Il campo ordinato completo $\mathbb{R}$ dei numeri reali
Presentazione assiomatica

Contenuto

- Campo ordinato completo.
- Teorema di esistenza di sup e inf.
- Proprietà di Archimede.
- Spazi metrici. Successioni convergenti.
- Successioni monotòne. Intervalli inscatolati. Classi contigue.
- Unicità del limite. Permanenza del segno.

Cosa significa che $\mathbb{R}$ è un campo ?

Definizione (Campo)

Un campo è un insieme con due operazioni binarie, somma e prodotto, che soddisfano:

1. *(Associatività)*
   $a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a(bc) = (ab)c$
2. *(Commutatività)*
   $a + b = b + a \qquad ab = ba$
3. *(Identità)* $\exists 0, 1 \qquad a + 0 = a, \qquad a\,1 = a$
4. *(Inversi)*
   $\forall a\, \exists(-a) \qquad a + (-a) = 0.$
   $\forall a \neq 0 \quad \exists a^{-1} \qquad a\,a^{-1} = 1.$
5. *(Distributività)* $a\,(b + c) = (ab) + (ac)$

Regole di conto

Alcune ben note regole di conto sono semplici conseguenze delle proprietà di campo.

Esercizio

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ (o in qualunque campo) valgono:

1. $a\,0 = 0$. *(Quindi: 0 non esiste il reciproco di 0, cioè non si può dividere per 0).*
2. *("Più per meno fa meno")* $a(-b) = -(ab)$.
3. *("Meno per meno fa più ")* $(-a)(-b) = ab$.
4. *(Legge di annullamento del prodotto) Se* $ab = 0$, *allora o* $a = 0$ *oppure* $b = 0$.

Cosa significa che $\mathbb{R}$ è un campo ordinato ?

Nel campo reale $\mathbb{R}$ è definita una relazione d'ordine totale che è compatibile con la somma e il prodotto. Più precisamente, questo significa che:

- In $\mathbb{R}$ è definita una relazione d'ordine totale:
  1. Se $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ e $y < z$, allora $x < z$ (transitività)
  2. Se $x, y \in \mathbb{R}$, vale esattamente una tra:
     $$x < y, \qquad x = y, \qquad y < x \qquad \text{(tricotomia)}$$
- La relazione d'ordine è compatibile con la somma e il prodotto:
  1. Se $x < y$, allora $x + z < y + z$ (per ogni z).
  2. Se $x < y$ e $z > 0$, allora $xz < yz$.

Esercizio

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $x^2 \geq 0$ (e $x^2 = 0$ solo se $x = 0$).

Cosa significa che $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo ?

La completezza, proprietà che caratterizza il campo ordinato $\mathbb{R}$, si può esprimere in diverse forme equivalenti tra loro, tutte molto importanti. Scegliamo come assioma di completezza la Proprietà di Separazione; da questa, dedurremo le altre forme della completezza.

Assioma di completezza (nella forma di Proprietà di Separazione)

Se A e B sono due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che

$$\forall a \in A, \forall b \in B \qquad a \leq b$$

allora esiste (almeno) un $\lambda \in \mathbb{R}$, detto elemento separatore, tale che

$$\forall a \in A, \forall b \in B \qquad a \leq \lambda \leq b$$

Definizione di $\mathbb{R}$

L'approccio assiomatico ai numeri reali conduce allora a questa:

Definizione (Campo dei reali, o retta reale)

Il campo dei numeri reali (o retta reale) $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo.

Questa definizione è corretta, perché valgono i seguenti due fatti, concettualmente importanti, dei quali omettiamo le dimostrazioni (non difficili, ma laboriose, soprattutto la prima):
1) La esistenza di modelli di campo ordinato completo, che si possono costruire, ad esempio, dai razionali, o da $\mathbb{N}$ (Sezioni di Dedekind, intervalli inscatolati, costruzioni geometriche eccetera).
2) La unicità del campo ordinato completo, nel senso che ora illustriamo.

Cosa significa unicità del campo ordinato completo $\mathbb{R}$

Teorema (Unicità del campo ordinato completo)

Due campi ordinati completi sono isomorfi.

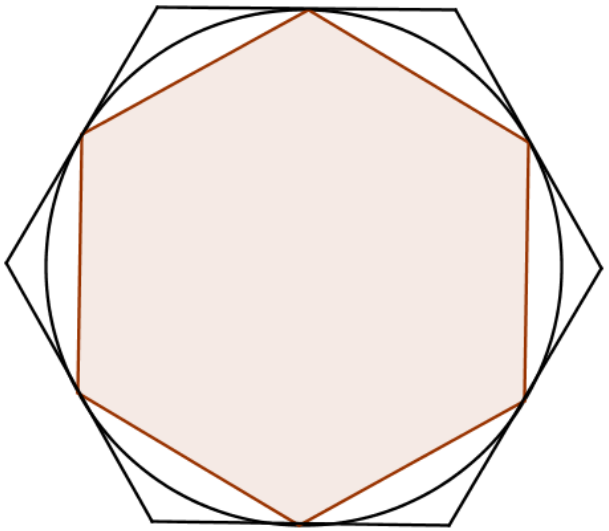
Precisamente, si dimostra che se K e K' sono campi ordinati completi, allora esiste un *isomorfismo* (e uno solo) da K a K', cioè esiste una (unica) applicazione *biunivoca* $f : K \longrightarrow K'$, che *preserva la somma, il prodotto e l'ordinamento*:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(xy) &= f(x)f(y) \\ x \leq y &\implies f(x) \leq f(y) \end{aligned} \tag{1}$$

Due campi ordinati completi K e K' si possono dunque identificare tra loro, cioè si considerano come "lo stesso" campo.

Poligoni regolari circoscritti e inscritti in una circonferenza. (Archimede, La Misura del Cerchio).

Un esempio guida importante per i prossimi concetti: limitazioni superiori, limitazioni inferiori, sup, inf, successioni monotòne, classi contigue, intervalli inscatolati eccetera.



Se l_n, L_n sono i perimetri degli n-goni regolari inscritti e circoscritti a una circonferenza, si ha:

$$l_n < \textit{Lunghezza della Circonferenza} < L_n$$

Definizioni

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto.

1. *E è limitato superiormente se*
$$(\exists \beta \in \mathbb{R})\,(\forall x \in E) \qquad x \leq \beta$$
Un tale numero β è allora una limitazione superiore di E.
2. *Se β è una limitazione superiore di E e inoltre $\beta \in E$, si dice che β è il massimo di E, e si scrive $\beta = \max E$.*
3. *E è limitato inferiormente se*
$$(\exists \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall x \in E) \qquad \alpha \leq x$$
Un tale numero α è allora una limitazione inferiore di E.
4. *Se α è una limitazione inferiore di E e inoltre $\alpha \in E$, si dice che α è il minimo di E, e si scrive $\alpha = \min E$.*
5. *E si dice limitato se è sia limitato superiormente, sia limitato inferiormente.*

Esistenza dell'estremo superiore

Teorema (Esistenza della minima limitazione superiore (sup))

Se E è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ limitato superiormente, l'insieme delle limitazioni superiori ha sempre un minimo.

Definizione (Estremo superiore)

Se $E \subset \mathbb{R}$ è non vuoto e limitato superiormente, la minima limitazione superiore di E si denota $\sup E$ *e si chiama* estremo superiore *di E. Il numero $s = \sup E$ è caratterizzato dalle proprietà:*
i) $\forall x \in E \qquad x \leq s$
ii) $(\forall s' < s)\,(\exists x \in E) \qquad x > s'$
Se $E \subset \mathbb{R}$ non è superiormente limitato, si pone $\sup E = +\infty$

Dimostrazione dell'esistenza del sup.

Denotiamo

$$Z = \{z \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E \quad x \leq z\} \tag{2}$$

l'insieme di tutte le limitazioni superiori di E. (L'insieme Z non è vuoto, perché, per ipotesi, E è superiormente limitato). Per l'assioma di completezza (*Proprietà di Separazione*), esiste un numero λ che soddisfa le due disuguaglianze

$$(\forall x \in E)\ (\forall z \in Z) \qquad x \leq \lambda \leq z \tag{3}$$

La prima disuguaglianza $\forall x \in E \quad x \leq \lambda$ dice che λ è una limitazione superiore di E. La seconda disuguaglianza $\forall z \in Z \quad \lambda \leq z$ dice che λ è la minima limitazione superiore di E. Q.E.D.

Esistenza dell'estremo inferiore

In modo del tutto analogo, si dimostra l'esistenza dell'estremo inferiore.

Teorema (Esistenza della massima limitazione inferiore (inf))

Se E è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ limitato inferiormente, l'insieme delle limitazioni inferiori ha sempre un massimo.

Definizione (Estremo inferiore)

Se $E \subset \mathbb{R}$ è non vuoto e limitato inferiormente, la massima limitazione inferiore di E si denota $\inf E$ *e si chiama* estremo inferiore *di E. Il numero $i = \inf E$ è caratterizzato dalle proprietà:*
i) $\forall x \in E \qquad i \leq x$
ii) $(\forall i' > i)\,(\exists x \in E) \qquad x < i'$
Se $E \subset \mathbb{R}$ non è inferiormente limitato, si pone $\inf E = -\infty$

La proprietà di Archimede

I numeri naturali sono gli interi non negativi: 0, 1, $1+1=2$, $1+1+1=3$, ...

Teorema (Proprietà di Archimede. Prima versione)

L'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali non è limitato superiormente.

DIMOSTRAZIONE Supponiamo che $\mathbb{N}$ sia limitato superiormente. Sia $L = \sup \mathbb{N}$. Siccome L è la minima limitazione superiore, $L-1$ non è una limitazione superiore per $\mathbb{N}$, cioè: $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tale che $N_0 > L-1$. Ma allora $N_0 + 1 > L$. Assurdo. ($N_0 + 1 \in \mathbb{N}$ non può essere maggiore di $L = \sup \mathbb{N}$.)

Teorema (Proprietà di Archimede. Seconda versione)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ positivi, $a < b$. Allora esiste un numero naturale n tale che $na > b$

Si dimostra facilmente per assurdo. [Esercizio]

$\mathbb{R}$ è anche uno spazio metrico

Definizione (Distanza in $\mathbb{R}$)

La distanza tra due punti $x, y \in \mathbb{R}$ è definita nel modo seguente:

$$d(x, y) = |x - y|$$

Proprietà della distanza

Per tutti gli $x, y, z \in \mathbb{R}$:

1. $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$. $\quad \mathrm{d}(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.
2. $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$
3. $\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$

Definizione

Diciamo che $\mathbb{R}$, munito della distanza d, è uno spazio metrico.

Succcessioni

Definizione

Si chiama successione in un insieme A (o di elementi di A) una funzione

$$\mathbb{N} \xrightarrow{a} A$$

il cui dominio è l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ dei numeri naturali e il cui codominio è A.

Alcuni dei modi per denotare una successione:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \qquad (a_n) \qquad a_n$$

eccetera.

Succcessioni convergenti in $\mathbb{R}$

Definizione

Siano (a_n) una successione in $\mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$. Allora (a_n) converge a L (o tende a L, o ha per limite L) e si scrive

$$a_n \to L, \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$n > N_0 \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

In simboli, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = L}$ significa:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad n > N_0 \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

Riformulazione (equivalente) di convergenza

Definizione (Modo equivalente di definire la convergenza)

Sia (a_n) *una successione in* $\mathbb{R}$ *e sia* $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

se, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \text{DEFINITIVAMENTE}$$

cioè, per tutti gli n sufficientemente grandi.

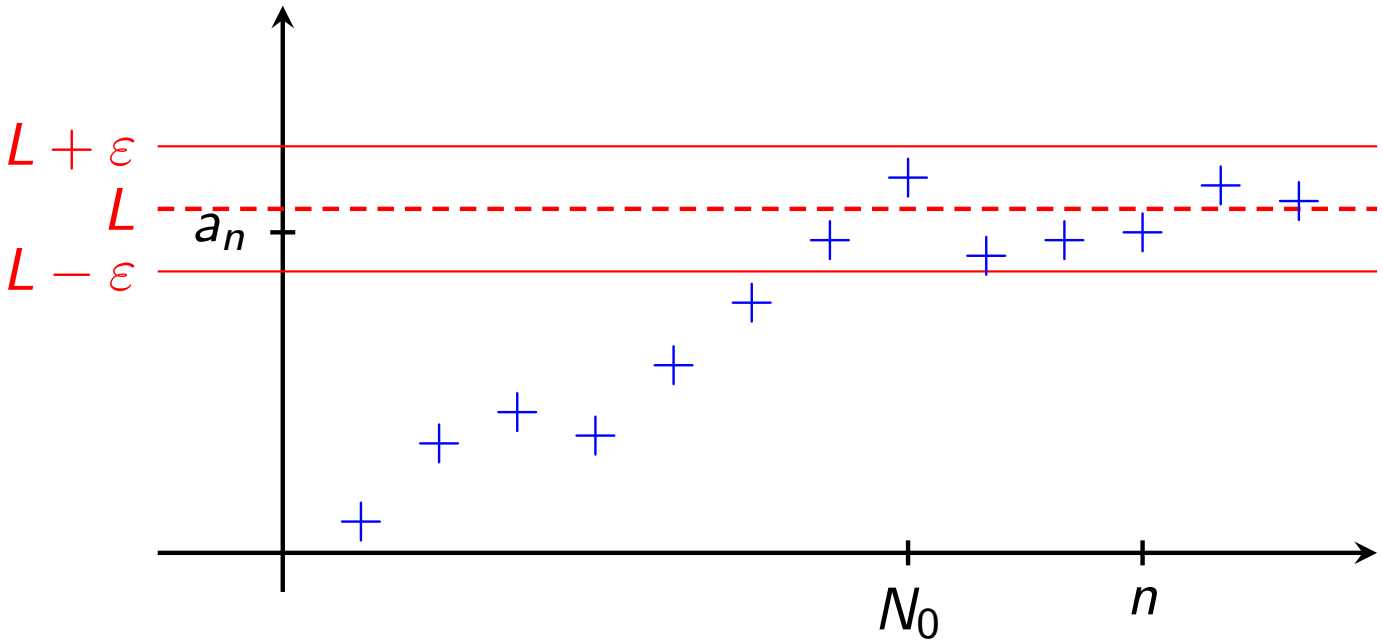
L'avverbio 'definitivamente' ha qui un signficato tecnico preciso. Significa: per tutti gli n sufficientemente grandi, o per tutti gli n 'da un certo punto in poi'. In altri termini, $(a_n) \to L$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, vale $|a_n - L| < \varepsilon$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$, tranne un numero finito.

Una traduzione geometrica

$$\boxed{(a_n) \to L}$$

significa:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad n > N_0 \implies |a_n - L| < \varepsilon$$



Esempio: Un limite importante

Teorema

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

DIMOSTRAZIONE Segue dalla Proprietà di Archimede.
Sia $\varepsilon > 0$. Esiste N tale che $N > 1/\varepsilon$. (Tale N esiste perché $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente). Allora per ogni $n \geq N$, abbiamo $0 < 1/n \leq 1/N < \varepsilon$, e quindi $|1/n - 0| < \varepsilon$.
(Le parti scritte in rosso corrispondono alla definizione di convergenza).

3) Proprietà delle successioni monotòne limitate

Teorema (Successioni monotòne limitate)

Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$ monotòna crescente (in senso lato)

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$

e superiormente limitata. Allora essa converge in $\mathbb{R}$ a un limite finito, che è l'estremo superiore dell'insieme dei suoi elementi.

Applicazione: Il numero e di Napier

Si dimostra che la successione in $\mathbb{R}$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{4}$$

è crescente e limitata. Dunque, in $\mathbb{R}$ converge. Il suo limite si denota e, è un numero irrazionale ($e = 2.718281...$).

Dimostrazione (Successioni monotòne)

Poniamo $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ e poniamo $L = \sup A$. (Per la completezza di $\mathbb{R}$, $\sup A$ esiste finito). Prendiamo un $\varepsilon > 0$.

- $L - \varepsilon < L$ e dunque $L - \varepsilon$ <u>non</u> è una limitazione superiore di A. Cioè,

$$\exists k \in \mathbb{N} \qquad L - \varepsilon < a_k$$

- La successione (a_n) è non decrescente. Quindi, per ogni $n > k$

$$L - \varepsilon < a_k \leq a_n$$

  e quindi, per ogni $n > k$,

$$L - \varepsilon < a_n \leq L$$

  (perché $a_n \leq L$, per ogni n).

Allora, per l'arbitrarietà di ε, (a_n) converge a L. Q.E.D.

Proprietà degli intervalli compatti inscatolati

DEFINIZIONE Se $a \leq b$, l'insieme $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ si chiama intervallo chiuso e limitato, o intervallo compatto.

Teorema (Intervalli compatti inscatolati)

Sia $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ una successione di intervalli compatti (cioè, chiusi e limitati) inscatolati:

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots \tag{5}$$

Allora:

1. *Esiste almeno un punto che appartiene a tutti gli intervalli I_n:*
$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n \neq \emptyset.$$
2. *Se $(b_n - a_n) \to 0$, allora esiste un unico punto $c \in \mathbb{R}$ che appartiene a tutti gli intervalli I_n, $n \in \mathbb{N}$:*
$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n = \{1 \text{ punto}\} = \{c\}$$

Osservazione

Per meglio apprezzare l'enunciato del teorema sugli intervalli compatti, vediamo dapprima cosa succede con intervalli non compatti.

PROBLEMA Per n intero positivo, poniamo

$$J_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{n}\right\}$$

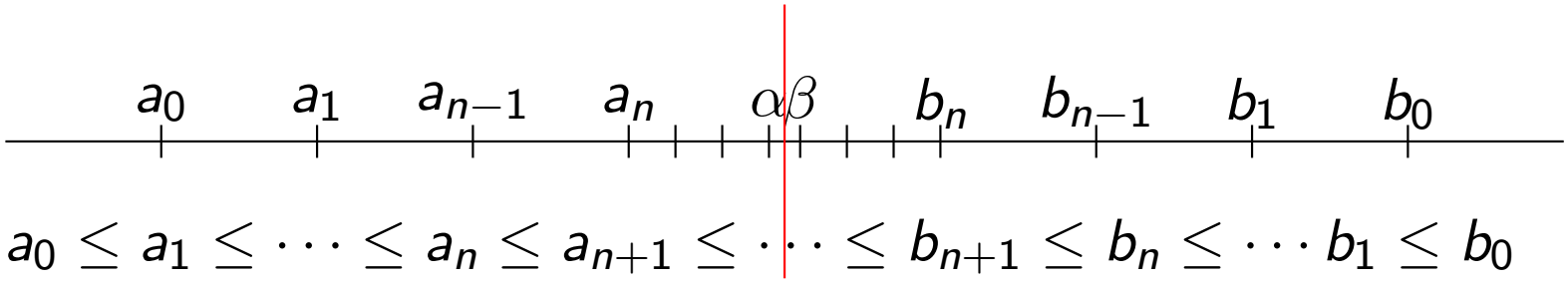
Esistono punti che appartengono a J_n per ogni $n \in \mathbb{N}$?
Detto altrimenti, a cosa è uguale l'intersezione

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} J_n \quad ?$$

RISPOSTA. $\emptyset$. (Dimostrarlo in modo rigoroso).

Dimostrazione. (Intervalli compatti inscatolati)

$\alpha = \lambda = \beta \quad$ (se $(b_n - a_n) \to 0$)



$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots b_1 \leq b_0$

1) Poniamo: $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{b_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ Per ogni n, m, $a_n < b_m$. Quindi A è limitato superiormente (un qualunque $b_m \in B$ è una limitazione superiore di A) e B è limitato inferiormente. Poniamo $\sup A = \alpha$ e $\inf B = \beta$. (Qui si usa la completezza). Ovviamente, $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_m$. In particolare, per $n = m$, vale $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$. Quindi $\bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n = [\alpha, \beta] \neq \emptyset$.

2) Supponiamo ora: $(b_n - a_n) \to 0$. Dico che allora $\alpha = \beta$. Infatti, supponiamo che sia $\alpha < \beta$. Abbiamo già visto che, per ogni n, vale $a_n \leq \alpha < \beta \leq b_n$. Ma allora $b_n - a_n \geq \beta - \alpha > 0$, contro l'ipotesi $(b_n - a_n) \to 0$ Q.E.D.

Esistenza e unicità dell'elemento separatore di due classi contigue di numeri reali.

Definizione

Diremo che (A, B) è una coppia di classi contigue di numeri reali se $A, B \subset \mathbb{R}$ sono sottoinsiemi non vuoti che soddisfano:

1. *Ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B.*
2. *Preso comunque un numero positivo ε, esistono un elemento $b \in B$ e un elemento $a \in A$ per i quali $b - a < \varepsilon$.*

Teorema (Classi contigue di numeri reali)

Se A e B sono classi contigue di numeri reali, allora esiste un unico $\lambda \in \mathbb{R}$ che soddisfa

$$a \leq \lambda \leq b$$

per ogni $a \in A$, per ogni $b \in B$.

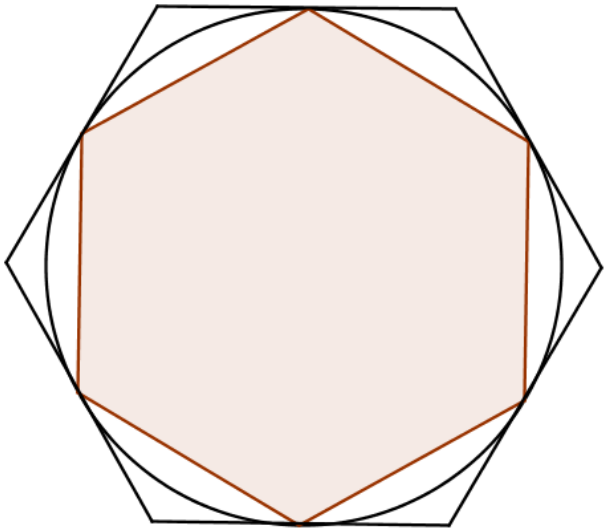
(Dimostrazione: Esercizio.)

Riepilogo: importanti conseguenze dell'assioma di completezza (dato nella forma di proprietà di separazione)

1. Esistenza dell'estremo superiore.
2. Convergenza delle successioni monotòne limitate.
3. Proprietà degli intervalli compatti inscatolati.
4. Esistenza e unicità dell'elemento separatore di due classi contigue di numeri reali.

Ciascuna di queste proprietà fornisce un metodo per definire (caratterizzare, individuare) uno specifico numero reale.

L'esempio di Archimede (poligoni inscritti e circoscritti) illustra visivamente ciascuno dei modi visti finora per caratterizzare un numero reale usando le varie forme della completezza di $\mathbb{R}$.



Se l_n, L_n sono i perimetri degli n-goni regolari inscritti e circoscritti a una circonferenza, si ha:

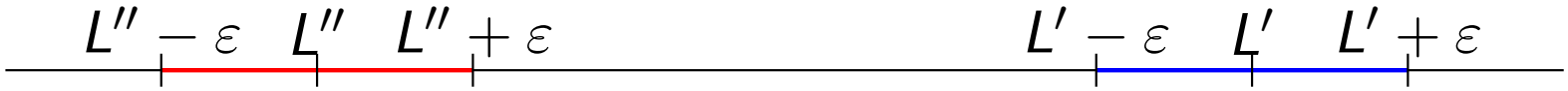
$$l_n < \textit{Lunghezza della Circonferenza} < L_n$$

https://www.geogebra.org/m/BhxyBJUZ

Unicità del limite. Prima dimostrazione.

Teorema (Unicità del limite)

Una successione in $\mathbb{R}$ ha al più un limite.



DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $a_n \to L'$, $a_n \to L''$ e $L' \neq L''$. Prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{2}|L' - L''| > 0$. Per definizione di convergenza, esistono $K', K'' \in \mathbb{N}$ tali che

$$n > K' \Longrightarrow |a_n - L'| < \varepsilon, \qquad n > K'' \Longrightarrow |a_n - L''| < \varepsilon$$

Poniamo $K = \max\{K', K''\}$. Per ogni $n \geq K$ abbiamo allora:

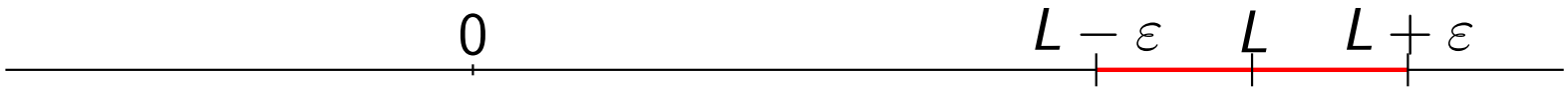
$$|L' - L''| = |L' - a_n + a_n - L''| \leq |L' - a_n| + |a_n - L''| < \varepsilon + \varepsilon = |L' - L''| \tag{6}$$

Assurdo. Concludiamo che $L' = L''$.

Q.E.D.

Teorema (Permanenza del segno, 1)

Siano (a_n) una successione in $\mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$. Se $a_n \to L$ e $L > 0$ $(L < 0)$, allora $a_n > 0$ $(a_n < 0)$ definitivamente.



DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $\varepsilon > 0$ in modo tale che $L - \varepsilon > 0$. Ad esempio, $\varepsilon = \frac{L}{3}$. Siccome $a_n \to L$, esiste un numero naturale N_0 tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ soddisfacente $n > N_0$, si ha:

$$0 < L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

Dunque, per ogni $n > N_0$, si ha $a_n > 0$.
Analogamente: se $a_n \to L$ e $L < 0$, allora $a_n < 0$ definitivamente.

Q.E.D.

Permanenza del segno, versione 2

Dal teorema di permanenza del segno, segue subito:

Teorema (Permanenza del segno, 2)

1) Se $(a_n) \to L$ *e* $a_n > 0$ *per ogni* n*, allora* $L \geq 0$*.*
2) Se $(a_n) \to L$ *e* $a_n < 0$ *per ogni* n*, allora* $L \leq 0$*.*

DIMOSTRAZIONE. 1) Infatti, se fosse $L < 0$ si avrebbe (per il teorema di permanenza del segno, versione 1) $a_n < 0$ definitivamente, contro l'ipotesi.
Analogamente si dimostra il punto 2).

Osservazione Si noti che $a_n > 0$, $a_n \to L$, non implica $L > 0$. (Esempio: $\frac{1}{n} \to L = 0$).