allora:

$$\begin{aligned} |\vec{BC}|^2 &= |\vec{AC} - \vec{AB}|^2 \\ &= (\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= \vec{AC} \cdot \vec{AC} - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AB} \\ &= |\vec{AC}|^2 + |\vec{AB}|^2 - 2|\vec{AC}||\vec{AB}|\cos\alpha \end{aligned}$$

Poiché

$$|\vec{BC}| = a, \quad |\vec{AC}| = b, \quad |\vec{AB}| = c,$$

abbiamo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad (1.69)$$

come volevamo dimostrare. Si noti che se l'angolo α è retto (e quindi $\cos\alpha = 0$), ritroviamo il teorema di Pitagora:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (1.70)$$

□

1.21 Derivata di un vettore di lunghezza costante

Teorema 1.24 (Derivata di un vettore di lunghezza costante). *Se la lunghezza di un vettore $\mathbf{v}(t)$ in \mathbb{R}^3 (o \mathbb{R}^2) è costante (al variare di t in un intervallo I di \mathbb{R}), allora il vettore derivato $\mathbf{v}'(t)$ è ortogonale a $\mathbf{v}(t)$.*

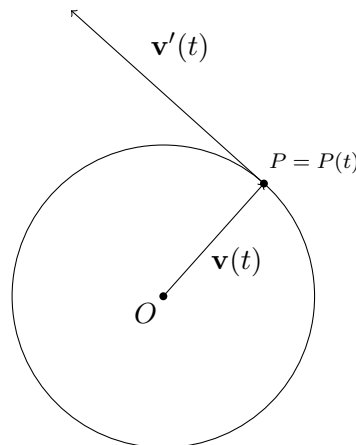
Dimostrazione Poiché $|\mathbf{v}(t)|^2 = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ è costante, la sua derivata (che si calcola con la Regola di Leibniz) è nulla:

$$0 = (\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t))' = \mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) = 2\mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t)$$

Ne segue che $\mathbf{v}'(t)$ è ortogonale a $\mathbf{v}(t)$.

Q.E.D.

Osservazione (*Una interpretazione cinematica.*) Supponiamo che $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^2$ ($t \in \mathbb{R}$) abbia lunghezza costante. Se pensiamo a $\mathbf{v}(t)$ come a un vettore spiccato dall'origine O di \mathbb{R}^2 , tale vettore, avendo lunghezza costante, descrive il moto di un punto $P = P(t)$ che si muove sulla circonferenza di centro O e raggio uguale alla lunghezza di $\mathbf{v}(t)$.



Il vettore $\mathbf{v}'(t)$ si interpreta allora come il vettore velocità istantanea all'istante t . Pertanto $\mathbf{v}'(t)$ è tangente alla traiettoria (la circonferenza) e quindi è ortogonale al raggio $\mathbf{v}(t)$. (Il fatto che $\mathbf{v}(t)$ abbia lunghezza costante non implica che $\mathbf{v}'(t)$ abbia lunghezza costante; ossia, il moto è circolare, ma non necessariamente uniforme).

Applicazione (*Definizione del vettore normale \mathbf{N}*). Sia $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata alla lunghezza d'arco. Allora il vettore tangente $\mathbf{T}(s) = \underline{\alpha}'(s)$ ha lunghezza costante, uguale a 1. Sia $s \in I$ un valore del parametro per il quale si abbia $\mathbf{T}'(s) \neq 0$. Allora il vettore normale $\mathbf{N} = \mathbf{N}(s)$ in s è il vettore unitario, ortogonale a $\mathbf{T}(s)$, definito dall'uguaglianza

$$\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s) \tag{1.71}$$

dove $k(s) = |\mathbf{T}'(s)| > 0$ è la curvatura in s .

1.22 Proiezione di un vettore lungo un altro

Teorema 1.25 (Proiezione di un vettore lungo un altro). *Sia $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ un vettore non nullo. Ogni vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ si scrive in modo unico come*

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) + \mathbf{a}_{\perp} \quad (1.72)$$

con $\mathbf{P}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$ parallelo a \mathbf{b} (cioè, multiplo di \mathbf{b}) e \mathbf{a}_{\perp} ortogonale a \mathbf{b} . Si ha:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \right) \mathbf{b} \quad (1.73)$$

Definizione Il vettore $\mathbf{P}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$ si chiama proiezione ortogonale di \mathbf{a} lungo \mathbf{b} .

Dimostrazione Si deve avere $\mathbf{P}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = t\mathbf{b}$, per un opportuno scalare $t \in \mathbb{R}$. Il vettore $\mathbf{a} - \mathbf{P}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \mathbf{a} - t\mathbf{b}$ è ortogonale a \mathbf{b} se e solo se

$$(\mathbf{a} - t\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b}) = 0$$

ossia (per bilinearità) se e solo se

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - t(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = 0 \quad (1.74)$$

Questa è un'equazione di primo grado in t . Poiché $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \neq 0$ (perché $\mathbf{b} \neq 0$), l'equazione (1.74) ha un'unica soluzione

$$t = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}$$

Dunque, la proiezione ortogonale di \mathbf{a} lungo \mathbf{b} è

$$\mathbf{P}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \right) \mathbf{b} \quad (1.75)$$

Q.E.D.

Osservazione 1 Se $|\mathbf{u}| = 1$, la formula che dà la proiezione ortogonale si semplifica nel modo seguente:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (\text{Vale solo se } |\mathbf{u}| = 1).$$

Osservazione 2 La stessa dimostrazione e la stessa formula continuano a valere per vettori \mathbf{a}, \mathbf{b} ($\mathbf{b} \neq 0$) in un qualunque spazio euclideo \mathbb{R}^n .

1.23 Equivalenza di due definizioni di curvatura

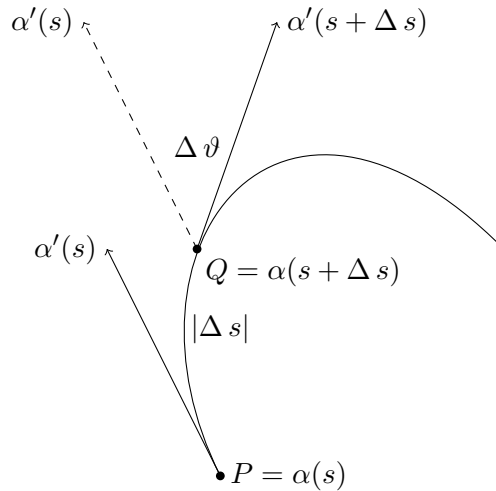


Figura 1: Chiamiamo $\Delta\vartheta(> 0)$ l'ampiezza dell'angolo tra i due vettori tangenti unitari $\alpha'(s + \Delta s)$ e $\alpha'(s)$, tangenti alla curva α rispettivamente nei punti $Q = \alpha(s + \Delta s)$ e $P = \alpha(s)$. Poiché il parametro è la lunghezza d'arco (misurata a partire da un punto fissato sulla curva), la distanza, misurata sulla curva, tra P e Q è data da $|\Delta s|$. Il rapporto $\Delta\vartheta/|\Delta s|$ dà una misura di quanto la curva α si discosti dalla direzione tangente nel punto $\alpha(s)$ lungo il tratto $|\Delta s|$. Il limite $\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta\vartheta/|\Delta s|$ è, per definizione, la curvatura nel punto $P = \alpha(s)$. La curvatura $\kappa(s)$ in s è dunque una misura della rapidità con la quale la curva si discosta dalla direzione tangente in s .

Teorema 1.26 (Equivalenza di due definizioni di curvatura). *Sia $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ una curva di classe⁵ C^2 e regolare⁶, parametrizzata mediante la lunghezza d'arco. Fissiamo un punto $P = \alpha(s)$ sulla curva e sia $Q = \alpha(s + \Delta s)$ un punto sulla curva vicino a P . Chiamiamo $\Delta\vartheta(> 0)$ l'angolo fra i vettori tangenti in P e Q . Definiamo la curvatura $\kappa(s)$, $s \in I$, come:*

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|} \tag{1.76}$$

Allora $\kappa(s)$ è uguale al modulo del vettore accelerazione $\alpha''(s)$:

$$\kappa(s) = |\alpha''(s)| \tag{1.77}$$

Nota. Poiché, per definizione, $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$, e quindi $\alpha''(s) = \mathbf{T}'(s)$, l'uguaglianza (1.77) si può scrivere anche:

$$\kappa(s) = |\mathbf{T}'(s)| \tag{1.78}$$

Dimostrazione Poiché i vettori tangenti $\alpha'(s)$ e $\alpha'(s + \Delta s)$ sono unitari (cioè di lunghezza uno) e formano un angolo $\Delta\vartheta$, si ha

$$|\alpha'(s + \Delta s) - \alpha'(s)| = 2 \sin \frac{\Delta\vartheta}{2} \tag{1.79}$$

⁵Una curva parametrizzata $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ si dice di classe C^2 se le sue componenti $x(t), y(t), z(t)$ sono funzioni di classe C^2 , cioè derivabili due volte con derivata seconda continua.

⁶Una curva parametrizzata $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ si dice regolare se il suo vettore tangente $\alpha'(t)$ è diverso dal vettore nullo, per ogni $t \in I$.

come si vede dalla figura qui sotto:

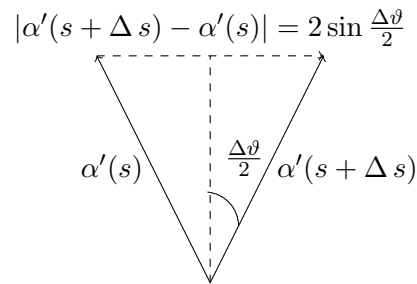


Figura 2: Il lato del triangolo isoscele è lungo 1 e l'angolo al vertice è $\Delta\vartheta$. Quindi la base è $2 \sin \frac{\Delta\vartheta}{2}$. Ma la base è la differenza vettoriale tra i lati; quindi la sua lunghezza è $|\alpha'(s + \Delta s) - \alpha'(s)|$. Dunque $|\alpha'(s + \Delta s) - \alpha'(s)| = 2 \sin \frac{\Delta\vartheta}{2}$.

Dunque,

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha'(s + \Delta s) - \alpha'(s)|}{|\Delta s|} &= \frac{2 \sin \frac{\Delta\vartheta}{2}}{|\Delta s|} \\ &= \frac{\sin \frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|} \end{aligned}$$

Si noti che quando $\Delta s \rightarrow 0$, anche $\Delta\vartheta \rightarrow 0$. Allora, quando $\Delta s \rightarrow 0$, il primo membro tende a $|\alpha''(s)|$, mentre il secondo membro tende⁷ a $\kappa(s)$. Dunque, abbiamo dimostrato che

$$\kappa(s) = |\alpha''(s)| \tag{1.80}$$

Q.E.D.

⁷Si noti che $\lim_{\Delta\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}} = 1$ e $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|} = \kappa(s)$ per definizione.