Analisi e Geometria 1
Anno accademico 2021 / 2022

Federico Lastaria

federico.lastaria@polimi.it

Homepage:

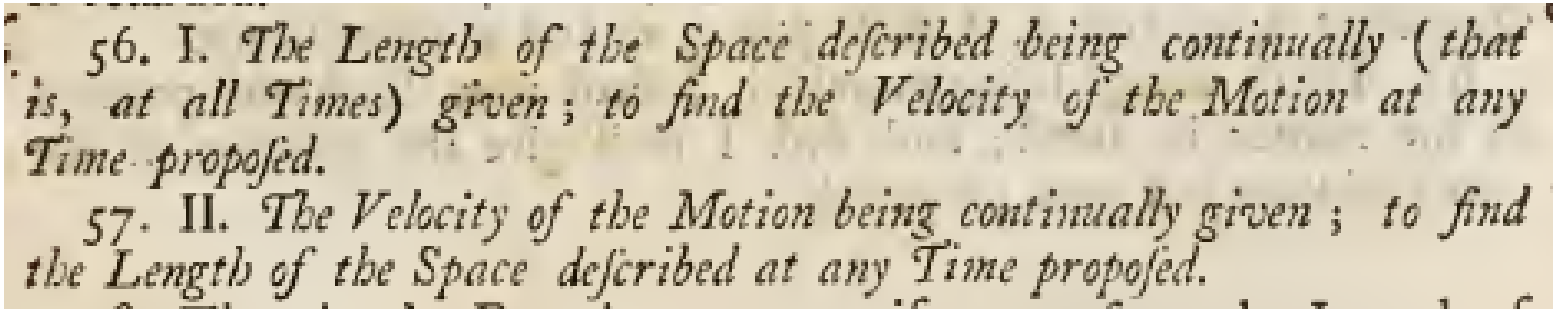
https://home.aero.polimi.it/lastaria/

Dipartimento di Scienze e Tecnologie Aerospaziali (DAER)

Politecnico di Milano

Cos'è il Calcolo Infinitesimale?

Newton, *Method of Fluxions* (1671; pubblicato postumo nel 1736).


56. I. *The Length of the Space described being continually (that is, at all Times) given; to find the Velocity of the Motion at any Time proposed.*

57. II. *The Velocity of the Motion being continually given; to find the Length of the Space described at any Time proposed.*

I. *Data la lunghezza dello spazio in modo continuo (cioè, in tutti i tempi), trovare la velocità del moto a ogni istante assegnato.*

II. *Data la velocità del moto in modo continuo, trovare la lunghezza dello spazio percorso a ogni tempo assegnato.*

Cos'è il Calcolo Infinitesimale?

Tentativo di descrizione (più che una 'definizione'):
La matematica del cambiamento di grandezze che variano con continuità delle relazioni tra di esse.
Curve: cambio nella direzione.
Moto: cambio nella posizione.

Concetti, risultati e strumenti fondamentali

- *Derivata* Rapidità di variazione di una quantità.
- *Integrale* Somma totale di parti infinitesimali.
- *Teorema Fondamentale del Calcolo*: relazioni tra derivazione e integrazione.
- *Equazioni differenziali*. (Esempio: $\mathtt{F} = m\mathtt{a}$).
  Modelli matematici di una evoluzione deterministica.

Derivata: *Rapidità istantanea di variazione*

Definizione

La derivata di f in x_0, denotata $f'(x_0)$, è il limite del rapporto incrementale:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

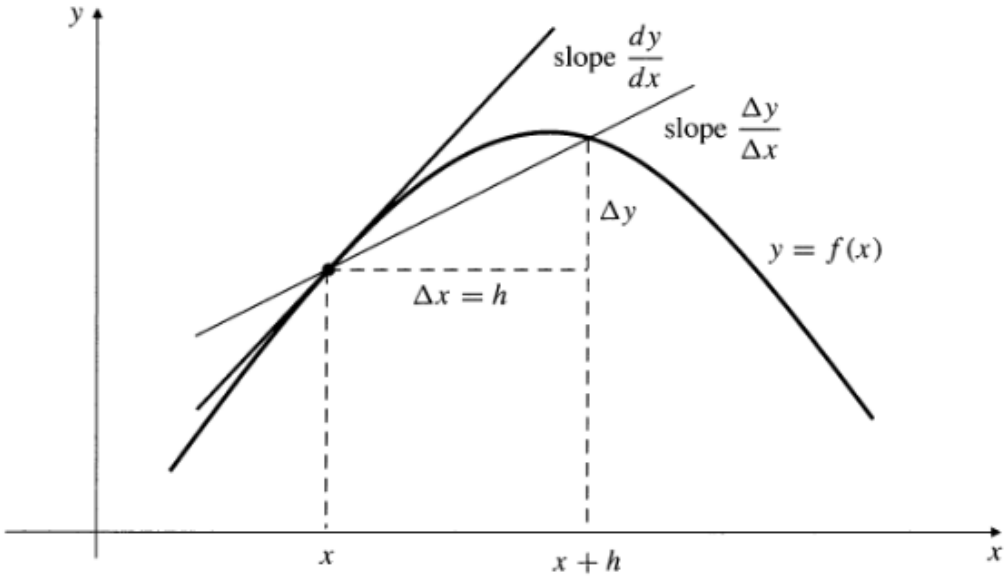
(se questo limite esiste finito).

$$f(x_0 + h) \sim f(x_0) + f'(x_0)h \qquad (h \text{ piccolo})$$

$$\text{Variazione } \Delta f \;=\; f'(x_0)h \qquad (h \text{ piccolo})$$

La derivata e il Problema delle Tangenti

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Problema delle Tangenti

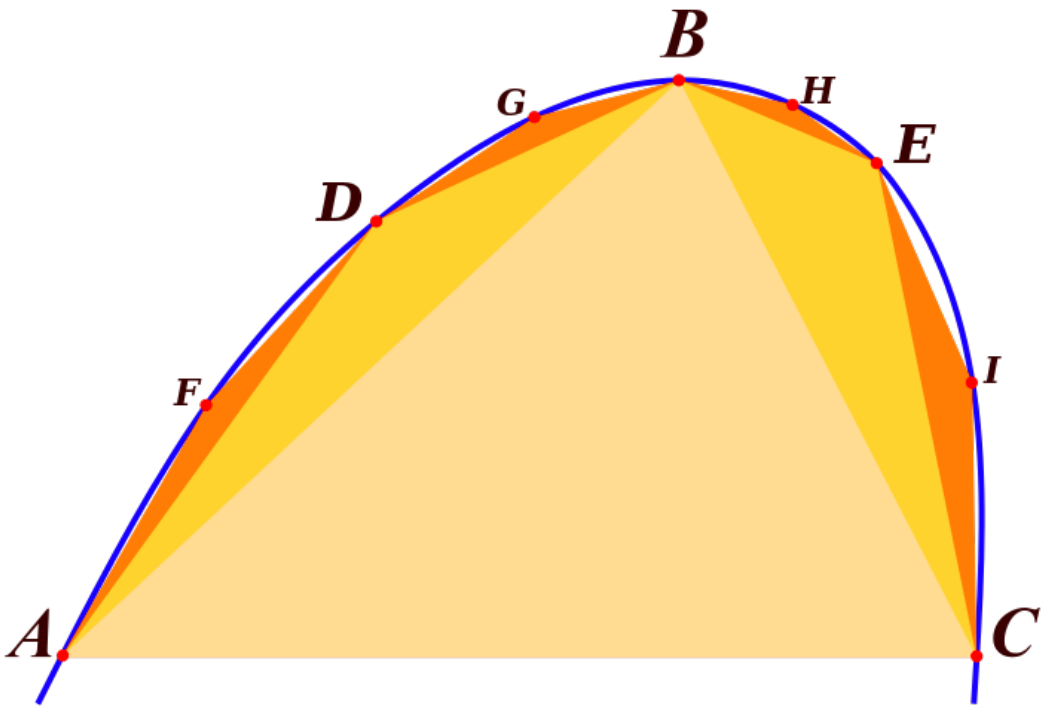
- Pendenza della secante: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- Pendenza della tangente ? $\dfrac{dx}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

La derivata e il Problema della Velocità Istantanea

Caduta libera di un corpo (Galileo)

- Posizione all'istante t: $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$
- Velocità $v(t)$ all'istante t: $v(t) = s'(t) = gt$
- Piccolo tratto percorso da t a $t + dt$: $v(t)\,dt = gt\,dt$

Archimede (287-212 a.C.). Area del segmento parabolico.

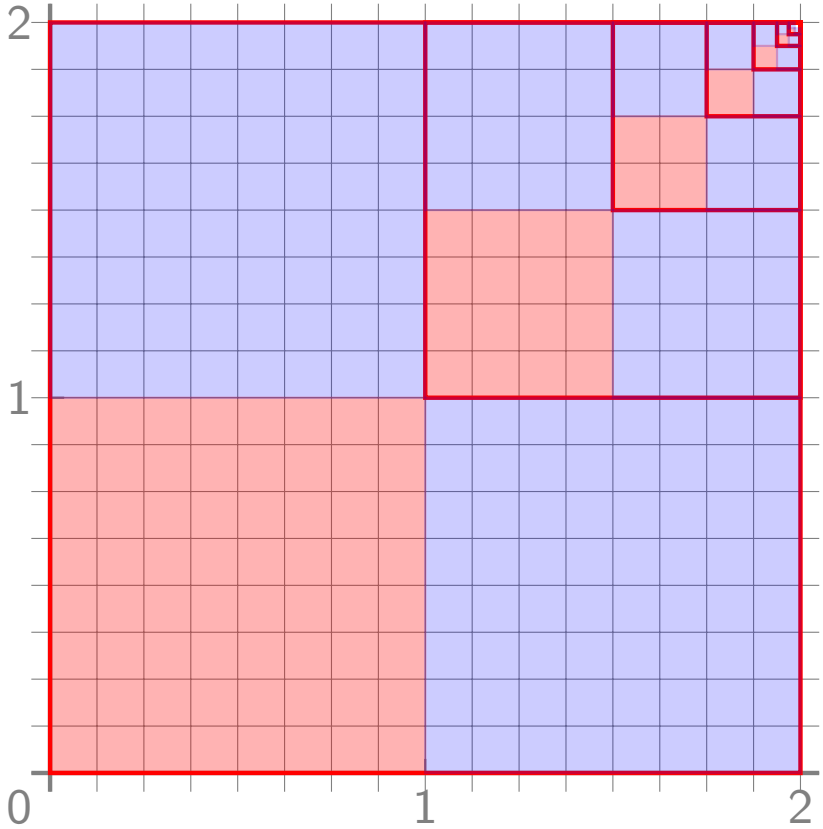


$ADB + BEC = \frac{1}{4} ABC$ e così via. Iterando:

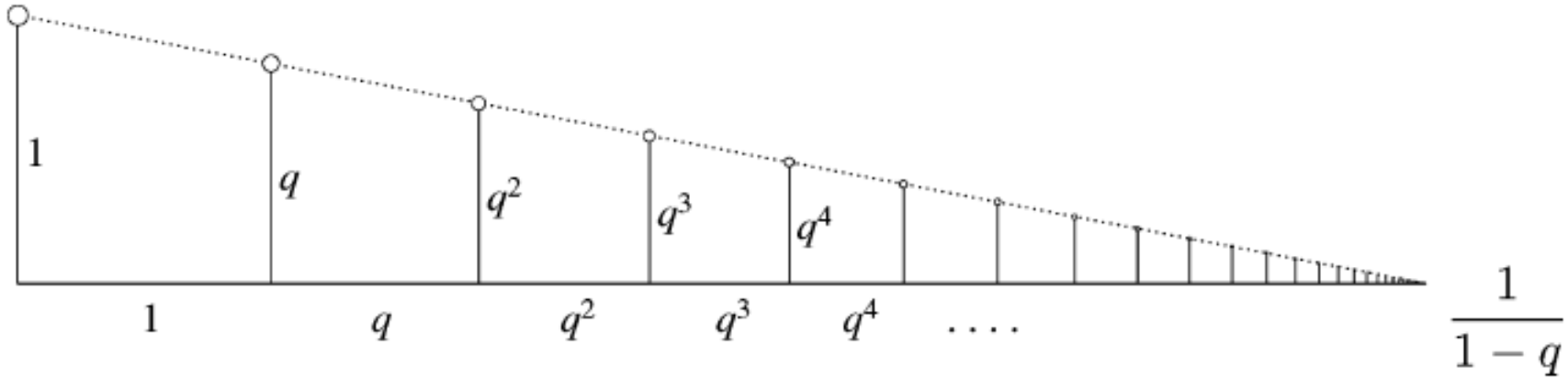
$$\text{Area} = ABC + \frac{1}{4} ABC + \frac{1}{4^2} ABC + \cdots + \frac{1}{4^n} ABC + \cdots$$

$$\text{Area} = ABC \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots \right) = ABC \, \frac{4}{3}$$

Somma infinita: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{4}{3}$ (Archimede)



La serie geometrica. (Esempio di somma infinita).

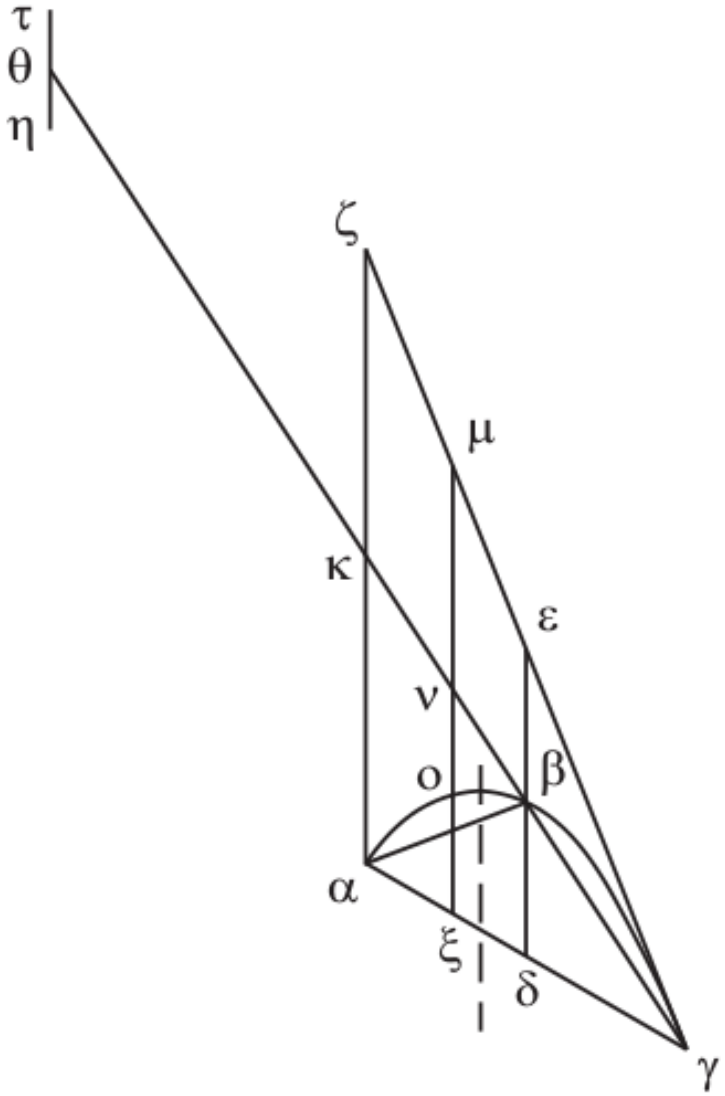


Se $0 < q < 1$,

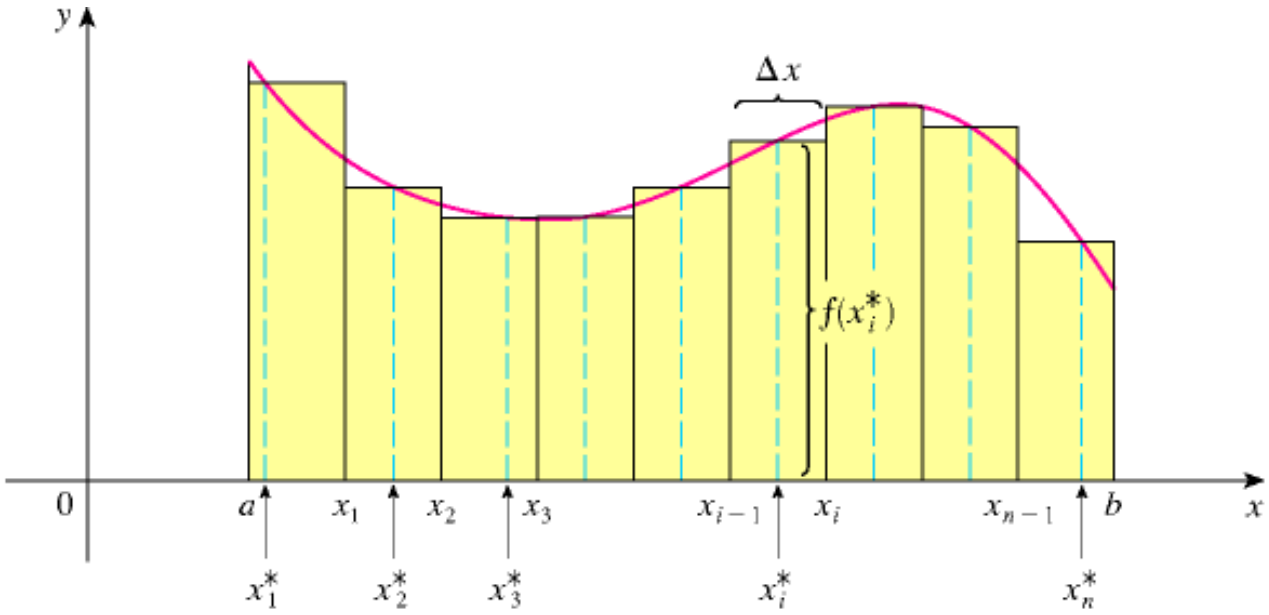
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$
$$= \frac{1}{1-q}$$

Perché? Studiare la figura. [Esercizio]

Il Metodo (Archimede). Legge della Leva per calcolare aree, volumi e centri di gravità.



Integrale: *Somma totale di parti 'infinitesimali'*.



Definizione (Integrale come limite di somme (Riemann, 1854))

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(x_i^*)\Delta x_i$$

dove $|\Delta| = \max_{i=1,\dots,m} \Delta x_i$ *è la massima lunghezza dei sotto-intervalli della partizione* $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Esempio fondamentale della relazione Derivata/Integrale

Integrale della velocità = Spazio percorso

- Velocità in t: $v(t) = s'(t)$, (Supponiamo v continua)
- Spazio percorso nell'intervallino di tempo Δt_i : $v(t_i^*)\Delta t_i$
- Spazio $s(t) - s(t_0)$ percorso da t_0 a t:

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i v(t_i^*)\Delta t_i \;=\; \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau = s(t) - s(t_0)$$

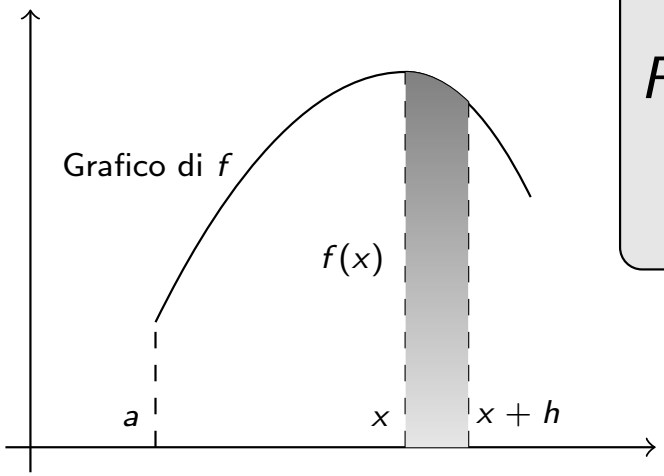
- È una versione del *Teorema Fondamentale del Calcolo (I)*:

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} s'(\tau)\, d\tau \;=\; s(t) - s(t_0)}$$

Teorema Fondamentale del Calcolo (II)

Supponiamo f continua. Definiamo:

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du$$
$$= \text{Area sotto il grafico di } f \text{ da } a \text{ fino a } x$$



$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\text{Area del 'rettangolino' grigio}}{\text{Base}}$$

Esiste $x^* \in [x, x+h]$:

$$= \frac{h\,f(x^\star)}{h} = f(x^\star) \to f(x) \qquad (\text{per } h \to 0).$$

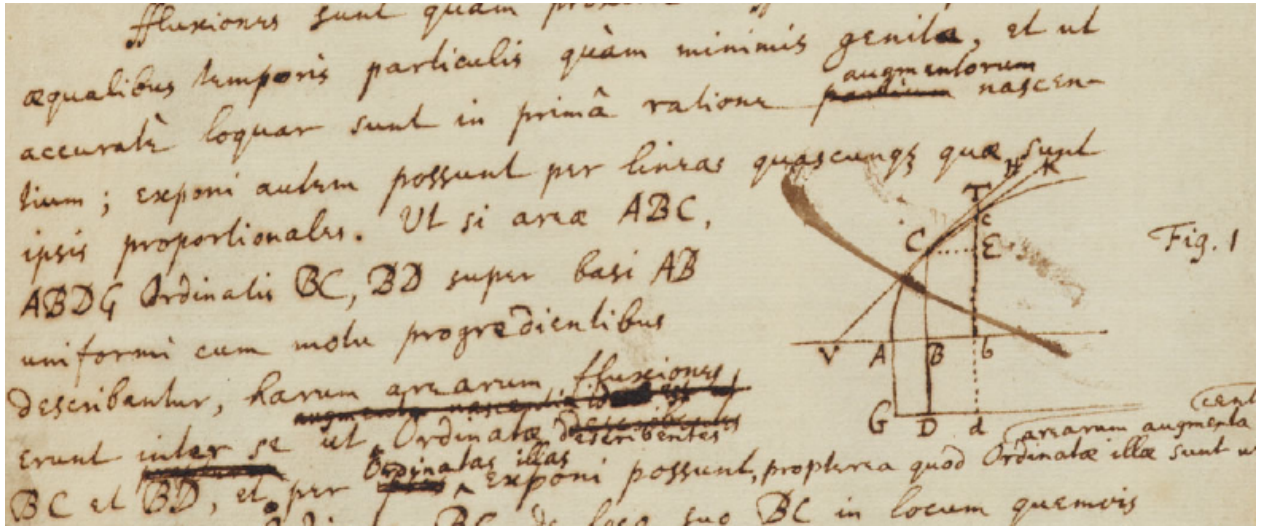
Segue:

Teorema Fondamentale del Calcolo Infinitesimale

Se f è continua,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(u)\,du\right] = f(x)$$

Teorema in: Newton, ‘De Quadratura Curvarum’



“Così, se le aree ABC , $ABDG$ sono descritte dalle ordinate BC, BD che avanzano con moto uniforme sulla base AB, le flussioni delle loro aree saranno tra loro in rapporto come le ordinate che descrivono BC e BD, e possono essere rappresentate per mezzo di quelle ordinate, perché quelle ordinate stanno tra loro come gli incrementi nascenti delle aree.? (Isaac Newton, *De Quadratura Curvarum*, manoscritto del 1691-1692)