Politecnico di Milano
Corso di Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria
federico.lastaria@polimi.it

Dimostrazioni richieste per seconda prova e appelli
20 Dicembre 2021

Indice

1 Dimostrazioni richieste per seconda prova e appelli.

1.1 Irrazionalità di $\sqrt{2}$

Teorema 1.1 (Irrazionalità di $\sqrt{2}$). *Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2.*

Dimostrazione.[1] Supponiamo, per assurdo, che esistano due numeri interi positivi m, n tali che

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \tag{1.1}$$

Non è restrittivo supporre che gli interi m e n siano primi tra loro, cioè che non abbiano fattori primi in comune. (Altrimenti, riduciamo la frazione $\dfrac{m}{n}$ ai minimi termini). Da (1.1) segue

$$m^2 = 2n^2 \tag{1.2}$$

Dall'uguaglianza (1.2) segue che m^2 è pari. Quindi, m è pari. (Infatti, m dispari implica m^2 dispari.) Quindi si può scrivere:

$$m = 2a \tag{1.3}$$

(con $a \in \mathbb{N}$.) Sostituendo $m = 2a$ nell'uguaglianza (1.2), si ottiene

$$(2a)^2 = 2n^2 \tag{1.4}$$

da cui

$$2a^2 = n^2 \tag{1.5}$$

Ma allora n^2 è pari, e quindi anche n è pari. Ne segue che m e n sono entrambi pari. Siamo arrivati a una contraddizione, perché avevamo supposto che m e n non avessero fattori primi in comune.

Dunque, concludiamo che non esistono numeri interi m, n per i quali risulti $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Q.E.D.

Osservazione. Abbiamo così dimostrato che:

La diagonale e il lato di uno stesso quadrato sono incommensurabili tra loro, cioè non hanno alcun sottomultiplo comune.

Questo significa che, detta d la diagonale e l il lato di un quadrato, non esistono numeri interi m, n per i quali $\frac{1}{m}d = \frac{1}{n}l$. Infatti, se ciò accadesse, il rapporto tra d e l sarebbe dato dal numero razionale $\frac{m}{n}$:

$$\frac{d}{l} = \frac{m}{n}$$

[1] Per facilitare la dimostrazione, richiamiamo alcuni semplici fatti. Per definizione, un numero $m \in \mathbb{N}$ è pari se è divisibile per 2, cioè se si può scrivere come $m = 2h$, per un opportuno h in $\mathbb{N}$; è dispari se diviso per 2 dà resto 1, cioè se si può scrivere come $m = 2k + 1$, con $k \in \mathbb{N}$.

Valgono queste semplici implicazioni:

(i) m pari $\implies$ m^2 pari. (Infatti, $m^2 = (2h)^2 = 2(2h^2)$.)

(ii) m dispari $\implies$ m^2 dispari. (Infatti, $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$)

(iii) m^2 pari $\implies$ m pari. (Altrimenti, se m fosse dispari, m^2 sarebbe dispari, per l'implicazione (ii).)

(iv) m^2 dispari $\implies$ m dispari. (Altrimenti, se m fosse pari, m^2 sarebbe pari, per l'implicazione (i).)

Ma quest'ultima uguaglianza è impossibile. Infatti, per il teorema di Pitagora, abbiamo $d^2 = l^2 + l^2$, ossia $\frac{d}{l} = \sqrt{2}$, e abbiamo dimostrato (teorema 1.1) che $\sqrt{2}$ non si può scrivere come $\frac{m}{n}$, con m, n interi.

1.2 Successioni monotòne limitate

Teorema 1.2 (Successioni monotòne limitate)**.** *Ogni successione in* $\mathbb{R}$ *che sia crescente*

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots \tag{1.6}$$

e (superiormente) limitata è convergente. Precisamente, converge all'estremo superiore dell'insieme dei suoi termini.

Se invece una successione è decrescente e limitata, convergerà all'estremo inferiore dell'insieme dei suoi termini.

Dimostrazione. Sia (a_n), $n \in \mathbb{N}$, una successione crescente e limitata. Chiamiamo

$$A = \{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$$

l'insieme dei suoi elementi. Per ipotesi l'insieme A è (non vuoto e) limitato. Pertanto (qui si usa la completezza dei reali) A ha un estremo superiore. Poniamo $L = \sup A$.

Ricordiamo che, per definizione, l'estremo superiore L di A è *la minima limitazione superiore* di A, cioè l'unico numero $L \in \mathbb{R}$ che soddisfa queste due proprietà:

1. L è una limitazione superiore per A, cioè:

$$a_n \leq L \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}$$

2. Nessun numero $L' < L$ è una limitazione superiore per A, cioè:

Per ogni $L' < L$ esiste un $a_k \in A$ per il quale $L' < a_k$.

Dimostriamo che a_n converge a L. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Siccome $L - \varepsilon < L$, il numero $L - \varepsilon$ non è una limitazione superiore dell'insieme $A = \{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$. Dunque esiste un intero k per il quale $L - \varepsilon < a_k$. Poiché la successione è crescente, per tutti gli $n > k$ si ha $a_k < a_n$ e quindi $L - \varepsilon < a_n$, definitivamente (cioè, per tutti gli n maggiori di k). Ma per ogni n si ha $a_n \leq L$. Riassumendo, si ha

$$L - \varepsilon < a_n \leq L$$

per tutti gli $n > k$. Per la stessa definizione di limite di una successione, si conclude allora che $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$. Q.E.D.

Osservazione. Si dimostra che in un campo ordinato $\mathbb{K}$, la proprietà delle successioni monotòne limitate ("*Ogni successione monotòna limitata converge in* $\mathbb{K}$") è equivalente alla proprietà dell'estremo superiore ("*Ogni sottoinsieme di* $\mathbb{K}$ *non vuoto e superiormente limitato ha una minima limitazione superiore*").

1.3 Prodotto di due numeri complessi. Formula di De Moivre.

Teorema 1.3 (Prodotto di due numeri complessi. Formula di De Moivre.). *Il prodotto dei numeri complessi*

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad z' = r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta') \tag{1.7}$$

è il numero complesso:

$$z \cdot z' = rr'[\cos(\vartheta+\vartheta') + i\sin(\vartheta+\vartheta')] \tag{1.8}$$

In breve, quando si moltiplicano tra loro due numeri complessi, i moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano.

In particolare, vale la Formula di De Moivre:

$$[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)]^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) \tag{1.9}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= [r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)] \cdot [r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')] \\ &= rr'[(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta') + i(\sin\vartheta\cos\vartheta' + \cos\vartheta\sin\vartheta')] \\ &= rr'[\cos(\vartheta+\vartheta') + i\sin(\vartheta+\vartheta')] \end{aligned}$$

La Formula di De Moivre (1.9) segue subito dalla formula del prodotto (1.8), ponendo $z = z'$ e iterando. Q.E.D.

Osservazione. Dalla formula di moltiplicazione segue che l'inverso del numero $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ è

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} = r^{-1}(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)) \tag{1.10}$$

Dalle formule (1.8) e (1.10) segue che *il quoziente di due numeri complessi ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti*: se $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e $z' = r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')$, allora

$$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}(\cos(\vartheta'-\vartheta) + i\sin(\vartheta'-\vartheta)) \tag{1.11}$$

Osservazione. La formula di De Moivre permette di trovare (o ritrovare) diverse identità trigonometriche. Facciamo un esempio ($r = 1, n = 2$): da $(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2 = \cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta$ segue, sviluppando il quadrato a primo membro

$$\cos^2\vartheta + 2i\cos\vartheta\sin\vartheta - \sin^2\vartheta = \cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta$$

e infine, *uguagliando le parti reali e i coefficienti delle parti immaginarie*:

$$\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta \qquad \sin 2\vartheta = 2\cos\vartheta\sin\vartheta$$

(In questo modo è molto più facile ricordare le formule).

1.4 Radici n-esime

Teorema 1.4 (Radici n-esime di un numero complesso)**.** *Sia $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ un numero complesso non nullo e sia n un intero positivo. Esistono esattamente n numeri complessi che elevati alla potenza n-esima danno come risultato z. Tali numeri sono:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right], \qquad k = 0, 1, ..., n-1 \quad (1.12)$$

Ciascuno di tali numeri $z_0, ..., z_{n-1}$ si chiama una *radice n-esima* di z. Quindi il teorema dice che ogni numero complesso (non nullo) ha esattamente n radici n-esime. (Nel caso $z = 0$, le n radici n-esime sono coincidenti.)

Dimostrazione. Un numero complesso

$$w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad (1.13)$$

è una radice n-esima di z se $w^n = z$, ossia (per la formula di De Moivre) se

$$|w|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \quad (1.14)$$

Ora due numeri complessi, scritti in forma polare, sono uguali se e solo se hanno i moduli uguali, e gli argomenti *uguali a meno di multipli interi di* 2π:

$$|w|^n = r, \qquad n\alpha = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ma si vede facilmente che si ottengono n radici distinte soltanto per gli n valori $k = 0, 1, ..., (n-1)$, mentre dando a k un qualunque altro valore, si riottiene una delle radici $z_0, ..., z_{n-1}$. Quindi tutte le n radici n-esime distinte hanno modulo e argomento rispettivamente dati da

$$\sqrt[n]{r}, \qquad \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

Q.E.D.

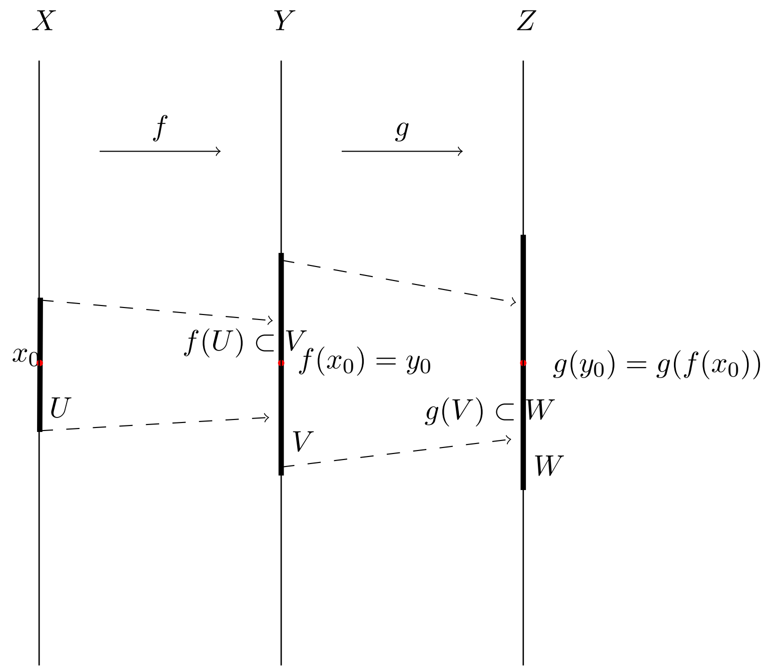
Osservazione. Si noti che le radici n-esime si trovano tutte sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{r}$ e sono equidistanziate tra loro, cioè sono i vertici di un poligono regolare di n lati.

1.5 Continuità della funzione composta

Teorema 1.5 (Composizione di funzioni continue)**.** *Se* $X \xrightarrow{f} Y$ *e* $Y \xrightarrow{g} Z$ *sono funzioni continue* (X, Y, Z *sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$*, oppure, più in generale, spazi metrici), allora anche la funzione composta* $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ *è continua.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
 & Z
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione Sia $x_0 \in X$, poniamo $f(x_0) = y_0$, e sia W un qualunque intorno di $g(f(x_0)) = g(y_0)$.



Per la continuità di g in y_0, esiste un intorno V di y_0 tale che $g(V) \subset W$. Del resto, poiché f è continua in x_0, esiste un intorno U di x_0 per il quale $f(U) \subset V$.

Poiché da $f(U) \subset V$ segue $g(f(U)) \subset g(V)$, si ha

$$(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$$

Questo prova la continuità della funzione composta in x_0. Poiché x_0 è un punto arbitario di X, abbiamo dimostrato la continuità della funzione composta $g \circ f$.

Q.E.D.

1.6 Teorema degli Zeri

Teorema 1.6 (Teorema degli Zeri)**.** *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Siano a, b due punti appartenenti a I, con $a < b$. Supponiamo che i valori $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segni opposti ($f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, o viceversa). Allora esiste almeno un punto $\alpha \in (a, b)$ in cui si ha $f(\alpha) = 0$.*

Dimostrazione La dimostrazione del Teorema degli Zeri è costruttiva, cioè presenta un algoritmo (detto **metodo di bisezione** o metodo dicotomico) per mezzo del quale è possibile trovare un punto in cui f si annulla. Per fissare le idee supponiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ e consideriamo il punto medio $c = \dfrac{a+b}{2}$ dell'intervallo $[a, b]$. Possono presentarsi due casi. Se $f(c) = 0$ il problema è risolto (abbiamo trovato uno zero di f). Se invece $f(c) \neq 0$, scegliamo tra i due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ quello in cui la funzione f assume valori discordi agli estremi. Tenuto conto delle nostre scelte iniziali ($f(a) < 0$ e $f(b) > 0$), si tratta di scegliere l'intervallo in cui la funzione assume valore negativo nell'estremo di sinistra e valore positivo nell'estremo di destra. Quindi se $f(c) \neq 0$, scegliamo l'intervallo $I_1 = [i_1, j_1]$ nel modo seguente :

$$I_1 = [i_1, j_1] = \begin{cases} [a, c] & se \quad f(c) > 0 \\ \\ [c, b] & se \quad f(c) < 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

Operiamo ora sull'intervallo $I_1 = [i_1, j_1]$ nello stesso modo in cui abbiamo operato sull'intervallo $[a, b]$. Precisamente: sia c_1 il punto medio di $[i_1, j_1]$. Se $f(c_1) = 0$ il problema è risolto (c_1 è uno zero di f). Altrimenti scegliamo tra i due intervalli $[i_1, c_1]$ e $[c_1, j_1]$ quello in cui la funzione assume valore negativo nell'estremo di sinistra e positivo nell'estremo di destra.

Iterando questo procedimento, si possono avere due casi:

1. Esiste un intero positivo k tale che la funzione si annulla nel punto medio c_k dell'intervallo $[i_k, j_k]$. In questo caso abbiamo trovato un punto c_k nel quale la funzione f si annulla, e la tesi del teorema è dimostrata.

2. La funzione non si annulla in nessun punto medio c_k. In questo caso otteniamo una successione infinita di intervalli compatti inscatolati

$$[i_1, j_1] \supset [i_2, j_2] \supset [i_3, j_3] \supset \cdots \supset [i_n, j_n] \supset \cdots$$

con le due seguenti proprietà:

(a) nell'estremo di sinistra di ogni intervallo la funzione assume valore negativo, mentre nell'estremo di destra assume valore positivo, cioè per ogni k ($0 \leq k \leq n$) abbiamo $f(i_k) < 0$ e $f(j_k) > 0$.

(b) gli intervalli hanno ampiezza $j_k - i_k = \dfrac{b-a}{2^k}$

Abbiamo dunque costruito una successione di intervalli compatti inscatolati le cui ampiezze tendono a zero. Per il teorema sugli intervalli inscatolati (conseguenza della completezza di $\mathbb{R}$) esiste un unico numero reale α che appartiene a tutti gli intervallini $[i_n, j_n]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. A tale numero α convergono le due successioni i_n e j_n:

$$\lim_{n \to +\infty} i_n = \alpha = \lim_{n \to +\infty} j_n$$

Poiché f è continua in $x = \alpha$ (‘f commuta con lim’, nel senso che ‘f lim = lim f’), abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} f(i_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} i_n\right) = f(\alpha) \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(j_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} j_n\right) = f(\alpha)$$

Ma poiché $f(i_n) < 0$ (per ogni n), risulta

$$f(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} f(i_n) \leq 0$$

(perché il limite di una successione di termini $f(i_n) < 0$ è certamente ≤ 0). Analogamente, poiché $f(j_n) > 0$ per ogni n, si deve avere

$$f(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} f(j_n) \geq 0$$

Poichè le due ultime disuguaglianze devono valere contemporaneamente, abbiamo $f(\alpha) = 0$ e quindi α è uno zero di f. Q.E.D.

1.7 Teorema dei Valori Intermedi

Teorema 1.7 (Teorema dei Valori Intermedi. Una funzione continua trasforma connessi in connessi)**.** *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Se a e b appartengono a I, la funzione f assume ogni valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$. Detto altrimenti, l'immagine $J = f(I)$ di f è un intervallo.*

In breve: *Le funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ trasformano intervalli in intervalli.*

Dimostrazione Siano $a' = f(a)$ e $b' = f(b)$ due punti di $f(I)$; senza ledere la generalità, possiamo supporre $a < b$ e $a' < b'$. Sia w un numero tale che $a' < w < b'$. Dobbiamo dimostrare che $w \in f(I)$. Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - w, \qquad\qquad x \in [a, b]$$

Tale funzione è ovviamente continua sull'intervallo $[a, b]$ e si ha:

$$g(a) = f(a) - w = a' - w < 0 \qquad g(b) = f(b) - w = b' - w > 0 \tag{1.16}$$

Dunque la funzione g soddisfa le ipotesi del Teorema degli Zeri (1.6) sull'intervallo $[a, b]$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ per il quale $g(c) = f(c) - w = 0$, ossia $f(c) = w$, come si voleva dimostrare. Q.E.D.

Commento. Definiamo la seguente proprietà, detta di Darboux:

Proprietà (di Darboux). *Una funzione $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$, soddisfa la* proprietà di Darboux *se per ogni $x_{1,2} \in I$, f assume sull'intervallo $[x_1, x_2]$ ogni valore compreso tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$.*

Il teorema dei Valori Intermedi 1.7 si può allora enunciare dicendo che le funzioni continue su un intervallo soddisfano la proprietà di Darboux. Non è però vero il viceversa. Un controesempio è fornito dalla funzione seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

Si vede facilmente che questa funzione soddisfa la proprietà di Darboux. Ma f non è continua su $\mathbb{R}$, perché in $x_0 = 0$ presenta una discontinuità non eliminabile.

1.8 Derivabilità implica continuità

Teorema 1.8 (Derivabilità implica continuità)**.** *Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0.*

Dimostrazione. Partiamo dall'identità (valida per $x \neq x_0$)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

Allora[2]:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) &= f(x_0) + \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \left(\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \right) \\
&= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 \\
&= f(x_0)
\end{aligned}$$

Dunque f è continua in x_0.

Un'altra dimostrazione è la seguente. Poiché f è differenziabile in x_0, si scrive

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + o(h) \qquad (\text{per } \ h \to 0)$$

Passando al limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) &= \lim_{h \to 0} \left[f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \right] \\
&= f(x_0) + \lim_{h \to 0} f'(x_0)h + \lim_{h \to 0} o(h) \\
&= f(x_0) + \lim_{h \to 0} f'(x_0)h + \lim_{h \to 0} h \frac{o(h)}{h} \\
&= f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0)
\end{aligned}$$

Q.E.D.

[2]Si ricordi che se esistono i limiti di $g_1(x)$ e $g_2(x)$ per $x \to x_0$, allora *il limite della somma $g_1(x) + g_2(x)$ è la somma dei limiti.* Si noti che, a secondo membro, $f(x_0)$ è una costante e quindi $\lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$

1.9 Teorema di Fermat

Teorema 1.9 (Fermat)**.** *Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali definita su un insieme* $D \subset \mathbb{R}$. *Supponiamo che:*

1. x_0 *sia un punto di massimo (o di minimo) locale per* f*;*
2. x_0 *sia interno a* D*;*
3. f *sia derivabile in* x_0.

Allora x_0 *è un punto stazionario di* f*, cioè* $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Per fissare le idee, supponiamo che x_0 sia un punto di massimo locale per f. Poiché, per ipotesi, x_0 è al tempo stesso un punto interno al dominio D di f e un punto di massimo locale, esiste un intorno sufficientemente piccolo I di x_0 con le due proprietà seguenti[3]:

$$I \subset D \tag{1.18}$$

(perché x_0 è interno a D) e

$$\forall x \in I \qquad f(x) - f(x_0) \leq 0 \tag{1.19}$$

(perché x_0 è punto di massimo locale). Per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$, si ha allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \tag{1.20}$$

se $x > x_0$ e

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \tag{1.21}$$

si ricava[4] rispettivamente $f'(x_0) \leq 0$ e $f'(x_0) \geq 0$. Di conseguenza $f'(x_0) = 0$. Q.E.D.

Osservazione. Si noti che nel teorema dimostrato è essenziale l'ipotesi che x_0 sia interno a D. (Non basta che il punto x_0 appartenga a D). Ad esempio, la funzione $f(x) = x$ nell'intervallo $D = [0, 1]$ ha un punto di massimo locale in $x_0 = 1$, anche se la derivata (sinistra) di f in x_0 non è nulla (è uguale a 1). Naturalmente questo non contaddice il teorema di Fermat. Semplicemente non sono soddisfatte le ipotesi di tale teorema, perché il punto $x_0 = 1$ non è interno a $D = [0, 1]$.

[3] Sappiamo che esiste un intorno U di x_0 che soddisfa la condizione $U \subset D$ e esiste un intorno V di x_0 su cui vale $f(x) \leq f(x_0)$. Allora sull'intersezione $I = U \cap V$ (che è ancora un intorno di x_0) sono soddisfatte entrambe le condizioni.

[4] Qui si usa il teorema di *Permanenza del Segno*: *Sia* g *una funzione definita su un intorno* U *di un punto* x_0 *(con la possibile eccezione del punto* x_0*). Supponiamo che, per ogni* $x \in U \setminus x_0$*, si abbia* $g(x) \geq 0$ *e supponiamo che esista (finito) il limite* $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$. *Allora si ha* $L \geq 0$.

1.10 Teorema del Valore Medio (di Lagrange)

Teorema 1.10 (del Valore Medio, o di Lagrange)**.** *Sia* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione continua sull'intervallo compatto* $[a, b]$ *e derivabile sull'intervallo aperto* (a, b)*. Allora esiste un punto* $\gamma \in (a, b)$ *per il quale si ha*

$$f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b - a) \tag{1.22}$$

Dimostrazione. Si consideri la funzione

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{1.23}$$

definita sull'intervallo $[a, b]$. Tale funzione è continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e assume lo stesso valore agli estremi:

$$g(a) = g(b) = 0$$

Quindi g soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Per tale teorema, esiste un punto γ in (a, b) in cui $g'(\gamma) = 0$. La derivata di $g(x)$ è

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Quindi si ha

$$0 = g'(\gamma) = f'(\gamma) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

che equivale a

$$f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b - a)$$

Q.E.D.

Osservazione. Il teorema di Lagrange ha la seguente interpretazione geometrica. Si noti che il numero $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta (secante) che passa per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, di equazione

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{1.24}$$

Quindi il teorema afferma che esiste almeno un punto $(\gamma, f(\gamma))$ appartenente al grafico della funzione f in cui la retta tangente (il cui coefficiente angolare è $f'(\gamma)$) è parallela alla retta secante che unisce i due punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Si noti che la funzione ausiliaria (1.23) è la differenza tra l'ordinata del punto $(x, f(x))$ sul grafico di f e l'ordinata del punto di coordinate $(x, f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a))$ sulla retta secante.

1.11 Funzioni derivabili strettamente monotòne

Teorema 1.11 (Funzioni derivabili strettamente monotòne)**.** *Sia* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione derivabile su un intervallo aperto* I *di* $\mathbb{R}$*. Se* $f'(x) > 0$ *(oppure* < 0*) in ogni punto* $x \in I$*, allora* f *è strettamente crescente (strettamente decrescente) su* I*.*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per il caso di funzioni con derivata positiva in ogni punto. (L'altro caso si tratta in modo analogo).

Siano x_1, x_2 due punti di I, con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange esiste un punto c, compreso tra x_1 e x_2, per il quale si ha:

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$$

Poiché per ipotesi $f'(c) > 0$ e $x_1 - x_2 < 0$, si deve avere $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Abbiamo allora dimostrato che, per ogni $x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Dunque f è strettamente crescente su I. Q.E.D.

Osservazione. Il teorema non si inverte: se una funzione è strettamente crescente su un intervallo I ed è derivabile in I, allora si avrà senz'altro $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$, ma in qualche punto la derivata potrebbe annullarsi. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$.

Osservazione. L'implicazione "$f' > 0 \implies f$ *strettamente crescente*" non vale se il dominio di f non è un intervallo. Ad esempio, la funzione $f(x) = -1/x$, definita su $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (che non è un intervallo) ha derivata positiva su D, ma f non è strettamente crescente sul suo dominio D. Ovviamente f è crescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$ ed è crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$, ma non è crescente sul suo dominio $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (che non è un intervallo).

1.12 Funzioni con derivata nulla su un intervallo

Teorema 1.12 (Funzioni con derivata nulla su un intervallo). *Una funzione definita su un intervallo aperto $I = (a, b)$ e con derivata nulla in ogni punto di tale intervallo è costante.*

Dimostrazione. Prendiamo due punti qualunque x_1, x_2 in (a, b), $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange – applicato all'intervallo $[x_1, x_2]$ – esiste un punto c, compreso tra x_1 e x_2, per il quale si ha:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

Ne segue $f(x_1) = f(x_2)$. Quindi f è costante. Q.E.D.

Osservazione. Si noti che in questo teorema è essenziale l'ipotesi che il dominio della funzione sia un *intervallo* (un sottoinsieme *connesso* di $\mathbb{R}$).

Esempio 1. La funzione

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ 1 & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

ha derivata nulla in ogni punto del suo dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ma non è costante. (Si noti che $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ non è un intervallo di $\mathbb{R}$, cioè non è *connesso*).

Esempio 2. La funzione

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

ha derivata nulla in ogni punto del suo dominio (come si verifica facilmente calcolando la derivata), ma non è costante. Precisamente,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pi/2 \qquad \text{per } x > 0$$

e

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\pi/2 \qquad \text{per } x < 0$$

1.13 Teorema di de l'Hospital

Teorema 1.13 (de L'Hospital. Caso $\frac{0}{0}$.). *Siano f e g due funzioni continue sull'intervallo $[x_0, b]$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) e derivabili in (x_0, b). Supponiamo che valgano le seguenti condizioni:*

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
2. $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (x_0, b)$.
3. *Esiste (finito o infinito) il limite*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \tag{1.25}$$

Allora esiste anche il limite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *ed è uguale al precedente:*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \tag{1.26}$$

Dimostrazione. (Per il caso L finito). Premettiamo un'osservazione. Sia x un qualunque punto in (x_0, b). Allora si può scrivere

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

per un opportuno γ compreso tra x_0 e x, cioè soddisfacente: $x_0 < \gamma < x$. Per dimostrarlo, applichiamo il teorema di Cauchy alla coppia di funzioni f,g sull'intervallo $[x_0, x]$. Poiché $f(x_0) = g(x_0) = 0$, per il teorema di Cauchy si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

per un opportuno γ soddisfacente $x_0 < \gamma < x$, come si voleva dimostrare.

A questo punto possiamo concludere, in modo un po' sbrigativo ma sostanzialmente corretto, nel modo seguente. Quando x tende a x_0, il punto γ, compreso tra x e x_0, deve tendere a x_0. Quindi, poiché

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

e $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, anche il limite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ deve esistere, e deve essere uguale a L. □

Commento. Se vogliamo essere più rigorosi, possiamo arrivare alla tesi usando la "ε-δ definizione" di limite. Prendiamo allora un arbitrario $\varepsilon > 0$. Poiché, per ipotesi, $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\forall t \in (x_0, x_0 + \delta) \qquad \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \varepsilon \tag{1.27}$$

Ora prendiamo un qualunque x in $(x_0, x_0 + \delta)$. Per quanto abbiamo visto sopra,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

per un opportuno γ soddisfacente $x_0 < \gamma < x < x_0 + \delta$. Siccome tale γ è compreso tra x_0 e $x_0 + \delta$, per la 1.27 si ha $\left| \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} - L \right| < \varepsilon$ e quindi

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} - L \right| < \varepsilon$$

Questo prova, per definizione di limite, che anche

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \tag{1.28}$$

Osservazione. Ovviamente il teorema di de L'Hospital vale anche per i limiti da sinistra ($x \to x_0^-$) e quindi per il limite (ordinario) per $x \to x_0$.

1.14 Formula di Taylor con il resto di Peano

Teorema 1.14 (Formula di Taylor locale, con il resto di Peano). *Sia f una funzione con derivate di ogni ordine su un intervallo aperto I dell'asse reale. Fissiamo un punto x_0 in I e un intero positivo n. Definiamo il resto $R_n(x)$ come la differenza tra $f(x)$ e il polinomio di Taylor di f di ordine n nel punto x_0:*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$$

Allora il resto $R_n(x)$ è $o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$, cioè $\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Dimostrazione. Per semplicità, vediamo il caso $n = 2$. (Il caso generale si dimostra nello stesso modo). Dobbiamo allora dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = 0 \tag{1.29}$$

Si controlla facilmente che sono soddisfatte le condizioni per potere usare la regola di de L'Hospital. (Infatti, numeratore e denominatore sono derivabili in tutto un intorno di x_0, sono nulli in x_0, e la derivata del denominatore è diversa da zero per $x \neq x_0$) Il rapporto tra le derivate del numeratore e del denominatore è dato da

$$\frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)}$$

Applichiamo ancora una volta la regola di de L'Hospital, e otteniamo:

$$\frac{f''(x) - f''(x_0)}{2}$$

Poiché la funzione $f''(x)$ è continua (se una funzione f ha derivate di ogni ordine, tutte le derivate devono essere continue), si ha $\lim_{x\to x_0} f''(x) = f''(x_0)$, e quindi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{2}$$

(Nel caso di n arbitrario, iterando n volte la regola di de l'Hospital, si arriva a $\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{n!}$, che vale zero, perché $f^{(n)}$ è continua in x_0.) Dunque, per il teorema di de L'Hospital, anche il limite iniziale (1.29) esiste e vale 0, come volevamo dimostrare. Q.E.D.

Commento. Abbiamo dimostrato il teorema di Taylor (locale) 1.14 nell'ipotesi che f sia infinitamente derivabile. Non è difficile dimostrare che la stessa tesi vale anche in ipotesi meno restrittive. Vale infatti il seguente

Teorema [Formula di Taylor locale] *Supponiamo che f sia derivabile n volte in un punto x_0 (n intero positivo). Poniamo*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$$

Allora, il resto $R_n(x)$ è $o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$.

1.15 Teorema della Media Integrale

Teorema 1.15 (Teorema della Media Integrale)**.** *Sia* $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Siano*

$$m = \inf\ f \qquad\qquad M = \sup\ f \tag{1.30}$$

l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f *su* $[a,b]$. *Allora*

$$m \ \leq\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \ \leq\ M \tag{1.31}$$

Se inoltre f *è continua, esiste un punto* c *in* $[a,b]$ *per il quale vale l'uguaglianza:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \tag{1.32}$$

Dimostrazione. Da $m \leq f(x) \leq M$ (per ogni $x \in [a,b]$) segue, per la proprietà di monotonia dell'integrale,

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \tag{1.33}$$

ossia

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \tag{1.34}$$

(in quanto $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ e $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$). Di qui segue subito la tesi (1.31).

Per dimostrare (1.32), supponiamo f continua su $[a,b]$. Per le disuguaglianze (1.31), il numero

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{1.35}$$

è compreso tra l'estremo inferiore m e l'estremo superiore M di f in $[a,b]$. Poiché f è continua sull'intervallo $[a,b]$, assume tutti i valori compresi tra il suo estremo inferiore e il suo estremo superiore (Teorema dei Valori Intermedi). Quindi esiste un punto c tra a e b per il quale vale (1.32). Q.E.D.

1.16 Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Formula di Newton–Leibniz

Teorema 1.16 (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Caso f continua.). *Sia $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora valgono i due fatti seguenti.*

1 (Derivata della funzione integrale)

Poniamo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a,b] \tag{1.36}$$

(F si chiama funzione integrale *di f, con punto iniziale a). Allora F è una antiderivata (o primitiva) di f, ossia F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni x in $[a,b]$:*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x) \tag{1.37}$$

2 (Formula di Newton–Leibniz)

Se G è una qualunque antiderivata (o primitiva) di f su $[a,b]$ (ossia G è una funzione differenziabile su $[a,b]$ tale che $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$), allora

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \tag{1.38}$$

Dimostrazione
1. (Derivata della funzione integrale)
Fissiamo un punto x in $[a,b]$. Allora

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\Big[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\Big] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c) \tag{1.39}$$

dove c è un opportuno punto tra x e $x+h$. La (1.39) segue dal Teorema della Media Integrale, applicato all'intervallo di estremi x e $x+h$. Quando h tende a zero, il punto c, compreso tra x e $x+h$, tende a x. Poiché f è continua, $f(c)$ tende a $f(x)$ e quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x) \tag{1.40}$$

Dunque $F'(x) = f(x)$.

2. (Formula di Newton–Leibniz)
Sia $G(x)$ una qualunque primitiva di $f(x)$ su $[a,b]$. Poiché

$$G'(x) = f(x) = F'(x)$$

le due funzioni $G(x)$ e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ hanno la stessa derivata sull'intervallo $[a,b]$. Quindi differiscono per una costante:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \tag{1.41}$$

Ponendo in questa uguaglianza prima $x = b$ e poi $x = a$ e sottraendo, si ottiene la tesi:

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= \Big[\int_a^b f(t)\,dt + c\Big] - \Big[\int_a^a f(t)\,dt + c\Big] && (1.42)\\ &= \int_a^b f(t)\,dt && (1.43) \end{aligned}$$

Q.E.D.

1.17 Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$

Teorema 1.17 (Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$)**.** *L'integrale generalizzato*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \qquad \begin{cases} \textit{è divergente} & \textit{se } a \leq 1 \\ \textit{è convergente} & \textit{se } a > 1 \end{cases} \tag{1.44}$$

Dimostrazione Se $a = 1$, abbiamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln 1) = +\infty \tag{1.45}$$

e quindi l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ è divergente.

Se $a \neq 1$, si ha

$$\int_1^t \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{1-a}\Big[x^{1-a}\Big]_1^t = \frac{1}{1-a}(t^{1-a} - 1) \tag{1.46}$$

Ora

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1-a}(t^{1-a} - 1) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 1 \\ \dfrac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Riassumendo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \qquad \begin{cases} \text{è divergente} & \text{se } a \leq 1 \\ \text{è convergente} & \text{se } a > 1 \end{cases} \tag{1.47}$$

Q.E.D.

1.18 Confronto e confronto asintotico per serie numeriche

Come per gli integrali generalizzati, anche per le serie numeriche a termini positivi valgono il criterio del confronto e il criterio del confronto asintotico. Cominciamo con il

Teorema 1.18 (Criterio del confronto)**.** *Siano a_n e b_n successioni reali e supponiamo che per qualche $K \in \mathbb{N}$ si abbia*

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \textit{per } \ n \geq K \tag{1.48}$$

Allora:

(a) La convergenza di $\sum b_n$ implica la convergenza di $\sum a_n$.

(b) La divergenza di $\sum a_n$ implica la divergenza di $\sum b_n$.

Dimostrazione. Se $S_k = a_0 + \cdots + a_k$ e $S'_k = b_0 + \cdots + b_k$, dalle disuguaglianze (1.48) segue

$$0 \leq S_k \leq S'_k$$

Quindi: se la successione S'_k converge, allora la successione S_k converge; e se la successione S_k diverge, allora la successione S'_k diverge. □

Ricordiamo che se a_n e b_n sono successioni reali positive, si dice che a_n è *asintoticamente equivalente* a b_n se $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Teorema 1.19 (Criterio del confronto asintotico)**.** *Siano a_n e b_n successioni reali positive. Se $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$, allora le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere, vale a dire entrambe convergono oppure entrambe divergono.*

Dimostrazione. Per ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > n_0$,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| < \varepsilon \tag{1.49}$$

vale a dire

$$(1 - \varepsilon) b_n < a_n < (1 + \varepsilon) b_n \tag{1.50}$$

La tesi segue allora facilmente dal criterio del confronto (Teorema 1.18): se $\sum_n a_n$ converge, allora $\sum_n (1 - \varepsilon) b_n$ converge, e quindi anche $\sum_n b_n$ converge; se invece $\sum_n a_n$ diverge, allora $\sum_n (1 + \varepsilon) b_n$ diverge, e quindi $\sum_n b_n$ diverge. □

1.19 Criterio della radice (di Cauchy)

Teorema 1.20 (Criterio della radice)**.** *Sia $\sum_n a_n$ una serie a termini positivi, e supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \tag{1.51}$$

Allora, se $0 \leq L < 1$ la serie converge, mentre se $L > 1$ (o $L = +\infty$) diverge.

Dimostrazione. Supponiamo $L < 1$. Scegliamo un q che soddisfi $L < q < 1$. Poiché $\sqrt[n]{a_n} \to L < q$, esiste n_0 tale che

$$\sqrt[n]{a_n} < q \tag{1.52}$$

per tutti gli $n > n_0$. Allora avremo $a_n < q^n$ per tutti gli $n > n_0$, e siccome la serie geometrica $\sum_n q^n$ converge (in quanto $q < 1$), concludiamo, per il criterio del confronto (Teorema **??**) che anche la serie $\sum_n a_n$ converge.

Se invece $L > 1$, si avrà definitivamente $\sqrt[n]{a_n} > 1$, e quindi (elevando alla potenza n-esima) $a_n > 1$. Allora la successione a_n non tende a zero, quindi la serie $\sum_n a_n$ non converge, e quindi diverge (non potendo oscillare). □

Osservazione Nel caso si abbia

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L = 1$$

non si può concludere nulla. Per convincersene, consideriamo le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

In entrambi i casi, si ha $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L = 1$, ma le due serie si comportano in modo diverso: la prima diverge, la seconda converge.

1.20 Criterio del rapporto (di D'Alembert)

Teorema 1.21 (Criterio del rapporto). *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi, e supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \tag{1.53}$$

Allora, se $0 \leq L < 1$ la serie converge, mentre se $L > 1$ (incluso il caso $L = +\infty$) diverge.

Dimostrazione. Supponiamo $0 \leq L < 1$. Scegliamo un q che soddisfi $L < q < 1$. Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L < q$, esiste un intero n_0 tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \tag{1.54}$$

per tutti gli $n > n_0$. Dal momento che un numero finito di termini non ha alcun effetto sulla convergenza, non è restrittivo supporre, per semplicità, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Da

$$\underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \frac{a_1}{a_0}}_{(n+1) \text{ fattori}} < q \cdots q = q^{n+1} \tag{1.55}$$

segue allora (semplificando tutti gli a_h al numeratore e al denominatore, per $h = 1, .., n$)

$$a_{n+1} < a_0\, q^n \tag{1.56}$$

per ogni indice $n \in \mathbb{N}$. Ora la serie $\sum_n a_0\, q^n$ converge (è multipla della serie geometrica $\sum_n q^n$, convergente perché $|q| < 1$) e quindi, per il criterio del confronto, anche la serie $\sum_n a_n$ converge.

Osservazione Come nel caso del criterio della radice, se accade che si abbia

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L = 1$$

non si può concludere nulla circa la convergenza della serie. Infatti, per le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

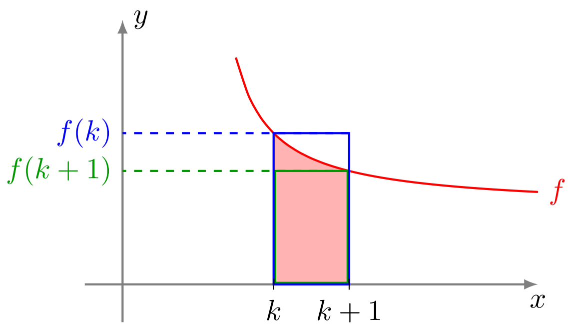
si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L = 1$, ma la prima diverge, mentre la seconda converge.

1.21 Criterio del confronto serie/integrale

Teorema 1.22 (Criterio dell'integrale)**.** *Sia* $[1, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione positiva e decrescente*[5]*. Allora:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \quad \textit{converge} \quad \underset{\textit{(se e solo se)}}{\Longleftrightarrow} \quad \int_1^{+\infty} f \quad \textit{converge} \tag{1.57}$$

Dimostrazione. Consideriamo il grafico di f tra k e $k+1$ (con k intero maggiore o uguale a 1):



Poiché f è decrescente, abbiamo questa interpretazione geometrica:

$f(k)$ = area del rettangolo circoscritto (base 1, altezza $f(k)$);

$f(k+1)$ = area del rettangolo inscritto (base 1, altezza $f(k+1)$);

$\int_k^{k+1} f$ = area della regione compresa tra il grafico di f e l'asse x.

L'area $\int_k^{k+1} f$ è ovviamente compresa tra l' area del rettangolo inscritto e quella del rettangolo circoscritto:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k) \tag{1.58}$$

per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Sommando per k da 1 a n, otteniamo

$$f(2) + \cdots + f(n+1) \leq \int_1^{n+1} f \leq f(1) + \cdots + f(n) \tag{1.59}$$

ossia (posto $s_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$)

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f \leq s_n \tag{1.60}$$

Le disuguaglianze (1.60) mostrano che i due limiti

$$\lim_{n \to +\infty} s_n \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_1^{n+1} f$$

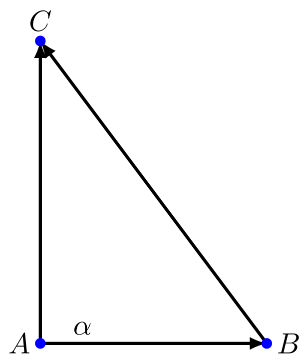
o esistono entrambi finiti, oppure sono entrambi $+\infty$, come volevamo dimostrare. □

[5] Si noti che l'ipotesi che f sia decrescente implica che f sia integrabile secondo Riemann su ogni intervallo compatto $[\alpha, \beta] \subseteq [1, +\infty)$. Si dice allora che f è *localmente integrabile*.

1.22 Teorema di Pitagora (e teorema di Carnot)

Teorema 1.23 (Teorema di Pitagora)**.** *In un triangolo rettangolo, siano a, b, c le lunghezze, rispettivamente, dell'ipotenusa e dei cateti. Allora*

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{1.61}$$



Dimostrazione. Consideriamo i tre vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Allora, poiché $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} a^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 \\ &= \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 \\ &= b^2 + c^2 \end{aligned}$$

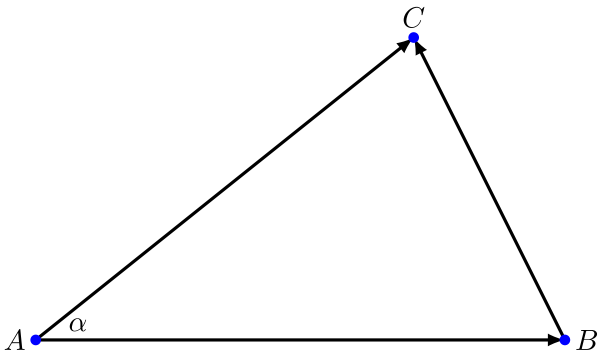
□

Più in generale, vale il:

Teorema 1.24 (Teorema di Carnot)**.** *In un triangolo qualunque ABC, chiamiamo a, b, c le lunghezze dei lati che sono opposti, rispettivamente, ai vertici A, B, C, e sia α l'angolo di vertice A. Allora*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \tag{1.62}$$

Dimostrazione. Consideriamo i tre vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.



Allora:

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 \\
&= \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AB}| \cos\alpha
\end{aligned}$$

Poiché

$$|\overrightarrow{BC}| = a, \qquad |\overrightarrow{AC}| = b, \qquad |\overrightarrow{AB}| = c,$$

abbiamo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{1.63}$$

come volevamo dimostrare. Si noti che se l'angolo α è retto (e quindi $\cos\alpha = 0$), ritroviamo il teorema di Pitagora:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{1.64}$$

□

1.23 Derivata di un vettore di lunghezza costante

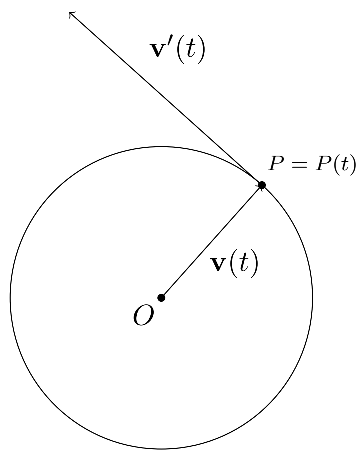
Teorema 1.25 (Derivata di un vettore di lunghezza costante)**.** *Se la lunghezza di un vettore* $\mathbf{v}(t)$ *in* $\mathbb{R}^3$ *(o* $\mathbb{R}^2$*) è costante (al variare di* t *in un intervallo* I *di* $\mathbb{R}$*), allora il vettore derivato* $\mathbf{v}'(t)$ *è ortogonale a* $\mathbf{v}(t)$*.*

Dimostrazione Poiché $|\mathbf{v}(t)|^2 = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ è costante, la sua derivata (che si calcola con la Regola di Leibniz) è nulla:

$$0 = (\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t))' = \mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) = 2\mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t)$$

Ne segue che $\mathbf{v}'(t)$ è ortogonale a $\mathbf{v}(t)$. Q.E.D.

Osservazione *(Una interpretazione cinematica.)* Supponiamo che $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^2$ ($t \in \mathbb{R}$) abbia lunghezza costante. Se pensiamo a $\mathbf{v}(t)$ come a un vettore spiccato dall'origine O di $\mathbb{R}^2$, tale vettore, avendo lunghezza costante, descrive il moto di un punto $P = P(t)$ che si muove sulla circonferenza di centro O e raggio uguale alla lunghezza di $\mathbf{v}(t)$.



Il vettore $\mathbf{v}'(t)$ si interpreta allora come il vettore velocità istantanea all'istante t. Pertanto $\mathbf{v}'(t)$ è tangente alla traiettoria (la circonferenza) e quindi è ortogonale al raggio $\mathbf{v}(t)$. (Il fatto che $\mathbf{v}(t)$ abbia lunghezza costante non implica che $\mathbf{v}'(t)$ abbia lunghezza costante; ossia, il moto è circolare, ma non necessariamente uniforme).

Applicazione *(Definizione del vettore normale* $\mathbf{N}$*).* Sia $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata alla lunghezza d'arco. Allora il vettore tangente $\mathbf{T}(s) = \underline{\alpha}'(s)$ ha lunghezza costante, uguale a 1. Sia $s \in I$ un valore del parametro per il quale si abbia $\mathbf{T}'(s) \neq 0$. Allora il vettore normale $\mathbf{N} = \mathbf{N}(s)$ in s è il vettore unitario, ortogonale a $\mathbf{T}(s)$, definito dall'uguaglianza

$$\mathbf{T}'(s) = k(s)\,\mathbf{N}(s) \tag{1.65}$$

dove $k(s) = |\mathbf{T}'(s)| > 0$ è la curvatura in s.

1.24 Equivalenza di due definizioni di curvatura

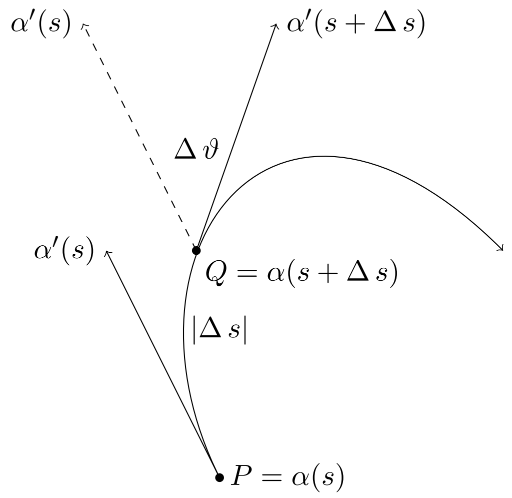


Figura 1: Chiamiamo $\Delta\vartheta(>0)$ l'ampiezza dell'angolo tra i due vettori tangenti unitari $\alpha'(s+\Delta s)$ e $\alpha'(s)$, tangenti alla curva α rispettivamente nei punti $Q=\alpha(s+\Delta s)$ e $P=\alpha(s)$. Poiché il parametro è la lunghezza d'arco (misurata a partire da un punto fissato sulla curva), la distanza, misurata sulla curva, tra P e Q è data da $|\Delta s|$. Il rapporto $\Delta\vartheta/|\Delta s|$ dà una misura di quanto la curva α si discosti dalla direzione tangente nel punto $\alpha(s)$ lungo il tratto $|\Delta s|$. Il limite $\kappa(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\Delta\vartheta/|\Delta s|$ è, per definizione, la curvatura nel punto $P=\alpha(s)$. La curvatura $\kappa(s)$ in s è dunque una misura della *rapidità con la quale la curva si discosta dalla direzione tangente* in s.

Teorema 1.26 (Equivalenza di due definizioni di curvatura)**.** *Sia $I\xrightarrow{\alpha}\mathbb{R}^3$ una curva di classe*[6] *C^2 e regolare*[7]*, parametrizzata mediante la lunghezza d'arco. Fissiamo un punto $P=\alpha(s)$ sulla curva e sia $Q=\alpha(s+\Delta s)$ un punto sulla curva vicino a P. Chiamiamo $\Delta\vartheta(>0)$ l'angolo fra i vettori tangenti in P e Q. Definiamo la curvatura $\kappa(s)$, $s\in I$, come:*

$$\kappa(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|} \tag{1.66}$$

Allora $\kappa(s)$ è uguale al modulo del vettore accelerazione $\alpha''(s)$:

$$\kappa(s)=|\alpha''(s)| \tag{1.67}$$

Nota. *Poiché, per definizione, $\mathbf{T}(s)=\alpha'(s)$, e quindi $\alpha''(s)=\mathbf{T}'(s)$, l'uguaglianza* (1.67) *si può scrivere anche:*

$$\kappa(s)=|\mathbf{T}'(s)| \tag{1.68}$$

[6] Una curva parametrizzata $I\xrightarrow{\alpha}\mathbb{R}^3$, $\alpha(t)=(x(t),y(t),z(t))$ si dice di *classe* C^2 se le sue componenti $x(t),y(t),z(t)$ sono funzioni di classe C^2, cioè derivabili due volte con derivata seconda continua.

[7] Una curva parametrizzata $I\xrightarrow{\alpha}\mathbb{R}^3$ si dice *regolare* se il suo vettore tangente $\alpha'(t)$ è diverso dal vettore nullo, per ogni $t\in I$.

Dimostrazione Poiché i vettori tangenti $\alpha'(s)$ e $\alpha'(s+\Delta s)$ sono unitari (cioè di lunghezza uno) e formano un angolo $\Delta\vartheta$, si ha

$$|\alpha'(s+\Delta s)-\alpha'(s)| = 2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2} \tag{1.69}$$

come si vede dalla figura qui sotto:

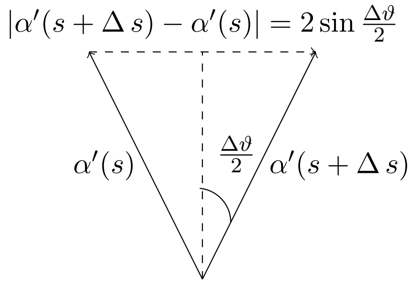


Figura 2: Il lato del triangolo isoscele è lungo 1 e l'angolo al vertice è $\Delta\vartheta$. Quindi la base è $2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}$. Ma la base è la differenza vettoriale tra i lati; quindi la sua lunghezza è $|\alpha'(s+\Delta\, s)-\alpha'(s)|$. Dunque $|\alpha'(s+\Delta\, s)-\alpha'(s)| = 2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}$.

Dunque,

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha'(s+\Delta\, s)-\alpha'(s)|}{|\Delta s|} &= \frac{2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{|\Delta s|}\\ &= \frac{\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}}\cdot\frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}\end{aligned}$$

Si noti che quando $\Delta s\to 0$, anche $\Delta\vartheta\to 0$. Allora, quando $\Delta s\to 0$, il primo membro tende a $|\alpha''(s)|$, mentre il secondo membro tende[8] a $\kappa(s)$. Dunque, abbiamo dimostrato che

$$\kappa(s) = |\alpha''(s)| \tag{1.70}$$

Q.E.D.

[8]Si noti che $\lim_{\Delta\vartheta\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}} = 1$ e $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|} = \kappa(s)$ per definizione.

1.25 Decomposizione dell'accelerazione

Ricordiamo alcune nozioni sulle parametrizzazioni di una curva.

Sia $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ una curva regolare (cioè soddisfacente: $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$). Fissato $t_0 \in I$, si chiama *lunghezza d'arco (a partire da t_0)* la funzione φ, denotata più semplicemente s, così definita:

$$I \xrightarrow{\varphi} J, \qquad t \longmapsto \varphi(t) = s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau \tag{1.71}$$

dove $J = \varphi(I)$. L'interpretazione è semplice: $s(t)$ è la lunghezza (con segno) dell'arco di curva dal valore t_0 al valore t del parametro, ossia è la distanza, misurata sulla curva, dal punto $\alpha(t_0)$ al punto $\alpha(t)$. Se $t > t_0$, $s(t) > 0$; se $t < t_0$, $s(t) < 0$.

La funzione φ è invertibile. Infatti, è suriettiva (perché, per definizione, il suo codominio coincide con la sua immagine: $J = \varphi(I)$) ed è iniettiva, in quanto è strettamente crescente, perché $\varphi'(t) = |\alpha'(t)| > 0$. In generale, il parametro sull'intervallo iniziale I si denota t, il parametro sull'intervallo J si chiama s ('parametro lunghezza d'arco') e le due funzioni $I \xrightarrow{\varphi} J$ e $J \xrightarrow{\varphi^{-1}} I$ (l'una inversa dell'altra) si denotano, rispettivamente, $s = s(t)$ e $t = t(s)$. Si noti che, per la regola di derivazione della funzione inversa (qui è utile la notazione di Leibniz),

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)} = \frac{1}{|\alpha'(t(s))|} \tag{1.72}$$

Si consideri ora curva $\hat{\alpha} = \alpha \circ \varphi^{-1}$:

$$J \xrightarrow{\hat{\alpha}} \mathbb{R}^3, \qquad s \longmapsto \hat{\alpha}(s) = \alpha(\varphi^{-1}(s)) = \alpha(t(s)) \tag{1.73}$$

La curva $\hat{\alpha}$ si chiama *riparametrizzazione alla lunghezza d'arco (o con lunghezza unitaria)* della curva α. Il seguente diagramma aiuta a chiarire la situazione.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{R}^3 \\
J \arrow[ur, "\hat{\alpha} = \alpha \circ \varphi^{-1}"'] \arrow[u, bend left=60, "\varphi^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

Questa curva $\hat{\alpha}$ ha *velocità scalare unitaria.* Infatti, usando la regola della derivata della funzione composta, otteniamo:

$$\left|\frac{d}{ds}\hat{\alpha}(s)\right| = \left|\frac{d}{ds}\alpha(t(s))\right| = \left|\left[\frac{d\alpha(t)}{dt}\right]_{t=t(s)} \frac{dt}{ds}\right| = \left|\alpha'(t(s))\right| \; \frac{1}{|\alpha'(t(s))|} = 1 \tag{1.74}$$

Teorema 1.27 (Decomposizione dell'accelerazione lungo **T** e **N**). *Sia $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ una curva regolare e di classe C^2, parametrizzata con un parametro arbitrario. Allora l'accelerazione $\alpha''(t)$ si decompone nel modo seguente:*

$$\alpha''(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N} \tag{1.75}$$

dove $v(t) = |\alpha'(t)|$ è la velocità scalare e κ è la curvatura.

Dimostrazione Se $\hat{\alpha}$ è la riparametrizzazione di α alla lunghezza d'arco (a partire da un qualunque valore iniziale $t_0 \in I$), possiamo vedere α come funzione composta: $\alpha = \hat{\alpha} \circ \varphi$, dove $\varphi(t) = s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau$ è la funzione lunghezza d'arco (si veda il paragrafo precedente):

$$\alpha(t) = \hat{\alpha}(\varphi(t)) = \hat{\alpha}(s(t)) \tag{1.76}$$

Possiamo allora calcolare le derivate successive di $\alpha(t)$ usando la regola di derivazione delle funzioni composte. Per la derivata prima di $\alpha(t)$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{d\hat{\alpha}(s(t))}{dt} \\ &= \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{\alpha}(s)}{ds} \\ &= v\mathbf{T}(s) \end{aligned}$$

dove $v = v(t) = ds/dt = |\alpha'(t)|$ è la velocità scalare La derivata seconda di $\alpha(t)$ (cioè l'accelerazione $\alpha''(t)$) è allora data da:

$$\begin{aligned} \alpha''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\left(v\mathbf{T}(s)\right) \\ &= \frac{dv}{dt}\mathbf{T}(s) + v\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds}\frac{ds}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt}\mathbf{T}(s) + v^2\kappa\mathbf{N}(s) \end{aligned}$$

perché $\frac{ds}{dt} = v$ e (per definizione di κ e di $\mathbf{N}$) $\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} = \kappa\mathbf{N}$. Q.E.D.

Osservazione Se denotiamo $\rho = 1/\kappa$ il raggio di curvatura nel punto $\alpha(t)$ (nell'ipotesi $\kappa \neq 0$), la (1.79) si può scrivere:

$$\alpha''(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N} \tag{1.77}$$

1.26 Formula per la curvatura

Teorema 1.28 (Formula per la curvatura rispetto a un parametro arbitrario)**.** *Sia* $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ *una curva regolare*[9] *e di classe* $\mathcal{C}^2$*, parametrizzata mediante un parametro arbitrario. Allora la curvatura* $k(t)$ *esiste in ogni suo punto e*

$$k(t) = \frac{|\underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t)|}{|\underline{\alpha}'(t)|^3} \tag{1.78}$$

dove $\underline{\alpha}'(t) = \frac{d}{dt}\underline{\alpha}(t)$ *è il vettore tangente e* $\underline{\alpha}''(t) = \frac{d}{dt}\underline{\alpha}'(t)$ *è il vettore accelerazione.*

Dimostrazione Partiamo dalla formula (1.77) che dà la decomposizione dell'accelerazione $\underline{\alpha}''(t)$ lungo i vettori **T** e **N**:

$$\underline{\alpha}''(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2 k\mathbf{N} \tag{1.79}$$

dove $v = v(t) = |\alpha'(t)|$ è la velocità scalare e k la curvatura in t. Calcoliamo ora il prodotto vettoriale $\underline{\alpha}' \times \underline{\alpha}''$:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t) &= (v\mathbf{T}) \times \left(\frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2 k\mathbf{N}\right) \\ &= v\frac{dv}{dt}\underbrace{\mathbf{T} \times \mathbf{T}}_{=\mathbf{0}} + v^3 k \underbrace{\mathbf{T} \times \mathbf{N}}_{=\mathbf{B}} \\ &= v^3 k\mathbf{B} \end{aligned}$$

Da $\underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t) = v^3 k\mathbf{B}$ segue (prendendo i moduli e ricordando che $|\mathbf{B}| = 1$)

$$k = \frac{|\underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t)|}{v^3|\mathbf{B}|} = \frac{|\underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t)|}{v^3} = \frac{|\underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t)|}{|\underline{\alpha}'(t)|^3}.$$

che è la formula (1.78), che volevamo dimostrare. □

Osservazione: casi particolari.

1. *Curvatura di una curva piana.* Se $\underline{\alpha}$ è una curva piana $\underline{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$, allora

$$k(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \tag{1.80}$$

Ad esempio, la curvatura dell'ellisse

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos t \\ y(t) &= b\sin t \end{aligned}$$

[9] Ricordiamo che una curva $\underline{\alpha}$ si dice *regolare* se $\underline{\alpha}'(t) \neq 0$ per ogni t. Per le curve non regolari non si può definire il concetto di vettore tangente unitario **T** e di curvatura.

$(a \geq b > 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, è data da:

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

2. *Curvatura di una curva data come grafico di una funzione.* Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Consideriamo la curva piana parametrizzata

$$I \xrightarrow{\underline{\alpha}} \mathbb{R} \qquad t \mapsto \underline{\alpha}(t) = (t, f(t))$$

Allora si vede, con facili calcoli, che $v(t) = |\alpha'(t)| = (1 + f'(t)^2)^{1/2}$ e

$$k(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}} \tag{1.81}$$