Politecnico di Milano
Corso di Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria
federico.lastaria@polimi.it

Introduzione ai numeri complessi

10 Settembre 2020

Indice

Ringraziamenti. L'autore di queste note è grato al prof. Luigi Quartapelle (Politecnico di Milano) per commenti e correzioni.

1 Il campo dei numeri complessi

Ex irrationalibus oriuntur quantitates impossibiles seu imaginariae, quarum mira est natura, et tamen non contemnenda utilitas. G. W. Leibniz (1646-1716).

[Dagli irrazionali nascono le quantità impossibili o immaginarie, delle quali è stupefacente la natura, ma la cui utilità, tuttavia, non è da disprezzare.]

L'*Ars Magna* di Gerolamo Cardano, pubblicata nel 1545, è forse il primo libro in cui i numeri complessi sono presi in considerazione. Il problema che Cardano si pone è il seguente: dividere un segmento di lunghezza 10 in due parti, in modo tale che il rettangolo che abbia queste due parti come lati abbia area 40. Si vede subito che l'area di un tale rettangolo deve essere al più 25, e quindi il problema non ha soluzioni. Ma curiosamente l'algebra ci fornisce, almeno formalmente, una soluzione perché l'equazione $x^2-10x+40=0$ (che traduce algebricamente il problema) fornisce le soluzioni

$$5+\sqrt{-15}, \quad 5-\sqrt{-15}$$

la cui somma è 10 e il cui prodotto è 40:

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40$$

Ma Cardano prende le distanze da questi numeri, ritenendoli "tanto sottili quanto inutili". I primi calcoli sistematici con i numeri complessi compaiono nell'opera *L'Algebra* (1572) di Rafael Bombelli, nella ricerca di formule risolutive per le equazioni di terzo grado. Ma anche Bombelli ritiene che i numeri complessi abbiano a che fare "con la sofisticheria più che con la verità". Ancora nel 1702, Leibniz considera un numero complesso come "ente anfibio fra l'Essere e il non Essere". Circa 200 anni dopo l'*Ars Magna* di Cardano, Leonhard Euler riprende in esame i numeri complessi e arriva alla famosa formula

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

studiando le equazioni differenziali del tipo $x'' + x = 0$. Una sistemazione teorica soddisfacente dei fondamenti dei numeri complessi arriverà solo con Gauss (1799) (interpretazione geometrica dei numeri complessi come punti, o vettori, del piano) e con Hamilton (1835) (definizione dei complessi come coppie ordinate di numeri reali).

È molto interessante la situazione che si presenta nello studio di un'equazione cubica a coefficienti reali: $x^3 = 3px + 2q$. (Ogni equazione cubica si riconduce a questa forma). Sfruttando lavori precedenti di Scipione del Ferro e Niccolò Tartaglia, Gerolamo Cardano mostra nella sua *Ars Magna* (1545) che questa equazione si può risolvere con la notevole formula:

$$x = \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}} \tag{1.1}$$

Ebbene, si verifica il fatto seguente: nel caso in cui l'equazione cubica abbia tre radici reali, la formula risolutiva presenta l'estrazione di radici quadrate di numeri negativi. In altri termini, *il risultato finale è reale, ma per ottenerlo, occorre passare attraverso il campo complesso.* Questo è il cosiddetto *casus irreducibilis* (caso irriducibile).

A questo riguardo, vediamo come Bombelli (*Algebra*, 1572) studia l'equazione $x^3 = 15x+4$. Applicando la formula risolutiva di Cardano, trova che le soluzioni sono date dalla formula ($p = 5, q = 2$):

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \tag{1.2}$$

Stabilisce poi un'uguaglianza, che con le notazioni attuali scriveremmo:

$$(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i = 2 \pm \sqrt{-121} \tag{1.3}$$

Bombelli ne deduce che $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}}$ può assumere i valori $2 \pm i$. Ora si constata direttamente che $x = 4$ è una radice dell'equazione $x^3 = 15x + 4$. Tale radice si ottiene formalmente, passando attravero i complessi, utilizzando la formula (1.2), dove al posto delle due radici cubiche si sostituisca rispettivamente $2 + \sqrt{-1}$ e $2 - \sqrt{-1}$:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4 \tag{1.4}$$

Dunque Bombelli osserva come, utilizzando questi strani numeri complessi, si arrivi comunque a trovare le giuste soluzioni reali.

Dal punto di vista storico, fu soprattutto questo il problema che spinse i matematici a prendere in seria considerazione i numeri complessi, anche se all'inizio in modo oscuro e con molto sospetto.

1.1 Richiami sulla nozione generale di campo

Dal momento che andiamo a definire un nuovo sisteme numerico, il campo dei numeri complessi, ricordiamo la definizione della struttura algebrico di campo. Gli esempi fondamentali già conosciuti sono il campo $\mathbb{Q}$ dei razionali e il campo $\mathbb{R}$ dei reali.

Definizione 1.1. *Un* campo $K(+\,,\,\cdot\,)$ *è un insieme K con due operazioni, la somma e il prodotto. Sono richieste le seguenti proprietà.*

- *K è un gruppo commutativo rispetto alla somma.*

  Questo significa che: 1) la somma è associativa ($(a+b)+c = a+(b+c)$); 2) la somma è commutativa ($a+b = b+a$); 3) esiste un elemento neutro 0 *(tale che $0+a = a$ per ogni a); 4) ogni elemento a ha un (unico)* opposto *additivo $-a$, che soddisfa $a + (-a) = 0$.*

- *$K \setminus 0$ (l'insieme degli elementi non nulli di K) è un gruppo commutativo rispetto al prodotto.*

  Esplicitamente: 1) il prodotto è associativo ($(ab)c = a(bc)$); 2) il prodotto è commutativo ($ab = ba$); 3) esiste un elemento neutro 1 *(tale che $1 \cdot a = a$ per ogni a); 4) ogni elemento $a \neq 0$ ha un (unico)* inverso *moltiplicativo (denotato a^{-1} o $\dfrac{1}{a}$), che soddisfa $a\,a^{-1} = 1$.*

- *Inoltre si richiede che il prodotto sia distributivo rispetto alla somma: $a(b+c) = ab+ac$.*

1.2 I numeri complessi

Ogni estensione di un sistema di numeri a un sistema numerico più grande è motivata dalla necessità di risolvere questioni che nel sistema più piccolo non hanno risposta. Ad esempio, la sottrazione non è sempre possibile nei numeri naturali $\mathbb{N}$ (ad esempio, l'equazione $x+1=0$ non ha soluzioni in $\mathbb{N}$). Allora si costruisce il sistema $\mathbb{Z}$ degli interi. La divisione (per interi non nulli) non è sempre possibile in $\mathbb{Z}$; quindi si costruisce il campo dei razionali $\mathbb{Q}$, dove la divisione è sempre possibile. Le successioni monotòne e limitate non convergono necessariamente a un limite in $\mathbb{Q}$, cioè in $\mathbb{Q}$ non vale la proprietà di completezza. Allora si passa dai razionali $\mathbb{Q}$ al campo ordinato completo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, che include tutti i limiti di successioni monotòne e limitate. Ma il campo dei numeri reali non è l'ambiente migliore per molti problemi matematici. La sua principale carenza consiste nel fatto che esistono equazioni algebriche a coefficienti reali - come $x^2+1=0$, oppure $x^2+x+1=0$ - che non hanno soluzioni nel campo reale. Cerchiamo allora di costruire un nuovo campo che sia un'*estensione* del campo dei reali (cioè che includa i numeri reali) e che si ottenga *aggiungendo a* $\mathbb{R}$ *una* unità immaginaria i *che sia soluzione dell'equazione* $x^2+1=0$. Dunque questo nuovo numero soddisfa l'uguaglianza $i^2+1=0$, ossia soddisfa

$$i^2 = -1 \tag{1.5}$$

Un campo che contiene tutti i numeri reali e l'unità immaginaria i deve anche contenere tutti i polinomi in i a coefficienti reali, cioè tutte le espressioni del tipo

$$a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + \cdots + a_m i^m \tag{1.6}$$

con m intero non negativo. Notiamo però che le potenze successive distinte i^n $(n \in \mathbb{N})$ sono solo quattro: $1, i, -1, -i$. Infatti,

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \ldots\ldots \tag{1.7}$$

Come si vede, le potenze i^n si ripetono ciclicamente, con periodo 4. Dunque le espressioni del tipo (1.6) si riducono a numeri del tipo

$$a + ib, \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

Se insistiamo sulla richiesta $i^2=-1$ e sulle proprietà di un campo, il prodotto di due numeri complessi è forzato ad essere

$$(a+ib)(a'+ib') = aa' + ia'b + iab' + i^2bb' = (aa'-bb') + i(ab'+a'b)$$

Veniamo allora a una prima definizione del campo complesso.

Definizione 1.2 (Campo complesso $\mathbb{C}$. Prima definizione.)**.** *Il campo complesso* $\mathbb{C}$ *è costituito da tutte le espressioni del tipo*

$$z = a + ib \tag{1.9}$$

dove a, b *sono numeri reali e l'unità immaginaria* i *è soluzione dell'equazione* $x^2+1=0$, *ossia soddisfa*

$$i^2 = -1$$

La somma di due numeri complessi è definita da

$$(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$$

e il loro prodotto è

$$(a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$$

In pratica, *i numeri complessi si sommano e si moltiplicano tra loro con le solite regole di conto (proprietà commutativa, associativa e distributiva) che si usano per i numeri reali; ogni volta che compare il termine i^2, al suo posto bisogna sostituire -1.*

Se $z = a + ib$, i due numeri reali a, b si chiamano rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* del numero complesso z e si denotano

$$a = \mathrm{Re}(z), \qquad b = \mathrm{Im}(z), \tag{1.10}$$

Si verifica facilmente che *sono soddisfatti tutti gli assiomi di campo.* In particolare, l'opposto (additivo) del numero complesso $z = a+ib$ è $-z = -a-ib$. L'unica proprietà non banale da verificare è che ogni numero complesso non nullo è invertibile. Ora lo dimostriamo. Premettiamo le nozioni di modulo e di coniugato.

Il *modulo* di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero reale non negativo

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \tag{1.11}$$

Il *complesso coniugato* di $z = a + ib$ è

$$\overline{z} = a - ib \tag{1.12}$$

Si verifica subito con un calcolo diretto che il coniugato del prodotto è il prodotto dei coniugati:

$$\overline{(zw)} = \overline{z}\,\overline{w} \tag{1.13}$$

Il prodotto di z per il suo complesso coniugato $\overline{z}$ è il quadrato del modulo:

$$z\,\overline{z} = a^2+b^2 = |z|^2 \tag{1.14}$$

Se z non è nullo, da quest'ultima uguaglianza segue, dividendo per $|z|^2$,

$$z\,\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \tag{1.15}$$

L'ultima uguaglianza dice che $\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ è un numero che moltiplicato per z dà come risultato 1; dunque è l'inverso di z:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

ossia

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

Esempio Troviamo l'inverso di i. Poiché $\overline{i} = -i$,

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = \frac{-i}{1} = -i$$

1.2.1 Il campo complesso definito come $\mathbb{R}^2$, con una opportuna struttura di campo

La definizione di $\mathbb{C}$ come l'estensione di $\mathbb{R}$ ottenuta mediante l'aggiunzione di un simbolo i soddisfacente l'equazione $i^2 = -1$ può lasciare insoddisfatti, in quanto può sembrare poco rigorosa.[1]

Un approccio alternativo e più formale consiste nell'identificare il campo dei numeri complessi come l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali, dotato di due opportune operazioni di somma e prodotto. L'idea di base è molto semplice: assegnare un numero complesso $z = a + ib$ significa né più né meno che assegnare la coppia ordinata di numeri reali (a, b). In particolare, il numero $1 = 1 + i0$ si identifica con la coppia $(1, 0)$ e il numero $i = 0 + i1$ con la coppia $(0, 1)$.

Definizione 1.3 (Campo complesso $\mathbb{C}$. Seconda definizione.). *(*William Rowan Hamilton, 1835*). Il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali, con la somma e il prodotto definiti nel modo seguente:*

$$(a, b) \, + \, (a', b') = (a + a', b + b') \tag{1.16}$$

$$(a, b) \, \cdot \, (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b) \tag{1.17}$$

Non presenta alcuna difficoltà (anche se è un po' noioso) dimostrare che valgono tutte le proprietà richieste nella definizione di campo. In particolare, l'unità moltiplicativa è $(1, 0)$, perché

$$(1, 0) \cdot (a, b) = (a, b)$$

e si vede con un conto diretto che, se $z = (a, b) \neq (0, 0)$, allora z è invertibile e il suo inverso moltiplicativo è

$$z^{-1} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2})$$

Infatti, usando la definizione di prodotto, si constata facilmente che

$$(a, b) \cdot (\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}) = (1, 0)$$

Poiché $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ e $(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0)$, l'applicazione

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad x \longmapsto (x, 0) \tag{1.18}$$

è un'immersione del campo $\mathbb{R}$ nel campo $\mathbb{C}$: il numero reale x è *identificato con* il numero complesso $(x, 0)$. In questo senso possiamo dire che il campo $\mathbb{C}$ è un'estensione del campo $\mathbb{R}$ (o che $\mathbb{R}$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$) e possiamo scrivere semplicemente x al posto di $(x, 0)$.

Un qualunque numero complesso $z = (x, y)$ si può scrivere

$$z = (x, 0) + (0, y)$$

Inoltre si vede subito, usando la definizione di prodotto, che

$$(0, 1)(y, 0) = (0, y)$$

[1] In realtà tale costruzione è pienamente rigorosa e può essere giustificata nell'ambito della teoria delle estensioni dei campi, che non tratteremo.

Perciò

$$z = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$$

Conveniamo di usare il simbolo i per denotare la coppia ordinata $(0, 1)$:

$$i = (0, 1)$$

La scelta del simbolo i per denotare $(0, 1)$ è motivata dal fatto che

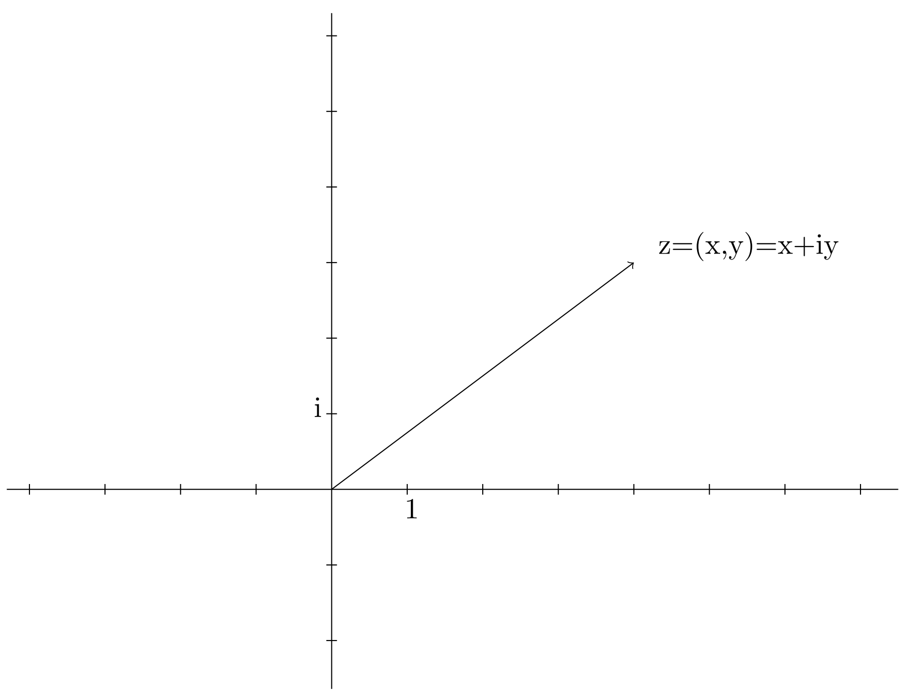
$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Allora possiamo scrivere

$$z = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$$

1.2.2 Rappresentazione geometrica dei numeri complessi sul piano di Argand–Gauss

La definizione di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}^2$ (dotato di un'opportuna struttura di campo) permette di dare un'utilissima interpretazione geometrica. Un numero complesso $z = x+iy$ si può vedere come un *punto* (x, y) del piano $\mathbb{R}^2$, oppure come un *vettore* (freccia orientata) spiccato dall'origine.



1.3 Impossibilità di ordinare il campo $\mathbb{C}$

Abbiamo già visto che i numeri reali $\mathbb{R}$ costituiscono un campo *ordinato* (che, inoltre, è anche completo). Affermare che $\mathbb{R}$ è un campo *ordinato* significa che è definita in $\mathbb{R}$ la proprietà di "*essere positivo*". Questa proprietà non è puramente insiemistica, ma è *compatibile con le operazioni di somma e prodotto*, nel senso che valgono le due condizioni seguenti:

1. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale una e una sola di queste relazioni: $x > 0$, $x = 0$ oppure $-x > 0$.
2. Se $x > 0$ e $y > 0$, allora $x + y > 0$ e $xy > 0$.

Al contrario, il campo $\mathbb{C}$ non può essere ordinato:

Teorema 1.4 ($\mathbb{C}$ non è un campo ordinato)**.** *Nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi non è possibile definire alcun ordinamento che sia compatibile con la somma e il prodotto.*

In breve:

Il campo $\mathbb{C}$ non è un campo ordinato.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che non è possibile definire in $\mathbb{C}$ una relazione "$z > 0$" in modo tale che valgano le due proprietà 1 e 2 scritte sopra.

Premettiamo un'osservazione: in un campo ordinato, *il quadrato di un qualunque elemento non nullo deve essere sempre positivo.* Infatti: se $z > 0$, moltiplicando per z segue $z^2 > 0$. Se invece $z < 0$, si ha $-z > 0$; moltiplicando primo e secondo membro di quest'ultima disuguaglianza per $-z$, si ha ancora $z^2 = (-z)(-z) > 0$. Quindi, in ogni caso, $z^2 > 0$ (se $z \neq 0$).

Supponiamo ora, per assurdo, che esista nel campo $\mathbb{C}$ un ordinamento che sia compatibile con le operazioni di somma e prodotto. Per quanto abbiamo appena visto, per ogni $z \neq 0$ si ha $z^2 > 0$. In particolare, si deve avere $1^2 > 0$ e $i^2 > 0$ e, di conseguenza, $1^2 + i^2 > 0$. Assurdo, perché $1^2 + i^2 = 1 + (-1) = 0$. (Un altro modo di arrivare all'assurdo è questo: da $1 = 1^2 > 0$ segue $-1 < 0$, che è assurdo, perché incompatibile con $-1 = i^2 > 0$). Q.E.D.

Osservazione. Si ricordi che le disuguaglianze "$z > w$" tra numeri complessi *non hanno alcun senso.*

1.4 Il modulo di un numero complesso. Proprietà $|zw| = |z||w|$.

Si ricordi che, per definizione, il modulo $|z|$ di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero reale

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.19}$$

Si ricordi anche che, denotato con

$$\overline{z} = a - ib \tag{1.20}$$

il complesso coniugato di z, si ha

$$|z|^2 = z\overline{z},$$

La seguente proprietà è fondamentale.

Teorema 1.5. *Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$, il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli:*

$$|zw| = |z||w| \tag{1.21}$$

Dimostrazione. L'uguaglianza 1.21 (che vogliamo dimostrare) implica, elevando a quadrato entrambi i membri, l'uguaglianza

$$|zw|^2 = |z|^2|w|^2 \tag{1.22}$$

Poiché i numeri $|zw|, |z|, |w|$ sono *positivi o nulli*, a sua volta l'uguaglianza (1.22) implica la (1.21). Dunque, le due uguaglianza (1.21) e (1.22) sono *equivalenti*. Dimostriamo dunque la (1.22). Ricordiamo che, per ogni numero complesso z, si ha $|z|^2 = z\,\overline{z}$. Inoltre, ricordiamo che il coniugato del prodotto è il prodotto dei coniugati:

$$\overline{(zw)} = \overline{z}\;\overline{w}$$

Allora (utilizzando anche la proprietà commutativa del prodotto) si ha:

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (zw)\,\overline{(zw)} \\ &= zw\,\overline{z}\,\overline{w} \\ &= z\overline{z}\,w\,\overline{w} \\ &= |z|^2\,|w|^2 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Esercizio *Dimostrare l'uguaglianza (1.21) (il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli) con un calcolo diretto.*

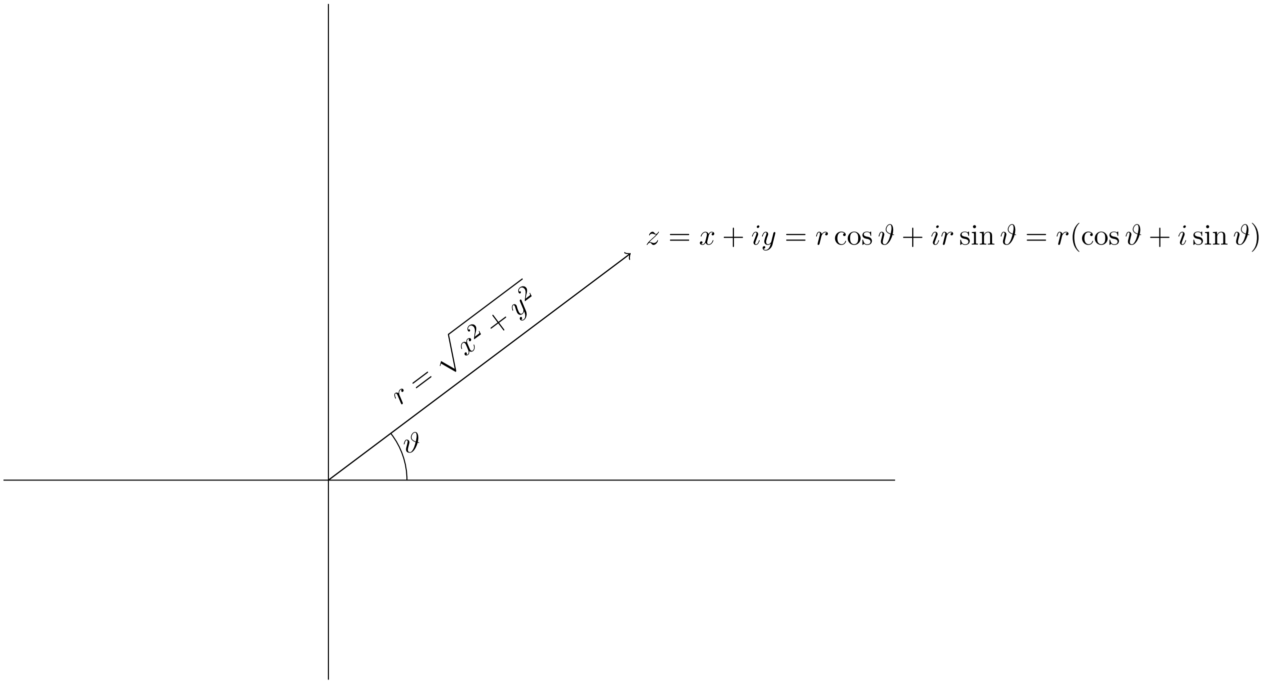
Soluzione Poniamo

$$z = x + iy, \qquad z' = x' + iy'$$

Allora:

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= |(xx' - yy', xy' + yx')| \\ &= (xx' - yy')^2 + (xy' + yx')^2 \\ &= x^2x'^2 + y^2y'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 \\ &= (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) \\ &= |z|^2|z'|^2 \end{aligned}$$

1.5 Forma trigonometrica, o polare, di un numero complesso



Ogni numero complesso $z = x + iy$, con la sola eccezione del numero 0, si scrive anche in *coordinate polari* r, ϑ, come

$$z = r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \tag{1.23}$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ è il modulo di z e ϑ – detto *argomento* o *fase* di z – è l'angolo che il vettore z forma con la direzione positiva dell'asse reale. Per giustificare la scrittura (1.23), basta notare che si ha (in valore assoluto e in segno) $x = r\cos\vartheta$ e $y = r\sin\vartheta$. In verità, l'argomento non è definito in modo unico; infatti, se la (1.23) vale per un certo ϑ, essa varrà anche per un qualunque altro angolo $\vartheta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. L'argomento è definito, dunque, solo a meno di multipli interi di 2π. Se si vuole evitare questa ambiguità nella definizione dell'argomento, si può chiamare *argomento principale*, e denotare $\texttt{arg}\, z$, l'unico ϑ che soddisfa

$$-\pi < \vartheta \leq \pi \tag{1.24}$$

oppure l'unico ϑ che soddisfa

$$0 \leq \vartheta < 2\pi \tag{1.25}$$

(o altre simili restrizioni), a seconda delle convenzioni.

Per determinare l'argomento (o un argomento) del numero complesso $z = x + iy$ basta disegnare, sulla circonferenza unitaria, il punto $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, dove

$$\cos\vartheta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\vartheta = \frac{y}{r} \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \tag{1.26}$$

e di qui risalire (quando ci si riesce) al ϑ cercato. Se vogliamo trovare, in modo più sistematico, l'argomento principale $\vartheta = \texttt{arg}\, z$ soddisfacente la condizione $-\pi < \vartheta \leq \pi$ (ad esempio), si potrà talvolta ricorrere alla funzione arcotangente. Ricordando che la funzione arctan ha come codominio $(-\pi/2, \pi/2)$, si avrà:

$$\vartheta = \texttt{arg}\, z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctan \dfrac{y}{x} & \text{se } x < 0,\ y \geq 0 \\ -\pi + \arctan \dfrac{y}{x} & \text{se } x < 0,\ y < 0 \\ \pi/2 & \text{se } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Ma non occorre imparare queste formule a memoria. Basta arrivare al risultato avendo chiare le restrizioni sugli angoli da considerare.

1.6 Significato geometrico della moltiplicazione per un numero complesso

Il piano complesso è uno *spazio metrico*: la *distanza* $\mathrm{d}(z, z')$ tra due punti z, z' in $\mathbb{C}$ è definita come il modulo della loro differenza,

$$\mathrm{d}(z, z') = |z - z'| \tag{1.27}$$

Per *isometria* del piano complesso si intende una trasformazione

$$\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C} \tag{1.28}$$

che *preserva le distanze*:

$$|F(z) - F(z')| = |z - z'| \tag{1.29}$$

per ogni z, z' in $\mathbb{C}$.

Ad esempio, fissato w in $\mathbb{C}$, le traslazioni $T_w(z) = z + w$ sono isometrie (senza alcun punto fisso, se $w \neq 0$). Anche la coniugazione $z \longmapsto \overline{z}$ è una isometria di $\mathbb{C}$ (il cui insieme di punti fissi è l'asse reale $\mathbb{R}$).

Diamo ora una definizione precisa di rotazione.

Definizione 1.6. *Una* rotazione *del piano è un'isometria del piano che ha un unico punto fisso, detto il* centro di rotazione*, oppure è l'identità.*

Teorema 1.7. *Se u è un numero complesso unitario, allora la moltiplicazione per u*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{M_u} \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto u \cdot z \tag{1.30}$$

è una rotazione (di centro l'origine, se $u \neq 1$).

Se

$$u = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

diremo che la moltiplicazione per u è la rotazione di *centro* l'origine e *ampiezza* (o *angolo*) α.

Dimostrazione. Se $u = 1$, l'applicazione $z \longmapsto u \cdot z$ è l'identità (che è una rotazione). Supponiamo dunque u unitario e $u \neq 1$. Dimostriamo che la moltiplicazione per u è una isometria che ha come unico punto fisso l'origine.

1) Per ogni z in $\mathbb{C}$, ricordando che il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli, si ha:

$$|uz - uz'| = |u(z - z')| = |u||z - z'| = 1 \cdot |z - z'| = |z - z'| \tag{1.31}$$

Dunque la trasformazione $z \longmapsto u \cdot z$ del piano complesso in sé è una isometria (vale a dire, preserva le distanze).

2) Dimostriamo che l'unico punto fisso è l'origine. Che l'origine sia un punto fisso, è ovvio:

$$u \cdot 0 = 0$$

Dimostriamo che è l'*unico* punto fisso. Supponiamo allora che w sia un punto fisso: $u \cdot w = w$. Allora si ha $(u-1)w = 0$ e quindi, dividendo per $u-1$ (il che è lecito, perché abbiamo assunto $u \neq 1$), ricaviamo $w = 0$. Abbiamo allora dimostrato che l'unico punto fisso è l'origine. Questo conclude la dimostrazione. Q.E.D.

Ovviamente la moltiplicazione per un numero complesso di modulo arbitrario (non nullo)

$$w = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

cioè la trasformazione che manda z in wz, si può vedere come la composizione di due trasformazioni: la rotazione che manda z in $(\cos\alpha + i \sin\alpha) \cdot z$, seguita dalla dilatazione per il fattore (reale positivo) r. Dunque abbiamo dimostrato il seguente teorema:

Teorema 1.8. *Se $w = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ è un qualunque numero complesso diverso da zero, la moltiplicazione per w*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{M_w} \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto w \cdot z = r \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha) \cdot z \tag{1.32}$$

è una roto-omotetia*. Precisamente, è la rotazione di angolo α, seguita dalla dilatazione del fattore (reale) positivo r.*

Q.E.D.

Naturalmente, la "dilatazione" di un fattore r ingrandisce i moduli se $r > 1$, mentre li rimpicciolisce se $0 < r < 1$.

Con l'uso dei numeri complessi, studiamo le isometrie del piano complesso che si ottengono com composizione di una rotazione e di una traslazione. Abbiamo il seguente:

Teorema 1.9 (Composizione di una rotazione e una traslazione)**.** *Siano:*

- *$u = \cos\alpha + i \sin\alpha$ un numero complesso diverso da 1, e $R_{O,\alpha}$ la rotazione (diversa dall'identità* Id*) con centro nell'origine e ampiezza α:*

$$R_{O,\alpha} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad z \longmapsto uz \tag{1.33}$$

- *w un numero complesso e T_w la traslazione definita da w:*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{T_w} \mathbb{C} \qquad z \longmapsto z + w \tag{1.34}$$

Allora la trasformazione composta $T_w \circ R_{O,\alpha}$ (rotazione, seguita dalla traslazione)

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad z \longmapsto uz + w \tag{1.35}$$

è una rotazione.

Dimostrazione. Per definizione, una rotazione del piano è una isometria che ha un punto fisso, e uno solo. Dobbiamo dunque dimostrare che la composizione $T_w \circ R_{O,\alpha}$, $z \longmapsto uz + w$, è una isometria e ha un unico punto fisso. Ora, che sia una isometria è ovvio, perché la composizione di due isometrie è una isometria [Esercizio]. L'insieme dei punti fissi è

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \ uz + w = z\}$$

ossia è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $uz + w = z$, o $(1 - u)z = w$. Questa è un'equazione di primo grado nell'incognita z, con il coefficiente $1 - u \neq 0$ (per ipotesi). Dunque ha una e una sola soluzione: $z = \dfrac{w}{1-u}$. Pertanto $T_w \circ R_{O,\alpha}$ è una rotazione di centro $C = \dfrac{w}{1-u}$. Q.E.D.

Osservazione 1. La rotazione $T_w \circ R_{O,\alpha}$, $z \longmapsto uz + w$, ha un nuovo centro di rotazione, $C = \dfrac{w}{1-u}$, ma ha la stessa ampiezza α della rotazione, con centro nell'origine, $z \longmapsto uz$. (Fare un disegno).

Osservazione 2. La composizione $T_w \circ R_{O,\alpha}$ di una rotazione e di una traslazione si chiama talvolta 'roto-traslazione'. Ma in dimensione due (cioè, nella geometria del piano) questo termine è un po' fuorviante. Infatti, il teorema 1.9 dice che, nella geometria del piano, la composizione di una isometria con un unico punto fisso (rotazione) e di una traslazione ha ancora un unico punto fisso (è ancora una rotazione) [2]

1.7 Prodotto di numeri complessi in forma polare

Teorema 1.10. *Il prodotto di due numeri complessi*

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad z' = r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta') \tag{1.36}$$

è il numero complesso:

$$z \cdot z' = rr'[\cos(\vartheta + \vartheta') + i\sin(\vartheta + \vartheta')] \tag{1.37}$$

[2] In dimensione tre, invece, la situazione è diversa: le rotazioni di centro O non lasciano fisso soltanto un punto, il centro di rotazione, ma tutti i punti di una retta passante per il centro (l'asse di rotazione; teorema di Eulero).

In breve, quando si moltiplicano tra loro due numeri complessi, i moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano. La dimostrazione è un calcolo che fa uso della formula di addizione di coseno e seno:

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= [r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)] \cdot [r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')] \\ &= rr'[(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta') + i(\sin\vartheta\cos\vartheta' + \cos\vartheta\sin\vartheta')] \\ &= rr'[\cos(\vartheta+\vartheta') + i\sin(\vartheta+\vartheta')] \end{aligned}$$

Q.E.D.

Dalla formula di moltiplicazione segue che l'inverso del numero $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ è

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} = r^{-1}(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)) \tag{1.38}$$

Infatti si verifica subito, con la formula 1.37, che il prodotto

$$[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)] \cdot [\cdot r^{-1}(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta))]$$

vale 1. Dalle formule 1.37 e 1.38 segue che *il quoziente di due numeri complessi ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti*: se $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e $z' = r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')$, allora

$$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}(\cos(\vartheta' - \vartheta) + i\sin(\vartheta' - \vartheta)) \tag{1.39}$$

Un'immediata conseguenza della formula del prodotto di numeri complessi è la formula di De Moivre:

Teorema 1.11 (Formula di De Moivre, 1730)**.**

$$[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)]^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) \tag{1.40}$$

Dimostrazione. Segue subito dalla formula del prodotto (1.37), ponendo $z = z'$ e iterando. Q.E.D.

1.8 Radici n-esime di un numero complesso

Dalla formula di De Moivre segue subito il seguente teorema.

Teorema 1.12 (Radici n-esime di un numero complesso)**.** *Sia $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ un numero complesso non nullo e sia n un intero positivo. Esistono esattamente n numeri complessi che elevati alla potenza n-esima danno come risultato z. Tali numeri sono:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right], \qquad k = 0, 1, ..., n-1 \tag{1.41}$$

Ciascuno di tali numeri $z_0, ..., z_{n-1}$ si chiama una *radice n-esima* di z. Quindi il teorema dice che ogni numero complesso (non nullo) ha esattamente n radici n-esime.

Dimostrazione. Un numero complesso

$$w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \tag{1.42}$$

è una radice n-esima di z se $w^n = z$, ossia (per la formula di De Moivre) se

$$|w|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \tag{1.43}$$

Ora due numeri complessi, scritti in forma polare, sono uguali se e solo se hanno i moduli uguali, e gli argomenti *uguali a meno di multipli interi di* 2π:

$$|w|^n = r, \qquad\qquad n\alpha = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ma si vede facilmente che si ottengono n radici distinte soltanto per gli n valori $k = 0, 1, ..., (n-1)$, mentre dando a k un qualunque altro valore, si riottiene una delle radici $z_0, ..., z_{n-1}$. Quindi tutte le n radici n-esime distinte hanno modulo e argomento rispettivamente dati da

$$\sqrt[n]{r}, \qquad\qquad \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \qquad\qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

Q.E.D.

Si noti che le radici n-esime si trovano tutte sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{r}$ e sono equidistanziate tra loro, cioè sono i vertici di un poligono regolare di n lati.

1.9 Forma esponenziale di un numero complesso (Euler, 1743).

Per ogni numero reale ϑ, definiamo l'*esponenziale* $e^{i\vartheta}$ come:

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta \tag{1.44}$$

Una motivazione per tale definizione è la seguente. Sviluppiamo *formalmente* $e^{i\vartheta}$, ricordando lo sviluppo di e^x, per x reale:

$$e^{i\vartheta} = 1 + (i\vartheta) + \frac{(i\vartheta)^2}{2!} + \frac{(i\vartheta)^3}{3!} + \frac{(i\vartheta)^4}{4!} + \cdots + \frac{(i\vartheta)^n}{n!} + \cdots\cdots \tag{1.45}$$

Notiamo che le prime quattro potenze di i sono

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i \tag{1.46}$$

Tali potenze si ripetono ciclicamente: $i^4 = i^0 = 1$, $i^5 = i^1 = i$, $i^6 = i^2 = -1$, $i^7 = i^3 = -i$ eccetera. Quindi possiamo riscrivere (1.45) come

$$\begin{aligned} e^{i\vartheta} &= 1 + i\vartheta - \frac{\vartheta^2}{2!} - i\frac{(\vartheta)^3}{3!} + \frac{(\vartheta)^4}{4!} + \cdots + \frac{(i\vartheta)^n}{n!} + \cdots\cdots \\ &= \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} + \cdots\right) \\ &= \cos\vartheta + i\sin\vartheta \end{aligned} \tag{1.47}$$

Si noti che dalla definizione (1.44) segue la celebre formula di Eulero

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{1.48}$$

Il numero complesso $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ si scrive, in *forma esponenziale*, come:

$$z = re^{i\vartheta} \tag{1.49}$$

La formula del prodotto

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta') = \cos(\vartheta + \vartheta') + i\sin(\vartheta + \vartheta') \tag{1.50}$$

si scrive in forma esponenziale in modo elegante e pratico:

$$e^{i\vartheta}e^{i\vartheta'} = e^{i(\vartheta+\vartheta')} \tag{1.51}$$

La forma esponenziale si presta bene per scrivere le potenze dei numeri complessi, perché si ha, per ogni $k \in \mathbb{Z}$,

$$(re^{i\vartheta})^k = r^k\, e^{ik\vartheta} \tag{1.52}$$

Ad esempio, l'inverso del numero $e^{i\vartheta}$ è dato da:

$$(e^{i\vartheta})^{-1} = e^{-i\vartheta} \tag{1.53}$$

La definizione di esponenziale complesso si estende poi al caso di un qualunque esponente complesso $w = x + iy$ nel modo seguente:

$$e^w = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{1.54}$$

Si dimostra, con un semplice calcolo, che anche per gli esponenti complessi vale la proprietà fondamentale dell'esponenziale (vale a dire, trasformare somme in prodotti):

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \qquad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \tag{1.55}$$

1.10 Le radici n-esime dell'unità

Usando la formula generale (1.41), vediamo subito che le radici n-esime del numero $z = 1$ (il cui modulo è 1 e il cui argomento è $\vartheta = 0$) sono, in forma esponenziale:

$$\epsilon_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, ..., n-1 \tag{1.56}$$

Le n radici n-esime dell'unità sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nelle circonferenza unitaria. Uno di tali vertici è sempre $\epsilon_0 = 1$. Ovviamente, la lunghezza dell'arco tra uno di tali punti e il successivo è $2\pi/n$.

Ad esempio, le radici terze di 1 sono:

$$\epsilon_0 = 1, \qquad \epsilon_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \qquad \epsilon_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \tag{1.57}$$

e le radici quarte di 1 sono:

$$\epsilon_0 = 1, \qquad \epsilon_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \qquad \epsilon_2 = e^{i\pi} = -1, \qquad \epsilon_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \tag{1.58}$$

Si noti anche che la radice $\epsilon_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ genera il gruppo delle radici n-esime dell'unità, nel senso che le sue successive potenze danno tutte le n radici di 1. Infatti:

$$(\epsilon_1)^0 = \epsilon_0 (= 1), \qquad (\epsilon_1)^1 = \epsilon_1, \qquad (\epsilon_1)^2 = \epsilon_2, \qquad .... \qquad (\epsilon_1)^{n-1} = \epsilon_{n-1} \tag{1.59}$$

1.11 Il teorema fondamentale dell'algebra

Abbiamo definito il campo complesso $\mathbb{C}$ come l'estensione di $\mathbb{R}$ ottenuta aggiungendo a $\mathbb{R}$ una radice dell'equazione polinomiale $x^2 + 1 = 0$. È un fatto notevole che *questa sola aggiunzione* è sufficiente per fornire soluzioni a *tutte* le equazioni polinomiali.

Infatti, il teorema fondamentale dell'algebra, del quale C.F. Gauss dette quattro diverse dimostrazioni tra il 1799 e il 1849, afferma che ogni equazione polinomiale a coefficienti complessi ha almeno una radice complessa.

Teorema 1.13 (Teorema fondamentale dell'algebra. C.F. Gauss, 1799.)**.** *Ogni polinomio complesso di grado maggiore o uguale a 1 ha almeno una radice nel campo* $\mathbb{C}$*.*

In algebra, un campo K si dice *algebricamente chiuso* se ogni polinomio a coefficienti in K ha almeno uno zero in K. Quindi il teorema fondamentale dell'algebra si può enunciare nella forma:

Il campo $\mathbb{C}$ *dei numeri complessi è algebricamente chiuso.*

Se $f(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \cdots + a_n Z^n$ è un polinomio a coefficienti complessi e c è una sua radice complessa (che esiste sicuramente per il teorema fondamentale dell'algebra) si può dividere $f(Z)$ per $(Z - c)$ e scrivere

$$f(Z) = (Z - c)g(Z)$$

Iterando il procedimento, si dimostra il seguente teorema.

Teorema 1.14 (Fattorizzazione di un polinomio complesso)**.** *Ogni polinomio complesso f di grado maggiore o uguale a 1 si fattorizza in modo unico (a meno dell'ordine dei fattori) come*

$$f(Z) = a(Z - c_1)(Z - c_2) \cdot \cdots \cdot (Z - c_n) \tag{1.60}$$

dove $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, e $c_1, ..., c_n$ sono le radici complesse (non necessariamente distinte) di f. Se una radice c_j è ripetuta k volte, diciamo che è una radice di molteplicità *k.*

Possiamo dunque enunciare quest'ultimo teorema nella forma:

Ogni polinomio complesso di grado $n \geq 1$ ha esattamente n radici complesse, se ognuna delle radici è contata con la sua molteplicità.

1.12 Oltre i complessi?

(Gli argomenti trattati in questo paragrafo non sono in programma).

1.12.1 Quaternioni

I numeri reali $\mathbb{R}$ costituiscono un campo. Anche i complessi $\mathbb{C}$ costituiscono un campo, estensione di $\mathbb{R}$ (nel senso che $\mathbb{R}$ è incluso in $\mathbb{C}$). Il campo $\mathbb{R}$ dei reali fornisce un modello per la geometria in dimensione uno (retta reale), mentre il campo complesso $\mathbb{C}$ ne fornisce una per la geometria in dimensione due (piano complesso). A questo punto nasce in modo ovvio una domanda: ci sono altri campi di "numeri" che diano modelli per spazi geometrici in dimensione tre, quattro, o più elevata? In altri termini, se al posto di numeri reali ($\mathbb{R}$) o di coppie di numeri reali ($\mathbb{C}$), si prendono terne, quaterne, ..., n-ple di numeri reali, si possono costruire dei *campi* numerici che siano forme algebriche di spazi tri-dimensionali, quadri-dimensionali,.., n-dimensionali? Il matematico tedesco Frobenius dimostra nel 1877 che la risposta è negativa, almeno se si insiste sulla struttura di campo. Però in dimensione quattro c'è una struttura algebrica molto interessante, i quaternioni $\mathbb{H}$, scoperti dall'astronomo (fisico e matematico) irlandese Sir William Rowan Hamilton nel 1843. I quaternioni si costruiscono, in modo simile ai complessi, come quaterne ordinate (t, x, y, z) che si scrivono

$$q = t + xi + yj + zk \tag{1.61}$$

dove t, x, y, z sono coefficienti reali. La tavola di moltiplicazione delle tre "unità immaginarie" i, j, k è data da

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{1.62}$$

Queste uguaglianze[3], insieme alla legge associativa, implicano $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ e $ki = -ik = j$. Usando la distributività, possiamo fare il prodotto di due quaternioni qualunque. La somma si fa per componenti. La divisione (per un quaternione non nullo) è sempre possibile, perché l'inverso di q, dato da 1.61, è il quaternione

$$q^{-1} = \frac{t - xi - yj - zk}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.63}$$

Il prodotto tra quaternioni non è commutativo; quindi i quaternioni non costituiscono un campo. La loro struttura è un esempio di *algebra associativa con divisione*. Il modulo di un quaternione $q = t + xi + yj + zk$ è

$$|q|^2 = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.64}$$

[3] Queste uguaglianze sono scolpite su una lapide sul Broom Bridge di Dublino, dove a Hamilton vennero in mente, secondo quanto lui stesso racconta (*North British Rev.*, 14, 1858): "*... They [*the quaternions*] started into life, or light, full grown, on the 16th of October, 1843, as I was walking with Lady Hamilton to Dublin, and came up to Brougham Bridge. That is to say, I then and there felt the galvanic circuit of thought closed, and the sparks which fell from it were the fundamental equations between i, j, k exactly such as I have used them eversince. I pulled out, on the spot, a pocketbook, which still exists, and made an entry on which, at the very moment, I felt that it might be worth my while to expend the labour of at least ten (or it might be fifteen) years to come. But then it is fair to say that this was because I felt a problem to have been at that moment solved, an intellectual want relieved, which had haunted me for at least fifteen years before...*" In realtà, le intuizioni di base sull'uso dei quaternioni nella dinamica del corpo rigido risalgono al grande Eulero, anche se Hamilton non ne era a conoscenza. In particolare Eulero (teorema dei quattro quadrati, lettera a Goldbach, 1748) aveva già sostanzialmente scoperto il modo giusto di moltiplicare i "quaternioni".

e vale la proprietà fondamentale

$$|qq'| = |q||q'| \tag{1.65}$$

I quaternioni sono utilizzati in fisica, geometria, topologia algebrica eccetera. In particolare, i quaternioni di modulo unitario (la sfera unitaria S^3 di $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$) sono utilizzati per *rappresentare le rotazioni nello spazio (tridimensionale)*. Questa fu una delle motivazioni principali per le ricerche di Hamilton.

Diamo un'idea di come i quaternioni unitari si possano utilizzare per studiare le rotazioni nell'ordinario spazio tridimensionale. Anzitutto, ogni quaternione unitario (cioè ogni quaternione sulla sfera unitaria $S^3 \subset \mathbb{H}$) si può scrivere come

$$q = \cos\vartheta + (bi + cj + dk)\sin\vartheta, \quad \text{con} \quad b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

(Verificare che la somma dei quadrati delle componenti dà proprio 1). Tale quaternione *rappresenta la rotazione di* 2ϑ *attorno alla retta del vettore* (b, c, d):

$$\boxed{\cos\vartheta + (bi + cj + dk)\sin\vartheta} \longmapsto \boxed{\text{rotazione di } 2\theta \text{ attorno alla retta di } (b, c, d)}$$

Il fatto importante è che il *prodotto di quaternioni* rappresenta la *composizione di rotazioni*, nel senso illustrato dall'esempio seguente. Consideriamo i due quaternioni

$$q_1 = 1 + i, \qquad q_2 = 1 + k.$$

Le rotazioni corrispondenti sono:

$$\rho_{q_1} = \text{rotazione di } \pi/2 \text{ attorno alla retta di } (1, 0, 0)$$

$$\rho_{q_2} = \text{rotazione di } \pi/2 \text{ attorno alla retta di } (0, 0, 1)$$

Per determinare la rotazione composta $\rho_{q_2} \circ \rho_{q_1}$ (prima ρ_{q_1} poi ρ_{q_1}), basta fare il prodotto dei quaternioni: $q_2 q_1 = (1 + k)(1 + i) = 1 + i + j + k$. La composizione delle due rotazioni è quindi:

$$\rho_{q_2}\rho_{q_1} = \rho_{1+i+j+k} = \text{rotazione di } 2\pi/3 \text{ attorno alla retta di } (1, 1, 1).$$

Vediamo allora che il fatto che il prodotto di quaternioni non sia commutativo non va visto come un difetto. Al contrario, la non commutatività del prodotto di quaternioni rende possibile l'impiego degli stessi nelle rappresentazioni del gruppo delle rotazioni dello spazio che fissano l'origine, gruppo che *non* è commutativo. (Ad esempio, le rotazioni $\rho_1 \circ \rho_2$ e $\rho_2 \circ \rho_1$ sono diverse, come si vede facilmente).

Diamo con qualche dettaglio in più sul teorema di Frobenius, citato precedentemente. Il teorema di Frobenius (1877) dice che le algebre associative con divisione (diciamo, grosso modo, i "sistemi numerici" con due operazioni di somma e prodotto, con il prodotto associativo e con tutti gli elementi diversi da zero invertibili, in modo da poter fare la divisione) sono soltanto di tre tipi: il campo dei reali $\mathbb{R}$, il campo dei complessi $\mathbb{C}$ (in queste due strutture il prodotto è commutativo), e l'algebra associativa $\mathbb{H}$ dei quaternioni di Hamilton (in cui il prodotto non è commutativo).

In realtà in dimensione 8 c'è un'altra struttura interessante: gli *ottetti* o *ottave* (inglese: octonions) $\mathbb{O}$ di Cayley. Ma il prodotto in $\mathbb{O}$ non solo non è commutativo, ma non è neanche associativo.

1.12.2 Cenno all'algebra geometrica di Clifford

Terminiamo citando un altro interessantissimo campo di ricerche: quello sull'*algebra geometrica* di William K. Clifford (1845–1879), un matematico e filosofo inglese che sviluppa le idee di W. Hamilton e del matematico tedesco Hermann Grassmann (1809–1877). Per una introduzione all'algebra geometrica di Clifford (che include, in una diversa prospettiva, anche i quaternioni) e alle sue applicazioni alla fisica, all'ingegneria e alla computer science, si vedano, ad esempio,

http://geometry.mrao.cam.ac.uk/

http://geocalc.clas.asu.edu/

https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_algebra#Rotations

2 Approfondimento. Le isometrie di $\mathbb{C}$.

Ricordiamo la definizione di isometria.

Definizione 2.1. *Si dice che una funzione* $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ *è una* isometria*, o che* preserva le distanze*, se*

$$|f(w) - f(z)| = |w - z| \quad \textit{per ogni} \quad w, z \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

2.1 Classificazione delle isometrie di $\mathbb{C}$

In primo luogo, consideriamo le isometrie che fissano l'origine, cioè che soddisfano $f(0) = 0$. Si noti che le isometrie f per le quali $f(0) = 0$ preservano anche il modulo (che è la distanza dall'origine), cioè soddisfano:

$$|f(z)| = |z| \tag{2.2}$$

Infatti,

$$|f(z)| = |f(z) - 0| = |f(z) - f(0)| = |z - 0| = |z| \tag{2.3}$$

In altri termini, z e $f(z)$ sono equidistanti dall'origine.

Ricordiamo S^1 denota la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, vale a dire l'insieme dei numeri complessi unitari:

$$S^1 = \{u \in \mathbb{C} \mid \ |u| = 1\} \tag{2.4}$$

Teorema 2.2 (Classificazione delle isometrie del piano complesso che fissano l'origine)**.** *Le isometrie* $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ *del piano complesso che fissano l'origine (*$f(0) = 0$*) sono dei due tipi seguenti:*

(1) $f(z) = cz$, *con* $c = e^{i\vartheta} \in S^1$. *(Rotazione di centro l'origine e angolo* ϑ*).*

(2) $f(z) = c\overline{z}$, *con* $c \in S^1$. *(Simmetria rispetto a una retta passante per l'origine).*

Dimostrazione. (Teorema 2.2. Isometrie di $\mathbb{C}$ che fissano l'origine.) Anzitutto, è semplice dimostrare che le funzioni del tipo (1) e (2) sono isometrie (che ovviamente fissano l'origine). Ad esempio, sia f del tipo $f(z) = cz$, con $c \in S^1$. Allora,

$$|f(z) - f(w)| = |cz - cw| = |c(z - w)| = |c|\,|z - w| = 1\,|z - w| = |z - w| \tag{2.5}$$

Quindi f è una isometria. In modo del tutto analogo, se $f(z) = c\overline{z}$, abbiamo:

$$|f(z) - f(w)| = |c\overline{z} - c\overline{w}| = |c(z - w)| = |c|\,|\overline{z - w}| = |z - w| \tag{2.6}$$

Dimostriamo ora che una isometria di $\mathbb{C}$ che fissa l'origine, deve essere del tipo (1) o del tipo (2).

Sia dunque f una isometria di $\mathbb{C}$ che fissa l'origine. Poniamo $f(1) = c$. Da $f(0) = 0$ segue che c appartiene a S^1 (perché f preserva i moduli: $|c| = |f(1)| = |1| = 1$). Chiamiamo g la funzione $g(z) = c^{-1}f(z)$. La funzione g è un'isometria, perché f lo è, e anche la moltiplicazione per il numero unitario c^{-1} è un'isometria, per quanto si è visto nella prima parte della dimostrazione. Inoltre, $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$. Da queste ultime due condizioni (e dal fatto che g è un'isometria) segue

$$|g(z)| = |z|, \qquad |g(z) - 1| = |z - 1| \tag{2.7}$$

(Geometricamente: $g(z)$ appartiene all'intersezione della circonferenza di centro 0 e raggio $|z|$ e della circonferenza di centro 1 e raggio $|z-1|$). Dalle due condizioni (2.7) segue che, per ogni fissato $z = a + ib \in \mathbb{C}$, posto $g(z) = a' + ib'$, si ha:

$$a' = a, \qquad b' = \pm b \tag{2.8}$$

Le uguaglianze (2.8) sono ovvie, se si pensa all'interpretazione geometrica alla quale abbiamo appena accennato. Diamo però anche una dimostrazione algebrica. Le due condizioni (2.7) sono rispettivamente equivalenti alle due equazioni del sistema:

$$\begin{cases} a'^2 + b'^2 & = a^2 + b^2 \\ (a'-1)^2 + b'^2 & = (a-1)^2 + b^2 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro, si ottiene

$$\begin{cases} a'^2 + b'^2 & = a^2 + b^2 \\ 2a' - 1 & = 2a - 1 \end{cases}$$

da cui $a' = a$ e $b'^2 = b^2$, ossia $b' = \pm b$, come volevamo dimostrare.

In particolare, si ha $g(i) = \pm i$. Distinguiamo allora due casi.

Primo caso: $g(i) = i$. Poiché g è un'isometria, vale

$$|g(z) - g(i)| = |z - i| \quad \text{ossia} \quad |g(z) - i| = |z - i| \tag{2.9}$$

che si scrive (ricordando che $z = a + ib$, $g(z) = a + ib'$, con la stessa parte reale)

$$a^2 + (b'-1)^2 = a^2 + (b-1)^2 \tag{2.10}$$

Di qui (ricordando che $b'^2 = b^2$) segue $b' = b$. Dunque, g è l'identità: $g(z) = c^{-1}f(z) = z$. Quindi $f(z) = cz$, per ogni z in $\mathbb{C}$.

Secondo caso: $g(i) = -i$. Poiché g è un'isometria, vale

$$|g(z) - g(i)| = |z - i| \quad \text{ossia} \quad |g(z) + i| = |z - i| \tag{2.11}$$

che si scrive ($z = a + ib$, $g(z) = a + ib'$)

$$a^2 + (b'+1)^2 = a^2 + (b-1)^2, \tag{2.12}$$

Di qui (e da $b'^2 = b^2$) segue $b' = -b$. Dunque, $g(z) = a - ib = \overline{z}$, per ogni z in $\mathbb{C}$. Poiché $\overline{z} = g(z) = c^{-1}f(z)$, abbiamo $f(z) = c\overline{z}$. □

Dalla classificazione delle isometrie che fissano l'origine segue facilmente il seguente caso generale ($f(0)$ arbitrario).

Teorema 2.3 (Classificazione delle isometrie del piano complesso)**.** *Le isometrie* $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ *del piano complesso sono dei due tipi seguenti:*

1) $f(z) = cz + w_0$, *con* $c \in S^1$ *e* $w_0 \in \mathbb{C}$.

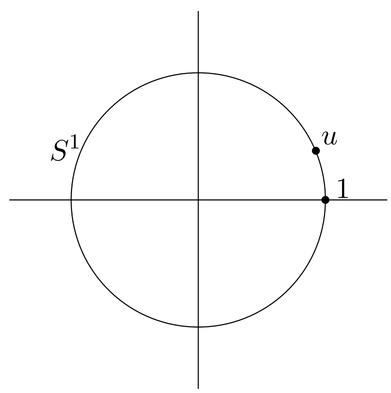
2) $f(z) = c\overline{z} + w_0$, *con* $c \in S^1$ *e* $w_0 \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Sia f una qualunque isometria di $\mathbb{C}$. Poniamo $w_0 = f(0)$ e $\varphi(z) = f(z) - w_0$. φ è una isometria e fissa l'origine: $\varphi(0) = w_0 - w_0 = 0$. Per il teorema 2.2, $\varphi(z) = f(z) - w_0 = cz$, oppure $\varphi(z) = f(z) - w_0 = c\overline{z}$, con $c \in S^1$. Quindi $f(z) = cz + w_0$ oppure $f(z) = c\overline{z} + w_0$. □

2.2 Nomi e interpretazione geometrica dei vari tipi di isometrie

Fissiamo un qualunque $w_0 \in \mathbb{C}$. La trasformazione $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, $f(z) = z + w_0$, si chiama *traslazione* di w_0. Se $w_0 \neq 0$, non ha punti fissi. (Se $w_0 = 0$, è l'identità).

Abbiamo visto che la trasformazione da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$, $f(z) = uz$ con $u = e^{i\vartheta} \in S^1$, è una isometria che tiene fissa l'origine. Tale isometria è dunque rappresentate dal numero complesso unitario u sulla circonferenza unitaria S^1:



Cenno al concetto generale di *rotazione*:

Un qualunque numero complesso unitario u può essere connesso in modo continuo al numero $1 \in S^1$ per mezzo di un cammino che passi solo per punti unitari (un arco della circonferenza S^1). Interpretiamo in termini di isometrie: l'isometria $z \to uz$ si può ottenere con un *cammino (o moto) continuo dall'identità, sempre passando attraverso isometrie.* Tali isometrie - che appartengono alla *componente connessa dell'identità* - si chiamano *rotazioni.*

Alla composizione delle due rotazioni $f(z) = uz$, $g(w) = u'w$, $u, u' \in S^1$, corrisponde il prodotto uu', nel senso che

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(uz) = (u'u)z$$

Detto altrimenti:

Il gruppo SO_2 (gruppo speciale ortogonale; il numero 2 ricorda la dimensione del piano) delle rotazioni del piano attorno all'origine è isomorfo al gruppo moltiplicativo S^1 dei complessi unitari.

L'isometria di $\mathbb{C}$ che fissa l'origine ed è del tipo $f(z) = cz$ con $c = e^{i\vartheta} \in S^1$ si chiama *rotazione di centro l'origine e angolo* ϑ. Una rotazione con centro l'origine ha un unico punto fisso (l'origine) oppure è l'identità.

L'isometria $f(z) = cz + w_0$, con $c \in S^1$ e $w_0 \in \mathbb{C}$, è una roto-traslazione: una rotazione con centro l'origine, seguita da una traslazione. Ogni roto-traslazione $f(z) = cz + w_0$, con $c \in S^1$, $c \neq 1$, ha esattamente un punto fisso, che però non è l'origine, ma il punto $\dfrac{w_0}{1-c}$. [Esercizio]. (Suggerimento: Cercare il punto fisso, risolvendo l'equazione di primo grado $z = cz + w_0$).

L'isometria di $\mathbb{C}$, che fissa l'origine, del tipo $f(z) = c\overline{z}$, con $c = e^{i\vartheta} \in S^1$, è la simmetria rispetto alla retta r passante per l'origine e per il punto $e^{i\frac{\vartheta}{2}} = \cos\dfrac{\vartheta}{2} + i\sin\dfrac{\vartheta}{2}$. Questa isometria lascia fisso ogni punto della retta r e manda ogni punto della retta ortogonale a r passante per l'origine nel suo simmetrico rispetto all'origine. [Esercizio] (Cenno di soluzione: il coniugato di $e^{i\frac{\vartheta}{2}}$ è $e^{-i\frac{\vartheta}{2}}$, e quindi il punto $e^{i\frac{\vartheta}{2}}$ resta fisso:

$$f(e^{i\frac{\vartheta}{2}}) = e^{i\vartheta}e^{-i\frac{\vartheta}{2}} = e^{i\frac{\vartheta}{2}}$$

Ne segue che tutti i multipli reali $te^{i\frac{\vartheta}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$, restano fissi. Invece, il vettore $\mathbf{v}$, ortogonale a r, che va dall'origine al punto $e^{i(\frac{\vartheta}{2}+\frac{\pi}{2})}$ viene trasformato nel vettore cha va dall'origine a $e^{i(\frac{\vartheta}{2}-\frac{\pi}{2})}$, cioè nel suo opposto).

3 Esercizi e complementi

3.1 Esercizi sui numeri complessi

Esercizio 3.1. *Sia* $z = -1+i\sqrt{3}$. *Scrivere* z *in forma trigonometrica e in forma esponenziale.*

R

Esercizio 3.2. *Sia* $z = -1 + i\sqrt{3}$. *Scrivere* z^{-1} *in forma algebrica e in forma esponenziale.*

R

Esercizio 3.3. *Scrivere in forma algebrica le radici quadrate di* $-i$.

R

Esercizio 3.4. *Scrivere in forma trigonometrica le radici terze di* $1 + \sqrt{3}i$.

R

Esercizio 3.5. *Scrivere le radici quarte di* $1 + i$ *in forma esponenziale.*

R

Esercizio 3.6. *Siano* $z, w \in \mathbb{C}$. *Dimostrare che*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

R

Esercizio 3.7. *Trovare le radici delle seguenti equazioni nel campo* $\mathbb{C}$ *dei numeri complessi*

1. $z^2 + 3iz + 4 = 0$
2. $z^2 + (1 + i)z + i = 0$
3. $i(z + 1)^3 = 1$

4. $z^4 + 5iz^3 - z - 5i = 0$
5. $z^2 + \overline{z} = 0$

R

Esercizio 3.8 (Rappresentazione cartesiana di una rotazione)**.** *Scrivere le equazioni cartesiane che rappresentano la rotazione attorno all'origine di angolo α.*

R

Esercizio 3.9. *Sia $p(Z) = a_n Z^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \ldots\ldots a_1 Z + a_0$ un polinomio i cui coefficienti siano tutti reali: $a_i \in \mathtt{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Dimostrare che se il numero complesso z è una radice del polinomio, allora anche il coniugato $\overline{z}$ lo è.*

R

Esercizio 3.10. *Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi:*

$$A_1 = \{z \in \mathtt{C} \quad | \quad 0 \leq \mathrm{Re}(z) < 2\pi\}$$

$$A_2 = \{z \in \mathtt{C} \quad | \quad 0 \leq \mathrm{Re}(iz) < 2\pi\}$$

$$A_3 = \{z \in \mathtt{C} \quad | \quad \left|\frac{1}{z}\right| \leq 1\}$$

$$A_4 = \{z \in \mathtt{C} \quad | \quad \mathrm{Re}(\frac{1}{z^2}) \geq 0\}$$

R

Esercizio 3.11. *Spiegare perché la rotazione $R_v^\theta : \mathtt{C} \longrightarrow \mathtt{C}$ di un angolo θ attorno a v in $\mathtt{C}$, si scrive: $R_v^\theta = T_v \circ R_O^\theta \circ T_{-v}$. Qual è l'immagine z' del punto $z = 2 + i$ attraverso la rotazione di $+\frac{\pi}{2}$ attorno al punto $1 + i$?*

R

Esercizio 3.12. *Si considerino due rototraslazioni $T_u \circ R_O^\alpha$ e $T_v \circ R_O^\beta$. Dimostrare che la loro composizione $(T_v \circ R_O^\beta) \circ (T_u \circ R_O^\alpha)$ è una rototraslazione (del tipo $T_w \circ R_O^\gamma$).*

R

Esercizio 3.13. *Trovare il punto fisso della roto-traslazione* $T_v \circ R_O^\theta : \mathtt{C} \longrightarrow \mathtt{C}$, *con* $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ *e* $v = i$

R

Esercizio 3.14. *Si consideri* $R_O^\theta : \mathtt{C} \longrightarrow \mathtt{C}$, $R_O^\theta(z) = e^{i\theta} z$ *(rotazione di angolo* θ *attorno all'origine) e* $T_v : \mathtt{C} \longrightarrow \mathtt{C}$, $T_v(z) = z + v$*(traslazione individuata dal vettore* v *di* $\mathtt{C}$*). Dimostrare che*

$$T_v \circ R_O^\theta = R_O^\theta \circ T_{e^{-i\theta} v}$$

R

Esercizio 3.15. *Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi:*

a) $E = \{z \in \mathtt{C} \ \mid \ 1 < |z| < 2,\ \dfrac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi\}$

b) $F = \{w \in \mathtt{C} \ \mid \ w = z^2,\ \textit{con } z \in E\}$

R

Esercizio 3.16. *Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi:*

a) $A = \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ 1 < |z| < 2,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}\}$

b) $B = \{w \in \mathbb{C} \ \mid \ w = z^3,\ \textit{con } z \in A\}$

c) $C = \{w \in \mathbb{C} \ \mid \ w^4 \in A\}$

R

Esercizio 3.17. *Si consideri l'equazione*

$$z^4 + 2z = 0$$

nel campo complesso $\mathbb{C}$.

(a) *Scrivere tutte le soluzioni nella forma* $a + ib$.

(b) *Sia* $\widetilde{z}$ *la soluzione che verifica*

$$\operatorname{Re}(\widetilde{z}) > 0 \ \textit{e} \ \operatorname{Im}(\widetilde{z}) < 0$$

Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\operatorname{Re}(\widetilde{z})}{\operatorname{Im}(\widetilde{z})} \right|^n + 1 \right)$$

R

Esercizio 3.18 (Analisi e Geometria 1. 6 settembre 2010)**.** *Si consideri la seguente equazione nel campo complesso:*

$$z^4 - 4z^2 + 8 = 0$$

Scrivere le soluzioni nella forma esponenziale $re^{i\theta}$ e rappresentarle nel piano di Gauss.

R

Esercizio 3.19. *Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione:*

$$(|z - 6i| - |z + 4i|)(z^3 - i) = 0$$

R

Esercizio 3.20. *Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione:*

$$(|z - 6i| - |z + 2i|)(z^3 + i) = 0$$

R

Esercizio 3.21. *Dimostrare che la somma delle radici n-esime del numero complesso 1 è uguale a zero. Quale ne è l'interpretazione geometrica?*

R

Esercizio 3.22. *Calcolare: $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + 5i^5 + \cdots + 100i^{100}$.*

R

3.2 Risposte e suggerimenti.

Soluzione 3.1 $\quad z = 2(\cos\frac{2}{3}\pi + \sin\frac{2}{3}\pi) = 2e^{i\frac{2}{3}\pi}$.

Soluzione 3.2 $\quad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2}e^{i\frac{4}{3}\pi}$.

Soluzione 3.3 $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = -z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Soluzione 3.4 $z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9})$, $z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{7}{9}\pi + i\sin\frac{7}{9}\pi)$, $z_3 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{13}{9}\pi + i\sin\frac{13}{9}\pi)$.

Soluzione 3.5 $z = \sqrt[8]{2}\Big(\cos(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2})\Big)$ con $k = 0, 1, 2, 3$.

Soluzione 3.6 *1.* Sia $z = a + ib$ e $w = c + id$. Allora $z + w = (a + c) + i(b + d)$ e

$$\overline{z + w} = (a + c) - i(b + d) \tag{3.1}$$

Inoltre,

$$\overline{z} + \overline{w} = (a - ib) + (c - id) = (a + c) - i(b + d) \tag{3.2}$$

Dalle uguaglianze 3.5 e 3.9 si ha $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

2. Si ha:

$$zw = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$\overline{zw} = (ac - bd) - i(bc + ad) \tag{3.3}$$

$$\overline{z}\,\overline{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(bc + ad) \tag{3.4}$$

Dalle uguaglianze 3.3 e 3.4 si ottiene $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

Soluzione 3.7

1. $z_1 = -4i$, $z_2 = i$.
2. $z_1 = -1$, $z_2 = -i$
3. L'equazione è equivalente a $(z+1)^3 = -i$. Posto $z+1 = w$, si deve risolvere l'equazione $w^3 = -i$, ossia occorre trovare le tre radici terze di $-i$, che sono

$$e^{-i\frac{\pi}{6}}, e^{-i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})}, e^{-i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})}$$

   Le soluzioni di $(z + 1)^3 = -i$ sono allora

$$e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1,\ e^{-i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} - 1,\ e^{-i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} - 1$$

4. Le soluzioni sono $-5i$ e le tre radici terze di 1.

5. $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Soluzione 3.8

La rotazione di centro l'origine e angolo α è rappresentata dalla funzione

$$\mathbb{C} \xrightarrow{R_\alpha} \mathbb{C}, \quad R(z) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z \tag{3.5}$$

Posto $R_\alpha(z) = x' + iy'$ e $z = x + iy$, da (3.5) si ottiene:

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x + iy) \\ &= (x\cos\alpha - y\sin\alpha) + i(x\sin\alpha + y\cos\alpha) \end{aligned}$$

Le equazioni della rotazione di centro l'origine e angolo α sono date allora da:

$$\begin{cases} x = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Soluzione 3.9 Per ipotesi, $p(z) = 0$:

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots\ldots a_1 z + a_0 = 0 \tag{3.6}$$

Passiamo ai coniugati del primo e del secondo membro di questa uguaglianza. Ricordando che il coniugato della somma (o del prodotto) è la somma (rispettivamente, il prodotto) dei coniugati, si ottiene

$$\overline{a_n}\,\overline{z}^n + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z}^{n-1} + \ldots\ldots \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} = 0 \tag{3.7}$$

Ora, poiché (per ipotesi) i coefficienti a_i, $i = 0, ..., n$, sono tutti reali, si ha $\overline{a_i} = a_i$. Dunque,

$$a_n\bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \ldots\ldots a_1\bar{z} + a_0 = 0 \tag{3.8}$$

Pertanto, anche $\bar{z}$ è una radice dello stesso polinomio.

Una conseguenza di quanto si è ora dimostrato, è la seguente: Se un polinomio ha i coefficienti tutti reali, allora le sue radici complesse che hanno parte immaginaria non nulla (cioè, le sue radici complesse non appartenenti al sottocampo $\mathbb{R}$), sono sempre in numero pari. Infatti, ogniqualvolta c'è una radice complessa (non reale), c'è la sua complessa coniugata.

Soluzione 3.10 A_1 è la regione di piano compresa tra l'asse y e la retta r di equazione $x = 2\pi$. (l'asse y è compreso, la retta r no).

A_2 è la regione di piano compresa tra l'asse x e la retta r di equazione $y = -2\pi$. (l'asse x è compreso, la retta r no).

A_3 è la regione di piano esterna alla circonferenza C di centro l'origine e raggio uno (i punti della circonferenza C sono compresi).

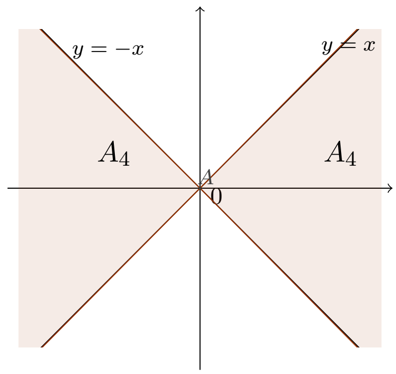


Figure 1

Soluzione 3.11 $z' = 1 + 2i$

Soluzione 3.12 Si ha $T_u \circ R_O^{\alpha}(z) = e^{i\alpha} + u$ e $T_v \circ R_O^{\beta}(z') = e^{i\beta} + v$. Allora

$$(T_w \circ R_O^{\beta}) \circ (T_v \circ R_O^{\alpha})(z) = e^{i\beta}\Big(e^{i\alpha}z + u\Big) + v = e^{i(\alpha+\beta)}z + \big(e^{i\beta}u + v\big)$$

Tale trasformazione è una rotazione di centro O e angolo $\gamma = \alpha + \beta$ seguita da una traslazione individuata dal vettore $w = e^{i\beta}u + v$.

Soluzione 3.13 La rotazione di $\pi/2$ attorno all'origine, seguita dalla traslazione del vettore i, è la roto-traslazione $z \mapsto iz + i$. L'unico suo punto fisso è la soluzione dell'equazione di primo grado

$$iz + i = z$$

Si ricava $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$.

Soluzione 3.14 Si ha: $\big(R_O^{\theta} \circ T_{e^{-i\theta}v}\big)(z) = e^{i\theta}(z + e^{-i\theta}v) = e^{i\theta}z + v = (T_v \circ R_O^{\theta})(z)$

Soluzione 3.15 I numeri complessi $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in E$ sono soggetti alle seguenti limitazioni: $1 < r < 2$, $\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$. Pertanto i numeri complessi w che stanno in F sono del tipo

$$w = z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

con $1 < r^2 < 4$ e $\pi \le 2\theta \le 2\pi$. Gli insiemi E e F sono quelli evidenziati in figura.

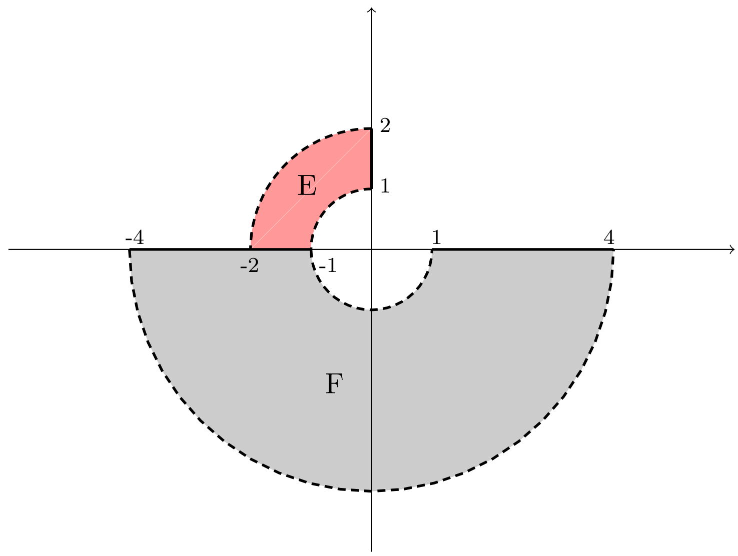


Figure 2

Soluzione 3.16 a) I numeri complessi $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in A$ sono soggetti alle seguenti limitazioni: $1 < r < 2$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$.

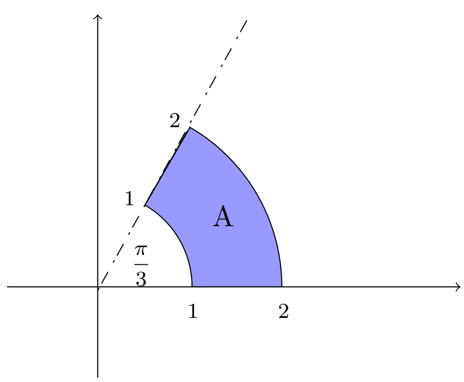


Figure 3

b) I numeri complessi w che stanno in B sono del tipo

$$w = z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

con $1 < r^3 < 8$ e $0 \leq 3\theta \leq \pi$.

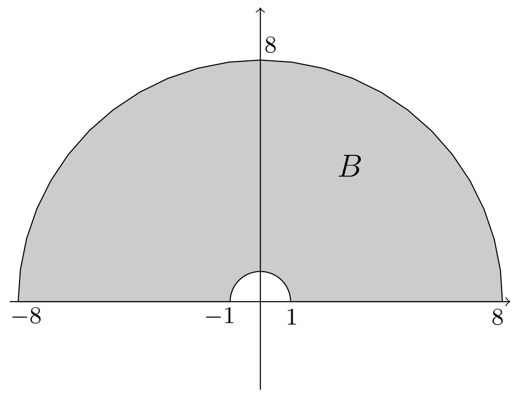


Figure 4

c) Sia $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in A$. I numeri complessi w per i quali

$$w^4 = z \tag{3.9}$$

sono le radici quarte di z. Posto $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, da (3.9) si ottiene:

$$\rho^4(\cos 4\alpha + i\sin 4\alpha) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Ovvero

$$\begin{cases} \rho^4 &= r \\ 4\alpha &= \theta + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho &= \sqrt[4]{r} \\ \alpha &= \dfrac{\theta}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3. \end{cases}$$

Allora le radici quarte di z (scritte in forma esponenziale) sono:

$$w_1 = \sqrt[4]{r}e^{\frac{\theta}{4}i}, \qquad w_2 = \sqrt[4]{r}e^{(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{2})i}, \qquad w_3 = \sqrt[4]{r}e^{(\frac{\theta}{4}+\pi)i}, \qquad w_4 = \sqrt[4]{r}e^{(\frac{\theta}{4}+\frac{3}{2}\pi)i}.$$

Ricordando le limitazioni $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$, per ogni radice quarta w_i, $i = 1, 2, 3, 4$ si ottiene un insime di numeri complessi così definito:

$$C_1 = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid w = \sqrt[4]{r}\, e^{\frac{\theta}{4}i},\ 1 \leq \sqrt[4]{r} \leq \sqrt[4]{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{\theta}{4} \leq \frac{\pi}{12} \right\}$$

$$C_2 = \left\{ \{ w \in \mathbb{C} \mid w = \sqrt[4]{r}\, e^{(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{2})i},\ 1 \leq \sqrt[4]{r} \leq \sqrt[4]{2} \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{12}\pi \right\}$$

$$C_3 = \left\{ \{ w \in \mathbb{C} \mid w = \sqrt[4]{r}\, e^{(\frac{\theta}{4}+\pi)i},\ 1 \leq \sqrt[4]{r} \leq \sqrt[4]{2} \quad \text{e} \quad \pi \leq \frac{\theta}{4} + \pi \leq \frac{13}{12}\pi \right\}$$

$$C_4 = \left\{ \{ w \in \mathbb{C} \mid w = \sqrt[4]{r}\, e^{(\frac{\theta}{4}+\frac{3}{2}\pi)i},\ 1 \leq \sqrt[4]{r} \leq \sqrt[4]{2} \quad \text{e} \quad \frac{3}{2}\pi \leq \frac{\theta}{4} + \frac{3}{2}\pi \leq \frac{19}{12}\pi \right\}$$

L'insieme delle soluzioni è $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ (si veda la figura qui sotto).

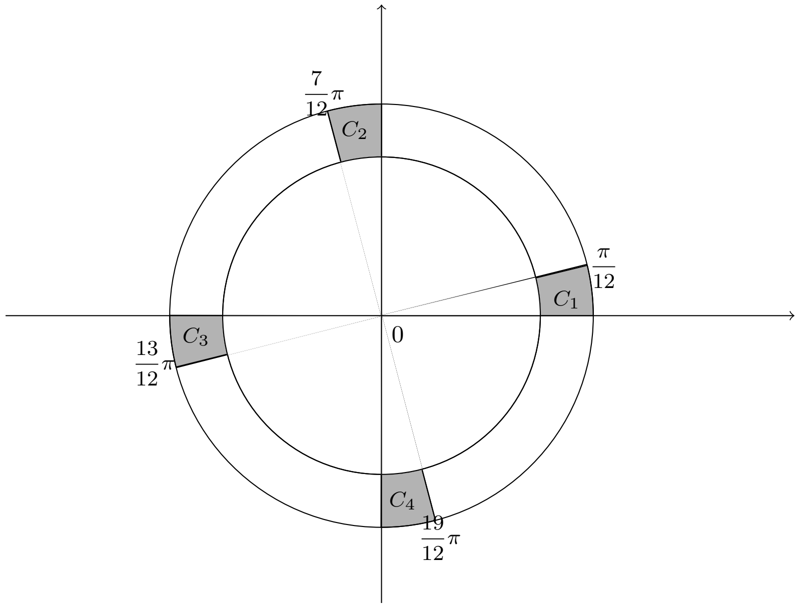


Figure 5

Soluzione 3.17 (a) Dall'equazione $z(z^3+2)=0$ si ottiene

$$z = 0 \tag{3.10}$$

$$z^3 + 2 = 0 \tag{3.11}$$

Per trovare le soluzioni di (3.12) bisogna determinare le radici terze di -2. Posto $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ si ottiene

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Pertanto

$$\begin{cases} r^3 = 2 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \quad k = 0,1,2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt[3]{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2}{3}\pi \quad k = 0,1,2 \end{cases}$$

Riassumendo, le soluzioni di $z(z^3+2)=0$ sono:

$z_0 = 0$

$z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\,i$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = \sqrt[3]{2}(-1+0i) = -\sqrt[3]{2}$$
$$z_3 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5}{3}\pi} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\,i$$

(b) La soluzione $\widetilde{z}$ è

$$\widetilde{z} = z_3 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\,i$$

(c)
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\mathrm{Re}(\widetilde{z})}{\mathrm{Im}(\widetilde{z})}\right|^n + 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n + 1\right) = \frac{1}{2}$$

Soluzione 3.19 L'insieme delle soluzioni dell'equazione $(|z-6i| - |z+4i|)(z^3 - i) = 0$ è l'unione dell'insieme delle soluzioni dell'equazione $|z-6i| - |z+4i| = 0$ e dell'insieme delle radici terze di i. Le soluzioni dell'equazione $|z-6i| = |z+4i|$ si possono determinare facilmente per via geometrica. Esse sono i punti dell'asse del segmento di estremi $6i$ e $-4i$ (si veda la figura 6), cioè

$$\{x+i,\ x\in\mathbb{R}\}$$

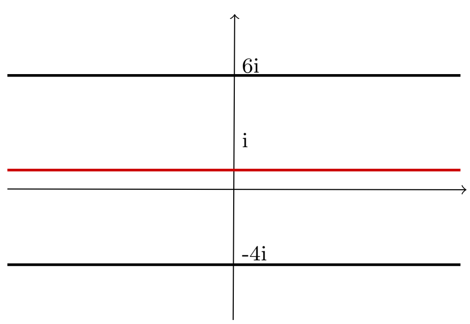


Figure 6

Un altro modo per ottenere le soluzioni dell'equazione

$$|z-6i| = |z+4i| \tag{3.12}$$

è il seguente: da (3.12), posto $z = x+yi$, si ottiene

$$|x+(y-6)i| = |x+(y+4)i|$$

Ovvero

$$x^2 + (y-6)^2 = x^2 + (y+4)^2$$

le cui soluzioni sono tutte le coppie ordinate (x, y) di numeri reali in cui $x \in \mathbb{R}$ è arbitrario e $y = 1$. Queste soluzioni rappresentano i numeri complessi del tipo $x + i$, con $x \in \mathbb{R}$.

Le radici terze di i sono $e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione $(|z-6i| - |z+4i|)(z^3 - i) = 0$ è

$$\{x + i,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\}$$

Soluzione 3.20 L'insieme delle soluzioni di $(|z-6i| - |z+2i|)(z^3 + i) = 0$ è

$$\{x + 2i,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{e^{-i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{-i\frac{5\pi}{6}}\}$$

Soluzione 3.21 Denotiamo $\varepsilon_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ la radice n-esima di 1 il cui argomento è l'angolo $2\pi/n$. Allora, le n radici n-esime di 1 sono date dalle potenze $1, \varepsilon_1, \varepsilon_1^2, \varepsilon_1^3, ..., \varepsilon_1^{n-1}$. Dobbiamo allora dimostrare che

$$1 + \epsilon_1 + \epsilon_1^2 + \cdots + \epsilon_1^{n-1} = 0$$

Partiamo dall'uguaglianza

$$1 - z^n = (1 - z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})$$

valida per ogni $z \in \mathbb{C}$. Al posto di z sostituiamo il numero $\epsilon_1\ (= e^{i\frac{2\pi}{n}})$:

$$1 - \varepsilon_1^n = (1 - \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_1^{n-1})$$

A primo membro abbiamo zero (perché $\varepsilon_1^n = 1$). A secondo membro, il fattore $(1 - \varepsilon_1)$ è diverso da zero. Dunque, il fattore $(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_1^{n-1})$ deve essere uguale a zero. (Si dia una interpretazione geometrica).

Soluzione 3.22 Le potenze dell'unità immaginaria i si ripetono con periodicità 4. Precisamente, esse *generano un gruppo ciclico di ordine 4*, i cui elementi sono $1, i, -1, -i$. Infatti:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i, ...\text{eccetera.}$$

La somma $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + 5i^5 + \cdots + 100i^{100}$ si scrive allora, sommando gli addendi a gruppi di quattro,

$$(i - 2 - 3i + 4) + (5i - 6 - 7i + 8) + ...$$

ossia

$$(-2i + 2) + (-2i + 2) + (-2i + 2) + (-2i + 2) + ...$$

La somma fino al termine $100i^{100}$ è dunque $50 - 50i$.