Il Metodo di Newton-Raphson-Fourier e l'algoritmo di Erone

Federico Lastaria[1]

Versione estesa di un seminario tenuto l'8 Aprile 2021 presso
Istituto d'Istruzione Superiore "Cremona"
con sezioni associate
L.S.S. "Luigi Cremona"e I.T.E. "Gino Zappa"(Milano).

Indice

[1]Dipartimento di Scienze e Tecnologie Aerospaziali, Politecnico di Milano. federico.lastaria@polimi.it

1 Il metodo iterativo di Newton

Il *Metodo di Newton* – detto anche delle tangenti, o di Newton-Raphson-Fourier – è un metodo iterativo in generale molto efficiente (quando funziona) per calcolare gli zeri di una funzione. Supponiamo che $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ sia una funzione derivabile, con derivata continua, e sia x_0 una "radice approssimata" di f; vale a dire, supponiamo che f si annulli in un punto x^* vicino a x_0. Il *Metodo di Newton* dice che (sotto opportune ipotesi) per ottenere una migliore approssimazione x_1 alla radice x^*, dobbiamo prendere il punto x_1 in cui la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ interseca l'asse delle x; cioè, dobbiamo prendere il punto $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. In modo ricorsivo, definiamo poi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.1}$$

La radice x^* si ottiene allora come il limite della successione (x_n). Questo metodo, per esempio, permette di approssimare in modo molto efficiente le radici quadrate (ritrovando, per un'altra via, il metodo di Erone). Sarà istruttivo vedere situazioni in cui il metodo iterativo di Newton non funziona.E vedremo infine che il metodo di Newton, anche quando "non funziona" dà luogo a fenomeni di grande interesse e fascino, soprattutto quando lo si estenda alla dinamica nel campo complesso.

1.1 Il teorema fondamentale

Prima di enunciare opportune ipotesi che garantiscano che il metodo di Newton funzioni (teorema 1.1), richiamiamo una proprietà delle funzioni convesse, che utilizzeremo nel corso delle nostre argomentazioni.

Lemma 1.1 (Derivata seconda positiva) *Supponiamo che una funzione f sia due volte derivabile su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, con derivata seconda $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$. Allora, vale la seguente proprietà: Qualunque sia il punto $(p, f(p))$ sul grafico di f, ogni punto del grafico di f, con l'eccezione del punto di contatto $(p, f(p))$, sta al disopra della retta tangente al grafico di f in $(p, f(p))$.*

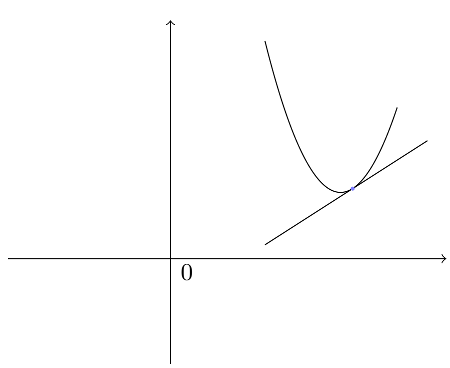


Figura 1: Derivata seconda $f'' > 0$ su un intervallo I: la funzione è convessa e il grafico sta tutto al di sopra delle rette tangenti.

Dimostrazione del Lemma. Chiamiamo

$$\varphi(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{Ordinata sul grafico di } f} - \underbrace{\big[f(p) + f'(p)(x-p)\big]}_{\text{Ordinata sulla retta tangente}} \tag{1.2}$$

la differenza tra l'ordinata di un punto $(x, f(x))$ sul grafico di f e l'ordinata del punto sulla retta tangente, avente la stessa ascissa x. Ovviamente $\varphi(p) = 0$. Quello che dobbiamo dimostrare è che $\varphi(x) > 0$, per ogni $x \neq p$. Facendo i conti, si vede subito che

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(p) \tag{1.3}$$

Da $f'' > 0$ segue che f' è strettamente crescente sull'intervallo I, cioè

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \implies f'(x_1) < f'(x_2) \tag{1.4}$$

Dunque, anche

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(p) \tag{1.5}$$

è strettamente crescente. Siccome φ' è strettamente crescente e $\varphi'(p) = 0$, si deve avere $\varphi'(x) < 0$ per $x < p$, e $\varphi'(x) > 0$ per $x > p$. Allora $\varphi(x)$ è strettamente decrescente a sinistra di p, nulla in p e strettamente crescente a destra di p. Dunque, $\varphi(x)$ è sempre positiva (con l'eccezione di $x = p$).

Alla stessa conclusione si arriva più velocemente scrivendo la formula di Taylor di f (nella forma di Lagrange) arrestata al al secondo ordine, con centro in p:

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(c)}{2}(x-p)^2 \tag{1.6}$$

Infatti, dalla formula (1.6) segue subito (per l'ipotesi $f'' > 0$)

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Ordinata sul grafico di } f} - \underbrace{\big[f(p) + f'(p)(x-p)\big]}_{\text{Ordinata sulla retta tangente}} = \frac{f''(c)}{2}(x-p)^2 > 0 \tag{1.7}$$

per $x \neq p$. □

Veniamo ora all'enunciato del teorema fondamentale. L'idea geometrica di base di questo metodo iterativo consiste nell'approssimare una funzione, a ogni passo, per mezzo di una retta tangente.

Teorema 1.1 (Metodo di Newton, o delle tangenti) *Poniamo $I = [a, b]$, intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(I)$ (vale a dire, derivabile due volte su I, con derivata seconda continua su I), soddisfacente:*

(1) $f(a) > 0, \;\; f(b) < 0$.

(2) $f'(x) < 0$ *per ogni x in I.*

(3) $f''(x) > 0$ *per ogni* x *in* I.

Allora valgono i seguenti tre fatti (a), (b) e (c):

(a) *Esiste un unico punto* $x^* \in (a, b)$ *in cui la funzione* f *si annulla.*

(b) *Scegliamo come punto iniziale*[2] *il punto* $x_0 = a$ *(in cui i valori* $f(a)$ *e* $f''(a)$ *sono concordi). Allora, tutti i termini della successione*

$$\begin{cases} x_0 &= a \\ x_{n+1} &= x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 1, 2, ... \end{cases} \tag{1.8}$$

appartengono ancora a I. *Precisamente, per ogni* n, $x_n \in [a, x^*)$. *Inoltre, la successione* x_n *è strettamente crescente e* $x_n \to x^*$, *per* $n \to +\infty$.

(c) (Convergenza quadratica) *Posto* $K = \dfrac{M}{2m}$, *dove* $M = \max_I |f''|$ *e* $m = \min_I |f'|$, *si ha, per ogni* $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n+1} - x^*| < K|x_n - x^*|^2 \tag{1.9}$$

Cioè: a ogni passo, l'errore che si compie è maggiorato dal prodotto di una costante per il quadrato dell'errore compiuto al passo precedente. (Si dice che la convergenza è quadratica*).*

Dimostrazione

(a) Esistenza e unicità della soluzione di $f(x) = 0$

Poiché $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, per il teorema degli zeri delle funzioni continue esiste almeno un punto x^* in (a, b) per il quale $f(x^*) = 0$. Poiché $f' < 0$, la funzione f è strettamente decrescente, dunque iniettiva. In particolare, questo implica che f non possa annullarsi in due punti distinti. In definitiva, esiste un punto $x^* \in I$, e uno solo, in cui la funzione f si annulla.

[2] Questa sarà la nostra "approssimazione iniziale", o "congettura iniziale"(inglese: "initial guess") per lo zero di f.

(b) Convergenza del metodo iterativo

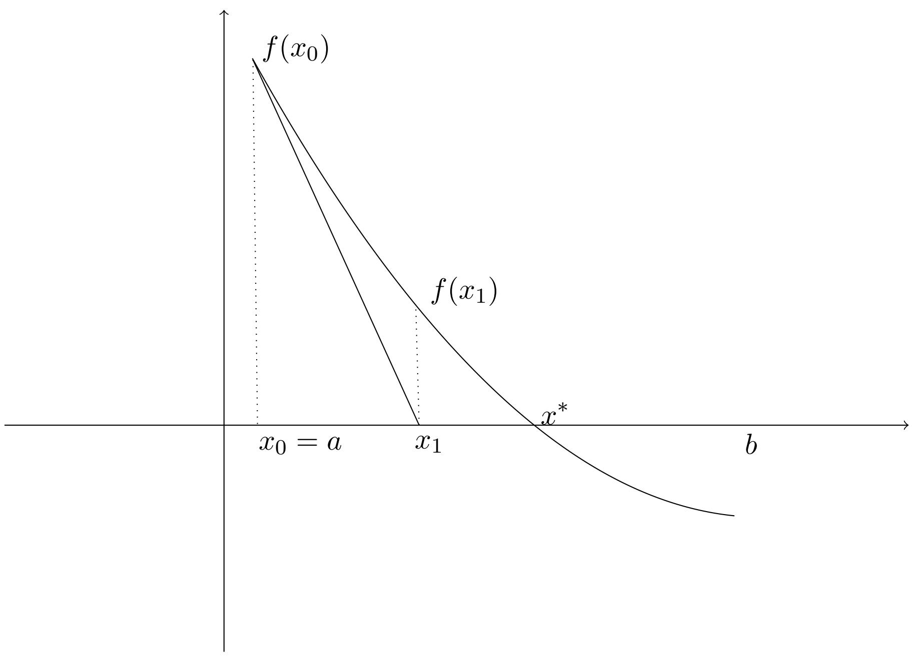


Figura 2: Metodo di Newton, o delle tangenti. Primi due termini x_0, x_1.

Partiamo da $x_0 = a$. Chiamiamo T_0 la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$:

$$T_0 : \qquad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (x_0 = a) \tag{1.10}$$

La tangente T_0 non è orizzontale, perché $f'(x_0) \neq 0$, e quindi interseca l'asse delle x in un punto, diciamo $(x_1, 0)$ (Figura 2). Ponendo $y = 0$ in (1.10), si trova

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{1.11}$$

Il primo passo fondamentale consiste ora nel dimostrare che

$$x_0 < x_1 < x^* \tag{1.12}$$

Per il Lemma 1.1, il grafico di f (essendo $f'' > 0$ per ipotesi) sta tutto al disopra della retta tangente T_0. (Figura 3). In particolare, il punto $(x^*, 0)$ (appartenente al grafico di f, in quanto $0 = f(x^*)$) sta al di sopra del punto di T_0 avente la stessa ascissa x^*, chiamiamolo (x^*, y_1). Questo significa che $y_1 < 0$.

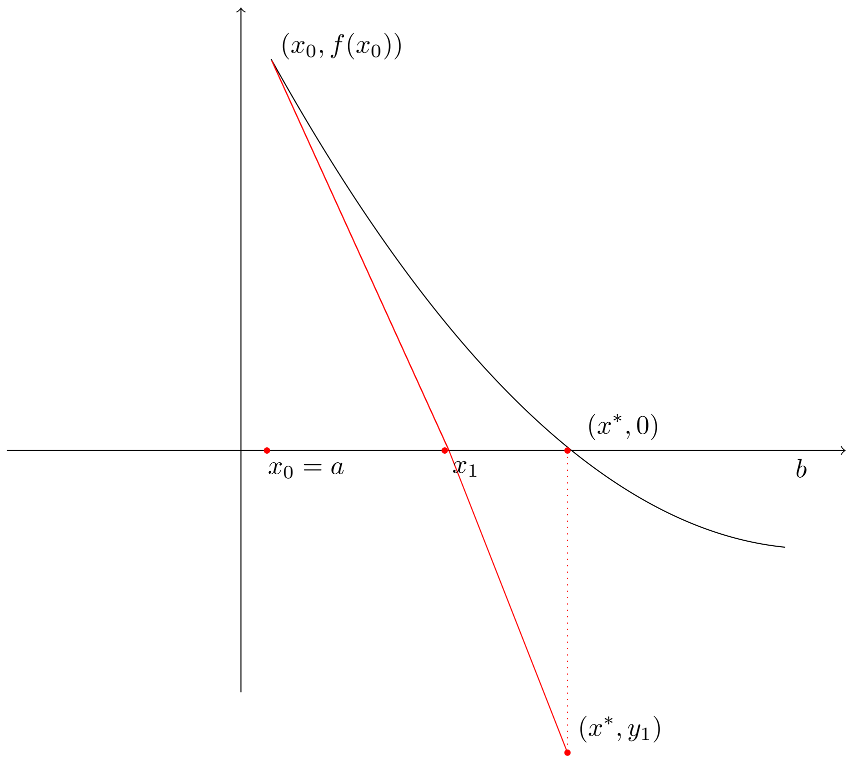


Figura 3

La retta tangente T_0 passa allora per il punto $(x_0, f(x_0))$, la cui ordinata $f(x_0)$ è positiva, e per il punto (x^*, y_1), la cui ordinata y_1 è negativa. In altri termini, la funzione $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (il cui grafico è la retta T_0) agli estremi dell'intervallo $[x_0, x^*]$ assume valori di segno opposto. Dunque, per il teorema degli zeri, il valore (unico) x_1 (dato da (1.11)) in cui la retta tangente T_0 interseca l'asse delle x deve essere compreso tra x_0 e x^*:

$$x_0 < x_1 < x^* \tag{1.13}$$

come volevamo dimostrare. Si noti inoltre che

$$f(x_1) > 0 \tag{1.14}$$

Infatti, siccome f è strettamente decrescente, da $x_1 < x^*$ segue $f(x_1) > f(x^*) = 0$.

Ora applichiamo lo stesso procedimento, partendo da x_1, anziché da x_0. Cioè, consideriamo la retta T_1 tangente al grafico di f in $(x_1, f(x_1))$ e chiamiamo

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{1.15}$$

il punto in cui T_1 interseca l'asse delle x. Per (1.14), il valore $f(x_1)$ è positivo. Quindi sono soddisfatte le stesse condizioni che valevano al passo precedente: valore di f nel punto x_1 positivo (come, nel passo precedente, $f(x_0) = f(a) > 0$) e $f'' > 0$.

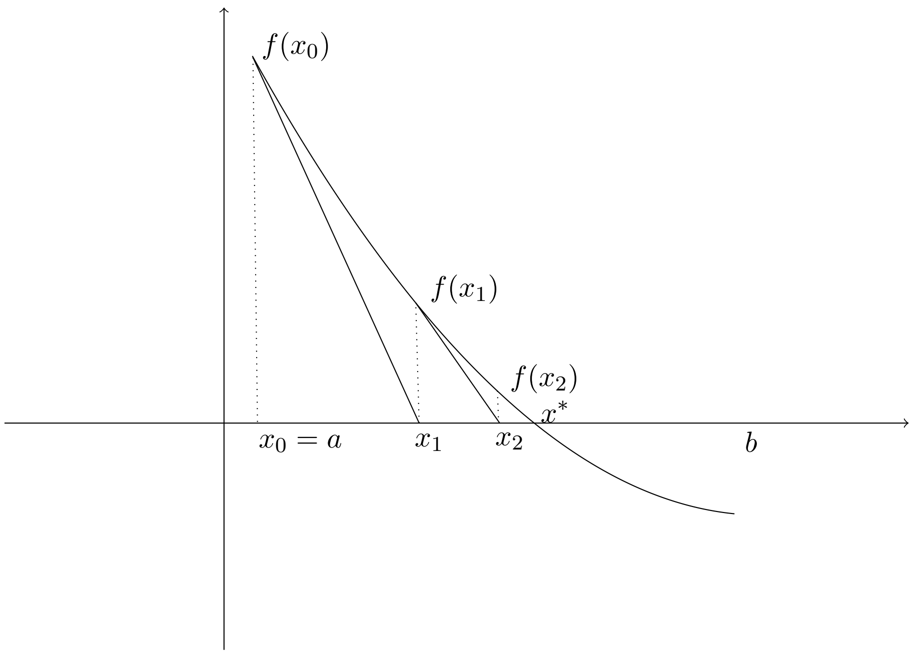


Figura 4: Metodo di Newton. Costruzione della successsione ricorsiva.

Ragionando esattamente come nella dimostrazione delle disuguaglianze (1.12), possiamo allora concludere che valgono le disuguaglianze

$$x_1 < x_2 < x^* \tag{1.16}$$

In conclusione, iterando il procedimento, la successione ricorsiva (1.17)

$$\begin{cases} x_0 & = & a \\ x_{n+1} & = & x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 1, 2, ... \end{cases} \tag{1.17}$$

soddisfa le disuguaglianze

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < x^*$$

Dunque, la successione ricorsiva (x_n) definita in (1.17) è *crescente*,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n < x_{n+1} \tag{1.18}$$

e *superiormente limitata* dal numero x^*:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n < x^* \tag{1.19}$$

Per il teorema sulle successioni reali monotòne e limitate, la successione x_n (essendo strettamente crescente e superiormente limitata da x^*) converge a un numero c^* (a priori, minore o uguale a x^*):

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = c^* \tag{1.20}$$

Dimostriamo che $c^* = x^*$. Chiamiamo

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{1.21}$$

la funzione da iterare per eseguire l'algoritmo di Newton, e poniamo dunque

$$x_{n+1} = N(x_n) \tag{1.22}$$

Per la continuità di N, da $x_n \to c^*$ e $x_{n+1} = N(x_n)$ segue che che c^* è punto fisso di N:

$$c^* = N(c^*) \tag{1.23}$$

Questo significa

$$c^* = c^* - \frac{f(c^*)}{f'(c^*)} \tag{1.24}$$

Di qui segue subito che $f(c^*) = 0$. Ma l'unico zero di f nell'intervallo $[a, b]$ è x^*, quindi $c^* = x^*$.

(c) Convergenza quadratica

Da

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

sottraendo x^*, otteniamo

$$x_{n+1} - x^* = -\frac{f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.25}$$

Per la formula di Taylor (arrestata al secondo ordine) sull'intervallo $[x_n, x^*]$, con il resto nella forma di Lagrange, esiste un punto c_n, compreso tra x_n e x^*, per il quale vale l'uguaglianza

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(c_n)}{2}(x^* - x_n)^2 \tag{1.26}$$

Da (1.26), si ricava

$$f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) = -\frac{f''(c_n)}{2}(x^* - x_n)^2$$

Sostituendo in (1.25), si ha

$$x_{n+1} - x^* = \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} \frac{(x^* - x_n)^2}{2} \tag{1.27}$$

Se m è il minimo di $|f'|$ su $[a, b]$ e M è il massimo di f'' su $[a, b]$, si ottiene infine la maggiorazione

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{M}{m} \frac{|x^* - x_n|^2}{2} = K|x^* - x_n|^2 \tag{1.28}$$

dove si è posto $\frac{M}{2m} = K$. (Si noti che $m \neq 0$. Infatti, per il teorema di Weierstrass sulle funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato, esiste $p \in [a, b]$ per il quale $m = |f'(p)|$, e $f'(p) \neq 0$, in quanto $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$). La disuguaglianza (1.28) dice che *l'errore al passo $(n + 1)$-esimo è maggiorato dal prodotto di una costante per il quadrato dell'errore commesso al passo precedente*. Il procedimento dunque converge molto rapidamente, non appena si abbia $|x^* - x_n| < 1$.

Abbiamo così concluso la dimostrazione. □

1.2 Altri casi in cui il metodo di Newton funziona. Punti di Fourier.

Con semplici modifiche, il metodo delle tangenti di Newton (Teorema 1.1) si può utilizzare anche se al posto delle ipotesi (del Teorema 1.1)

$$f(a) > 0 \qquad f(b) < 0 \qquad f' < 0 \qquad f'' > 0$$

se ne sostituiscono altre, che conducono a grafici sostanzialmente simmetrici. Riassumiamo le quattro situazioni che si possono verificare (Figure 5 e 6):

$f(a) > 0$	$f(b) < 0$	$f' < 0$	$f'' > 0$	Figura 5(a)
$f(a) < 0$	$f(b) > 0$	$f' > 0$	$f'' > 0$	Figura 5(b)
$f(a) < 0$	$f(b) > 0$	$f' > 0$	$f'' < 0$	Figura 6(c)
$f(a) > 0$	$f(b) < 0$	$f' < 0$	$f'' < 0$	Figura 6(d)

In ciascuno di questi quattro casi, bisogna però fare attenzione alla scelta giusta del punto iniziale x_0 dell'iterazione, cioè la scelta dell'approssimazione iniziale x_0 che garantisca la convergenza del metodo di Newton allo zero di f. Per fissare le idee, chiamiamo *punto di Fourier*, e denotiamo x_0, l'estremo dell'intervallo $[a, b]$ in cui il valore di f e di f'' sono concordi[3]. Allora, definita in tal modo l'approssimazione iniziale x_0, la successione

$$x_0 = \text{ Un punto di Fourier} \tag{1.29}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.30}$$

risulterà essere strettamente monotòna (crescente nei casi (a),(c) e decrescente nei casi (b),(d)) e convergerà ancora allo zero di f, come si vede facilmente, adattando in modo ovvio la dimostrazione del teorema 1.1.

Ovviamente, il metodo di Newton continua a valere (a maggior ragione) se si prende come punto iniziale x_0 un qualunque punto compreso tra un punto di Fourier e lo zero di f . Se invece si prende come punto iniziale l'estremo di $[a, b]$ diverso da un estremo di Fourier (cioè, si sceglie come x_0 l'estremo in cui f e f'' sono discordi), il metodo di Newton può fallire. Più precisamente (si veda il teorema di convergenza locale 1.4), esiste un intorno $I^* = (x^* - \delta, x^* + \delta)$ di x^* tale che, comunque si scelga $x_0 \in I^*$, il metodo converge ancora. In altri termini, se si sceglie x_0 *sufficientemente vicino* a x^*, la successione iterativa di Newton converge allo zero x^*. Se si prende invece x_0 lontano da x^*, il metodo può fallire. Ad esempio, la retta tangente in x_0 potrebbe non intersecare l'intervallo $[a, b]$. Oppure, potrebbero generarsi dei cicli. Per esempi di questo tipo, si veda il paragrafo 1.6.

[3] Cioè, $x_0 = a$ se $f(a)f''(a) > 0$, oppure $x_0 = b$ se $f(b)f''(b) > 0$.

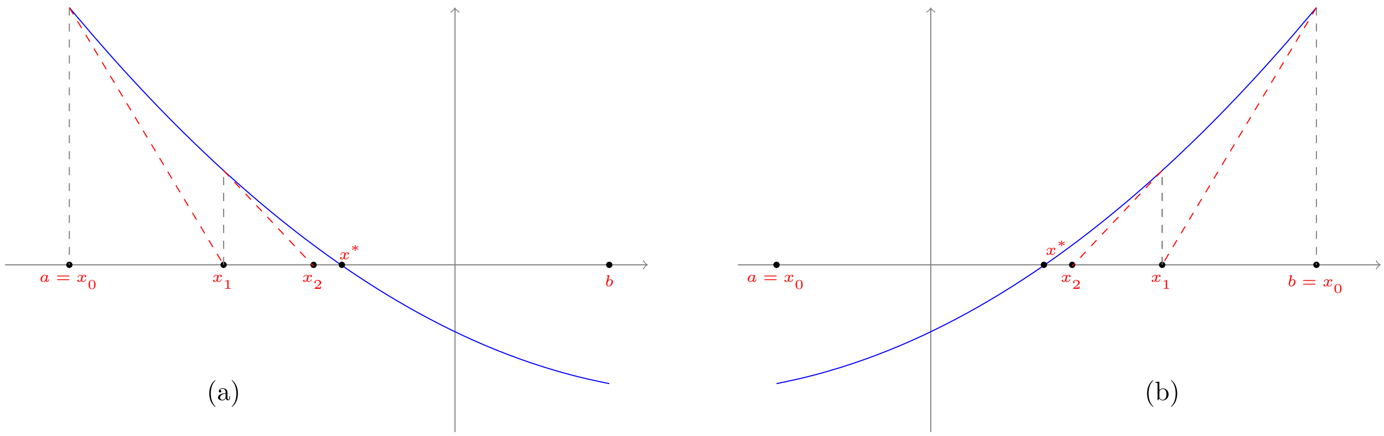


Figura 5: Caso $f'' > 0$.
A sinistra, Figura (a): $f'' > 0$, $f' < 0$; punto iniziale di Fourier $a = x_0$ $(f(a)f''(a) > 0)$.
A destra, Figura (b): $f'' > 0$, $f' > 0$; punto iniziale di Fourier $b = x_0$ $(f(b)f''(b) > 0)$.

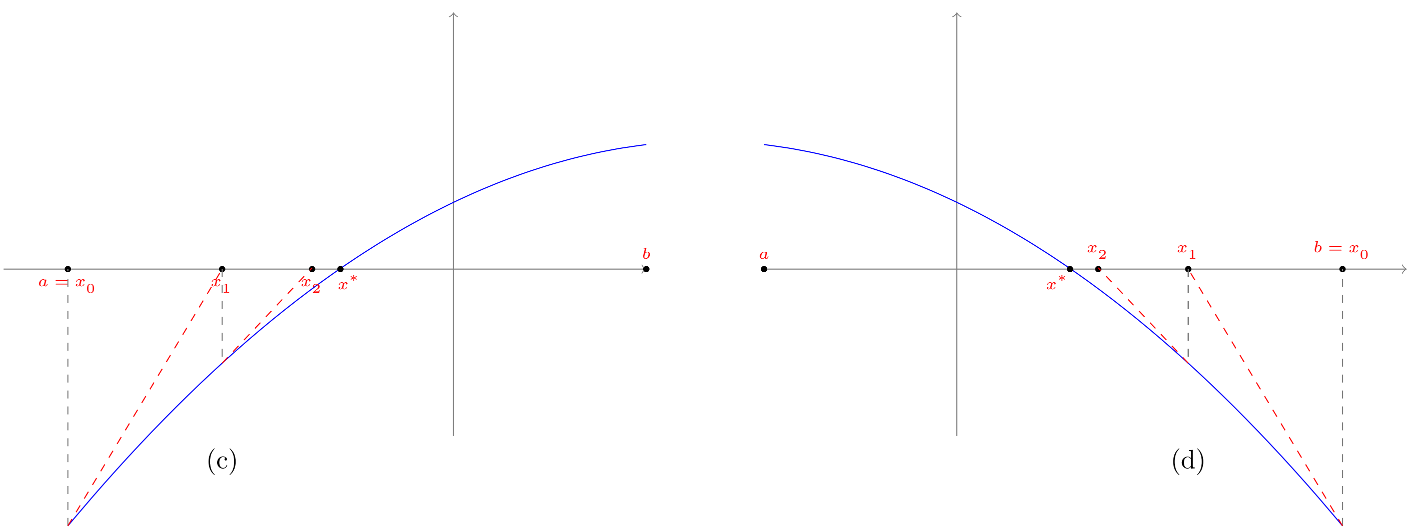
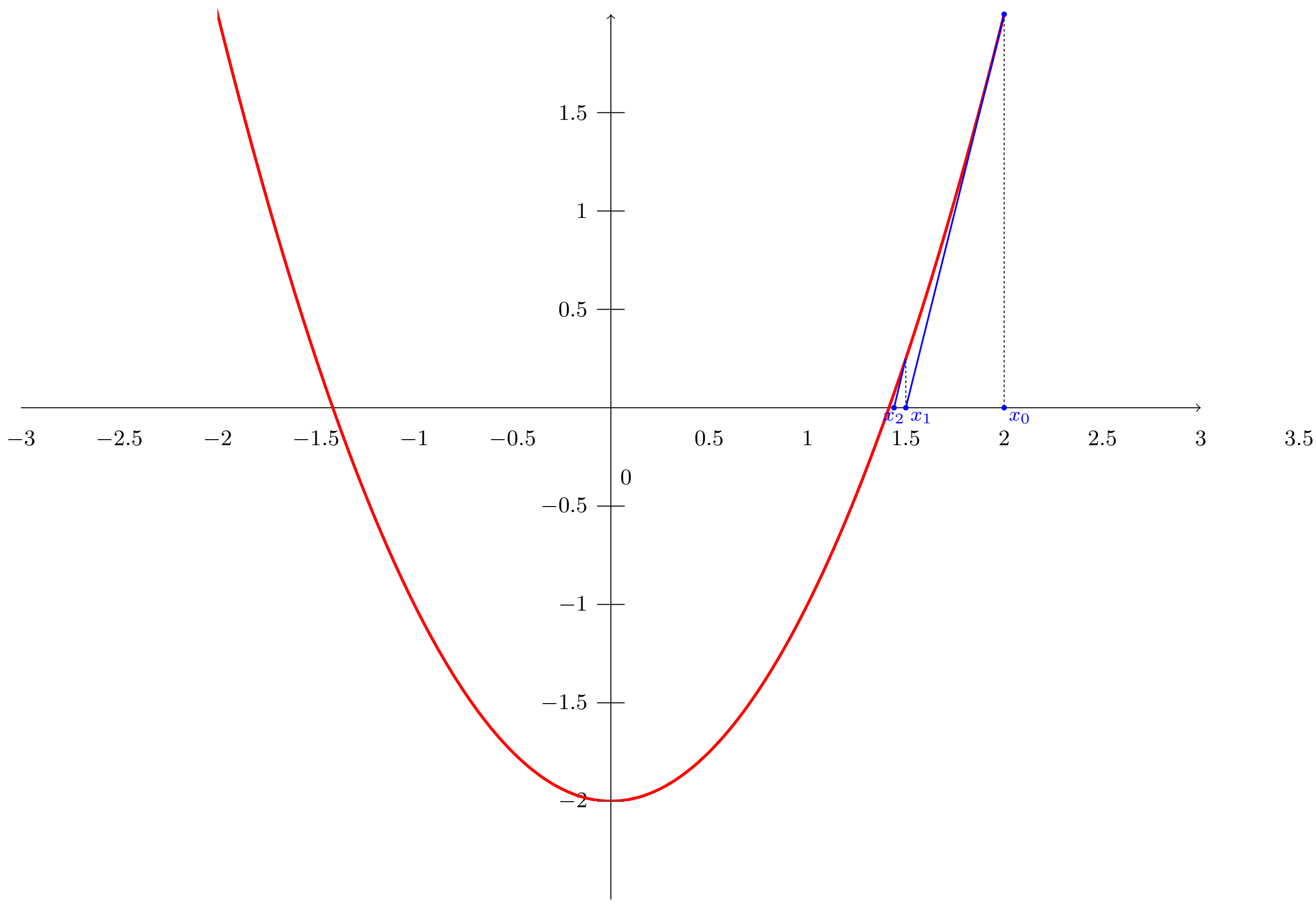


Figura 6: Caso $f'' < 0$.
A sinistra, Figura (c): $f'' < 0$, $f' > 0$; punto iniziale di Fourier $a = x_0$ $(f(a)f''(a) > 0)$.
A destra, Figura (d): $f'' < 0$, $f' < 0$; punto iniziale di Fourier $b = x_0$ $(f(b)f''(b) > 0)$.

1.3 Primo esempio: il calcolo delle radici quadrate $\sqrt{2}$

Il numero $\sqrt{2}$ è la radice positiva dell'equazione $x^2 - 2 = 0$. Applichiamo allora il metodo delle tangenti di Newton-Fourier alla funzione $f(x) = x^2 - 2$, ristretta a un intervallo che contenga la radice $\sqrt{2}$; ad esempio, l'intervallo $[1, 2]$. La restrizione della funzione all'intervallo $[1, 2]$ f è crescente, è convessa e assume valori di segno opposto agli estremi: $f(1) < 0$, $f(2) > 0$. (Siamo nel caso della Figura 5(b) del paragrafo precedente).



Poiché $f(x_n) = x_n^2 - 2$ e $f'(x_n) = 2x_n$,

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \tag{1.31}$$

Pertanto, la formula ricorsiva, scegliendo il valore iniziale $x_0 = 2$, è la seguente:

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right) \qquad (n \text{ intero} \geq 0.) \end{cases} \tag{1.32}$$

	$f(x_n) = x_n^2 - 2$	$f'(x_n) = 2x_n$	$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$	Valori di x_n	Errore= $x_n - \sqrt{2}$
$x_0 = 2$	2	4	$2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2} =$	1.50000000000000..	$< 10^{-1}$
$x_1 = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{17}{12} =$	1.41666666666666..	$< 10^{-2}$
$x_2 = \frac{17}{12}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{577}{408} =$	1.41421568627450..	$< 10^{-5}$
$x_3 = \frac{577}{408}$	$\frac{1}{166464}$	$\frac{577}{204}$	$\frac{665857}{470832} =$	1.41421356237468..	$< 10^{-11}$

Tabella 1: Metodo di Newton-Raphson (coincidente, per $f(x) = x^2 - 2$, con l'algoritmo di Erone). Prime 20 cifre decimali esatte: $\sqrt{2} = 1.41421356237309504 88...$

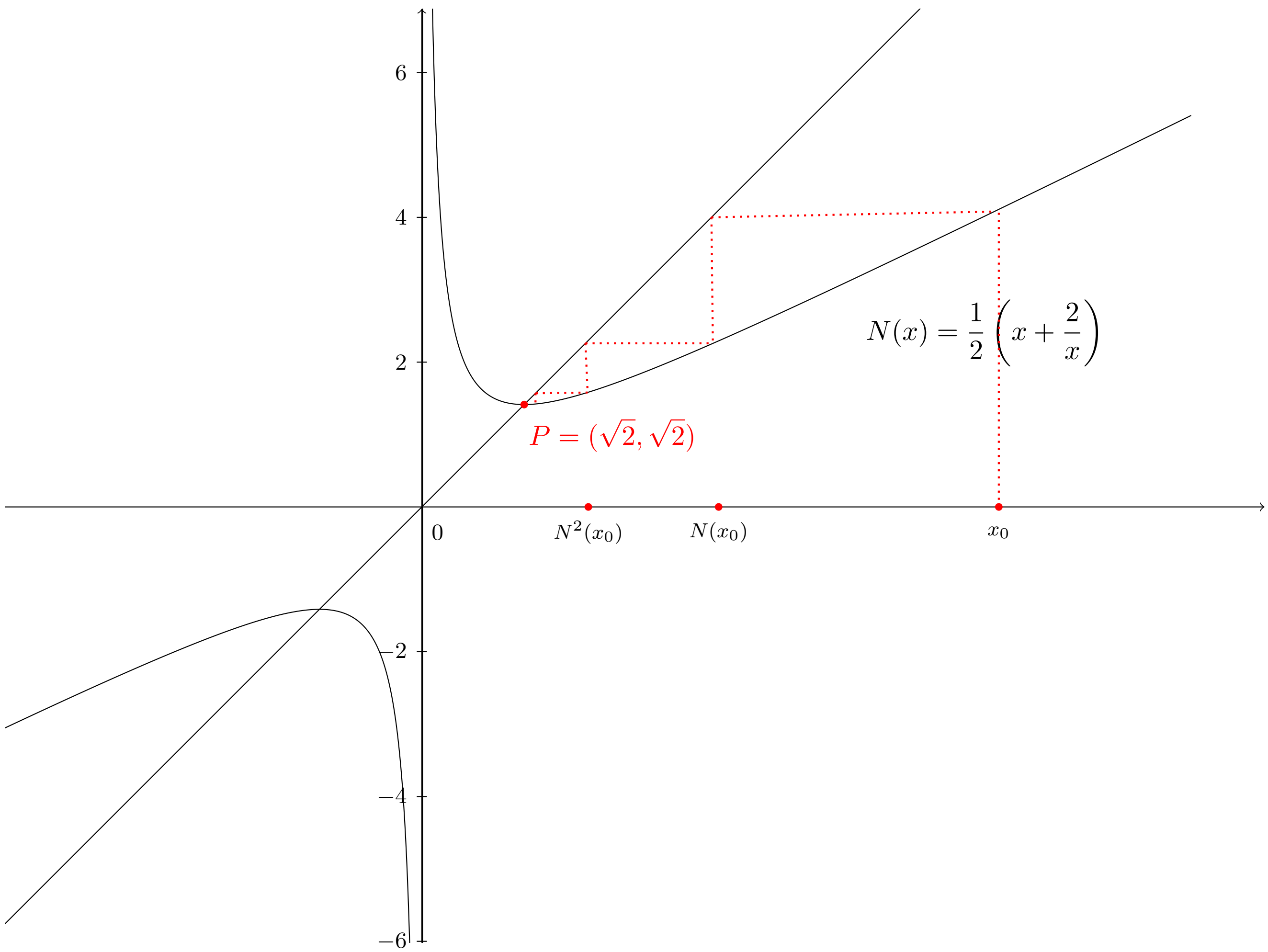


Figura 7: **Una visualizzazione del metodo di Newton per la funzione** $f(x) = x^2 - 2$**.** La figura mostra il grafico di $N(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$, la funzione di iterazione di Newton associata a $f(x) = x^2 - 2$. Si parte da un (qualunque) punto iniziale (una prima congettura) $x_0 > 0$ Si procede poi con l'iterazione: $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right) = N(x_n)$. Ad esempio: $N(x_0) = x_1$ e $N^2(x_0) = N((N(x_0))) = N(x_1) = x_2$ eccetera (Attenzione: Qui $N^n = N \circ \cdots \circ N$ denota la composizione (iterazione) di N con se stessa n volte (non l'elevamento a potenza). I punti fissi di N (le intersezioni di N con la retta $y = x$) sono due e coincidono con i due zeri $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ di f.

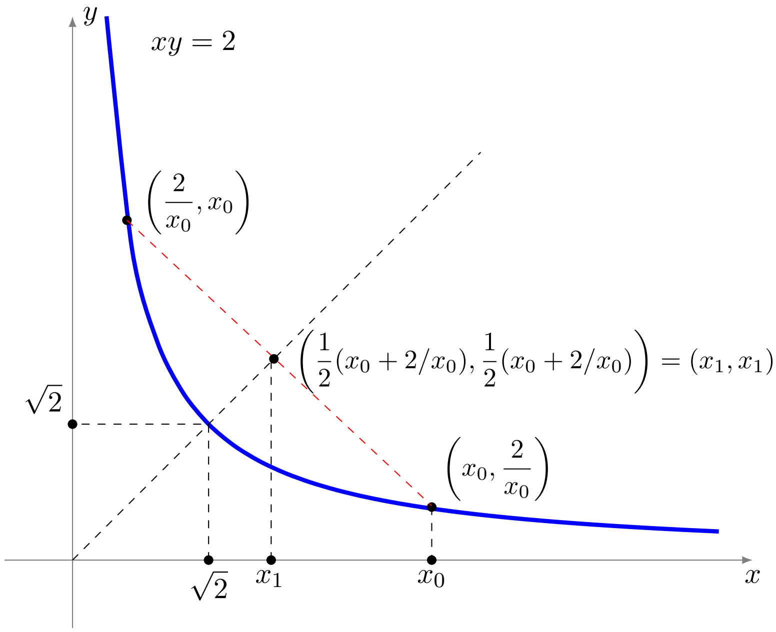


Figura 8

1.3.1 L'algoritmo di Erone

La formula iterativa

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \tag{1.33}$$

coincide con il procedimento per il calcolo della radice quadrata descritto dal matematico alessandrino Erone (I secolo d.C.; *Metrica*, Libro I). Riassumendo:

(1) si parte da un valore iniziale $x_0 > 0$. Questa "congettura iniziale" sarà scelta vicino al numero $\sqrt{2}$ (anche se, in realtà, la successione (1.33) converge a $\sqrt{2}$ per ogni valore iniziale $x_0 > 0$);

(2) si calcola: $z_0 = \dfrac{2}{x_0}$. Dal momento che $x_0 z_0 = 2$, se x_0 è un'approssimazione di $\sqrt{2}$ dall'alto, z_0 lo è dal basso, e viceversa. Quindi, *l'intervallo di estremi x_0, z_0 racchiude nel suo interno $\sqrt{2}$.*

(3) come nuova approssimazione, si prende la media aritmetica $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{2}{x_0}\right)$.

(4) Si itera.

Si noti che, qualunque sia il valore iniziale $x_0 > 0$, per ogni $n \geq 1$, valgono le disuguaglianze

$$\frac{2}{x_n} < \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \tag{1.34}$$

Le disuguaglianze (1.34) sono evidenti dalla Figura . È interessante notare che tali disuguaglianze non sono altro che le disuguaglianze tra la medie aritmetica M_a, la media geometrica M_g e la media armonica M_h di due numeri positivi a, b. Ricordiamo le definizioni di queste tre medie:

$$M_a = \frac{1}{2}(a+b) \tag{1.35}$$

$$M_g = \sqrt{ab} \tag{1.36}$$

$$M_h = \frac{2ab}{a+b} = \frac{M_g^2}{M_a} \tag{1.37}$$

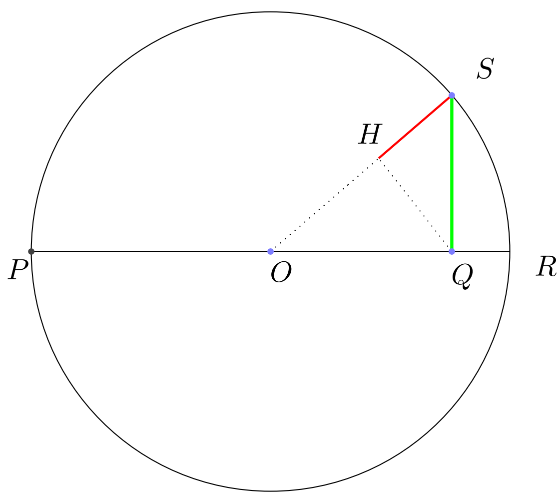
Valgono allora le disuguaglianze

$$M_a \geq M_g \geq M_h \tag{1.38}$$

con i segni di uguaglianza solo se $a = b$. Le (1.38) si dimostrano facilmente con passaggi algebrici [Esercizio]. Ma, nello spirito della matematica alessandrina, ne diamo due interpretazione gemetrica nelle Figure 9 e 10.

1.3.2 Disuguaglianze tra media aritmetica, geometrica e armonica.

Siano a e b le lunghezze dei segmenti PQ e QR (Figura 9). Costruiamo la circonferenza di diametro PR.



$PQ = a \quad QR = b$

$OS > QS > HS$

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

$M_a > M_g > M_h$

Figura 9: **Disuguaglianze tra media aritmetica, geometrica e armonica.**

Siano O il centro, S l'intersezione con la circonferenza della retta perprendicolare al diametro in Q, e H la proiezione ortogonale di Q su OS. Allora (denotando con gli stessi simboli i segmenti con le loro lunghezze)

(1) $OS = \frac{a+b}{2} = M_a$ (raggio);

(2) Per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo PRS, $SQ^2 = PQ \times QR = ab$, quindi $SQ = \sqrt{ab} = M_g$;

(3) Per il primo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo OQS, $SQ^2 = OS \times HS$. Poiché (per il punto (2)) $SQ^2 = ab$, e $OS = \frac{a+b}{2}$, si ha $ab = \frac{a+b}{2} \times HS$. Quindi, $HS = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = M_h$.

Pertanto, essendo ovviamente $OS > QS > HS$, ricaviamo

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b} \tag{1.39}$$

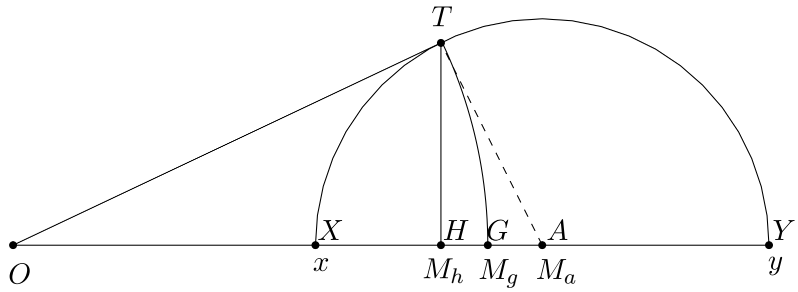


Figura 10: **Un'altra interpretazione geometrica delle disuguaglianze tra le medie aritmetiche, geometriche e armoniche:** $M_h < M_g < M_a$. OT è tangente in T alla circonferenza di centro A e diametro XY; H è la proiezione di T sul diametro e $\overline{OG} = \overline{OT}$. Se (fissata un'unità di misura) x e y sono le misure di OX e OY, allora le misure di OH, OG e OA sono, rispettivamente, la media armonica M_h, la media geometrica M_g e la media aritmetica M_a di x e y:

$$M_h < M_g < M_a$$

Infatti: (i) $\overline{OG}^2 = \overline{OT}^2 = xy$, quindi $\overline{OG} = \sqrt{xy} = M_g$; (ii) $M_a = (x+y)/2$; (iii) nel triangolo rettangolo OTA, $\overline{OT}^2 = \overline{OA}\,\overline{OH}$. Dunque $\overline{OH} = \overline{OT}^2/\overline{OA} = M_g^2/M_a = M_h$.

1.3.3 Dimostrazione diretta del fatto che la convergenza è quadratica

Sappiamo già (Teorema 1.1) che la convergenza nel metodo di Erone (vale a dire, nel metodo di Newton-Raphson nel caso di $f(x) = x^2 - 2$) è quadratica. Ne diamo ora una dimostrazione diretta, che non richiede la conoscenza della formula di Taylor. Fissato un punto iniziale $x_0 > \sqrt{2}$, consideriamo la successione definita dal metodo di Erone:

$$\begin{cases} x_0 > \sqrt{2} \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right) \end{cases} \tag{1.40}$$

Si ha

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \sqrt{2} \\ &= \frac{x_n^2 - 2\sqrt{2}x_n + 2}{2x_n} \\ &= \frac{(x_n - 2)^2}{2x_n} \\ &\leq \frac{(x_n - 2)^2}{2\sqrt{2}} && \text{(Perché } x_n > \sqrt{2}\text{)} \end{aligned}$$

(Abbiamo scritto $x_{n+1} - \sqrt{2}$ e non $|x_{n+1} - \sqrt{2}|$, perché $x_n > \sqrt{2}$ per ogni n.) In definitiva, abbiamo dimostrato esiste una costante $K > 0$ per la quale si ha, nel metodo di Erone per l'approssimazione di $\sqrt{2}$,

$$x_{n+1} - \sqrt{2} \leq K(x_n - \sqrt{2})^2 \qquad \text{(Convergenza quadratica)} \tag{1.41}$$

Vale a dire: l'errore assoluto a ogni passo è maggiorato da una costante moltiplicata per il *quadrato* dell'errore assoluto al passo precedente. Questo significa che, se l'errore $|x_n - \sqrt{2}|$ è minore di 1, gli errori successivi decrescono molto rapidamente. Grosso modo, anche se in modo non del tutto preciso, a ogni passo le cifre decimali corrette raddoppiano.

1.4 Secondo esempio: zeri di un polinomio

Approssimiamo le radici dell'equazione algebrica $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$. Si vede facilmente che la funzione polinomiale $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ ha uno zero (unico) x^*, che si trova nell'intervallo $(1, 2)$ (perché $f(1) < 0$, $f(2) > 0$ e f è strettamente crescente su $[1, 2]$).

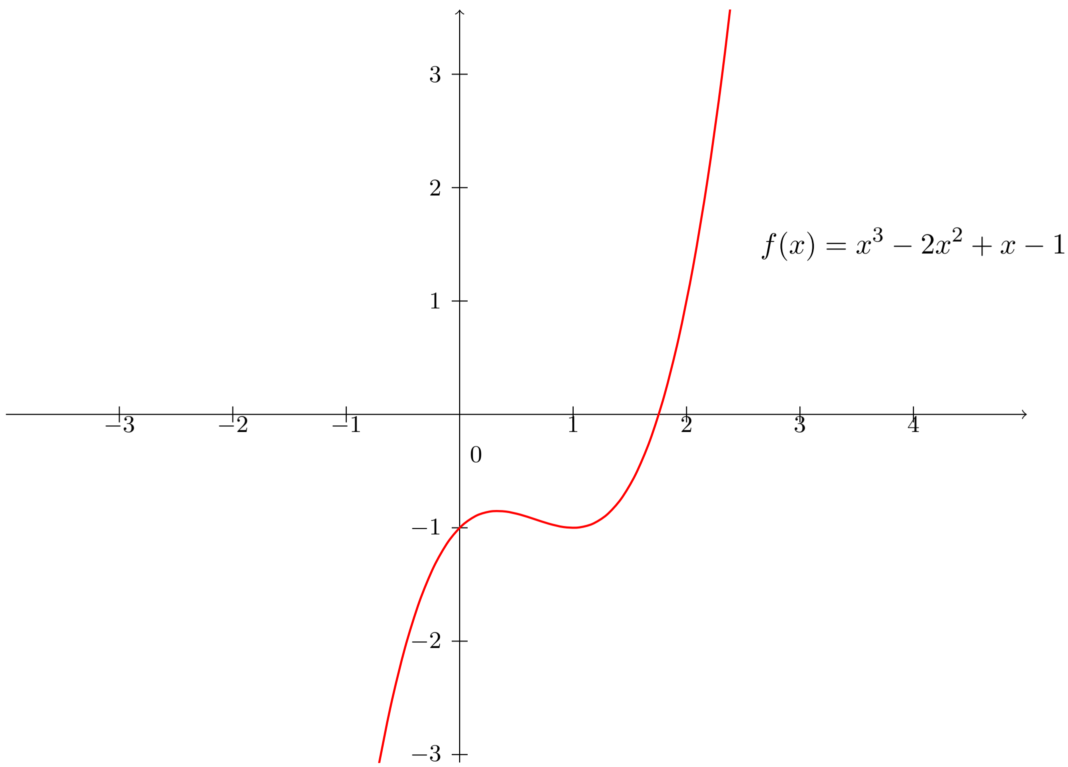


Figura 11

Possiamo usare il metodo di Newton restringendoci a un intervallo sufficientemente piccolo $[a, b]$ contenente x^* e prendendo, ad esempio, come punto iniziale l'estremo destro $x_0 = b = 2$. (Siamo nel caso della Figura 5(b)). La funzione di iterazione di Newton è

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$$

Quindi, siamo sicuri che la successione delle iterate

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_{n+1} &= N(x_n) = x_n - \dfrac{x_n^3 - 2x_n^2 + x_n - 1}{3x_n^2 - 4x + 1} \qquad n \geq 1 \end{cases} \tag{1.42}$$

è convergente, e converge a x^*. Facendo i conti, si ottiene (limitandoci alle prime 10 cifre decimali):

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= 1.8 \\
x_2 &= 1.7568181818 \\
x_3 &= 1.7548814744 \\
x_4 &= 1.7548776663 \\
x_5 &= 1.7548776662 \\
x_6 &= 1.7548776662 \\
\dots & \quad \dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Otteniamo dunque un valore approssimato $x^* = 1.7548776662$.

1.5 Terzo esempio: la funzione "passaggio al reciproco"

Calcoliamo con il metodo di Newton il reciproco $\dfrac{1}{\alpha}$ del numero $\alpha > 0$. Basta applicare l'algoritmo di Newton all'equazione $f(x) = \dfrac{1}{x} - \alpha$ (il cui unico zero è proprio $1/\alpha$). Poiché $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, si ottiene la successione ricorsiva:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - \alpha}{-\frac{1}{x_n^2}} = x_n(2 - \alpha x_n) \tag{1.43}$$

(È interessante osservare che, usando la (1.43), arriveremo a un valore approssimato del reciproco senza mai calcolare reciproci, ma solo mediante somme e prodotti.) Dove scegliere il valore iniziale x_0? Dalla Figura 12 si intuisce bene che se si sceglie x_0 in $\left(0, \dfrac{1}{\alpha}\right)$, la successione $x_{n+1} = x_n(2 - \alpha x_n)$ che si ottiene con il metodo delle tangenti converge a $\dfrac{1}{\alpha}$. Va bene anche scegliere x_0 un po' a destra dello zero $1/\alpha$, ma non troppo a destra. Infatti, deve essere $x_0 < b$, dove b è il punto in cui la tangente passa per l'origine. Utilizzando l'espressione generale (1.43), vediamo che ciò avviene per $b(2 - \alpha b) = 0$, cioè per $b = \dfrac{2}{\alpha}$. Quindi, il procedimento di Newton funziona se, e solo se, $x_0 \in \left(0, \dfrac{2}{\alpha}\right)$.

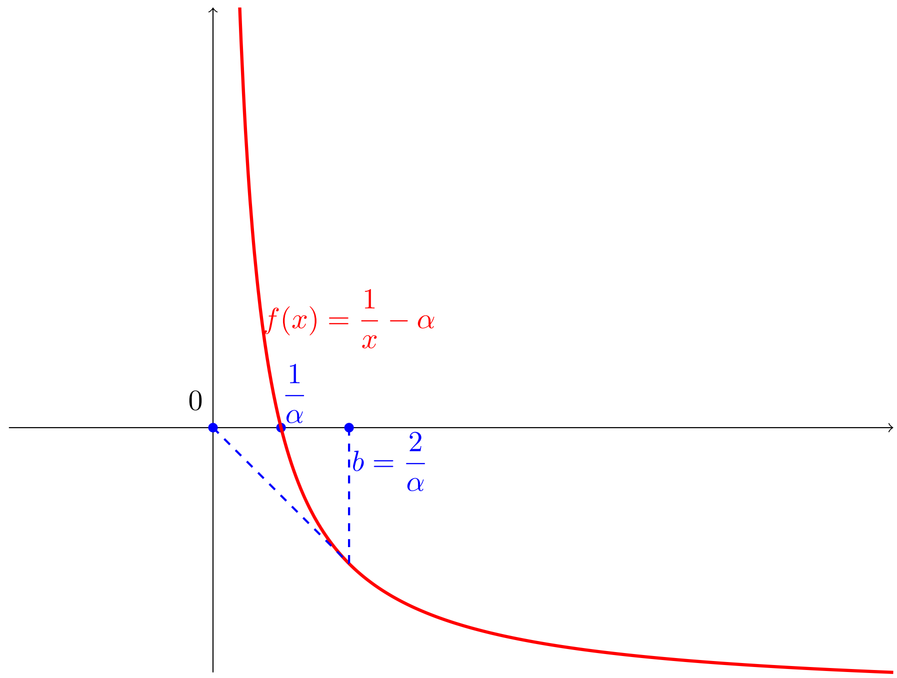


Figura 12: Procedimento di Newton-Raphson per la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x} - \alpha$ (il cui zero è il reciproco di α). Il procedimento di Newton funziona se, e solo se, $x_0 \in \left(0, \dfrac{2}{\alpha}\right)$.

1.6 Quando il metodo di Newton "non funziona": situazioni critiche.

Le situazioni descritte in questo paragrafo sono utili per comprendere meglio le ipotesi e la dimostrazione del teorema fondamentale 1.1. In altri termini, le ipotesi di tale teorema sono ipotesi di comodo (che si possono anche un po' indebolire), che sono state scelte in modo tale da evitare i casi critici che ora descriviamo.

1.6.1 Lo zero di f non esiste

Se non ci sono radici, il metodo fallisce, nel senso che non potrà mai convergere a una radice. Questa osservazione, per quanto banale possa essere, ci dice che dobbiamo essere sicuri (per esempio, sulla base di considerazioni teoriche, quali il teorema degli zeri delle funzioni continue) che la radice da approssimare effettivamente esista. La questione diventa meno banale se pensiamo che gli zeri della funzione (per esempio, un polinomio) si potrebbero cercare nel campo complesso. Un caso di questo tipo è dato della funzione $f(x) = x^2 + 1$ (nel campo reale).

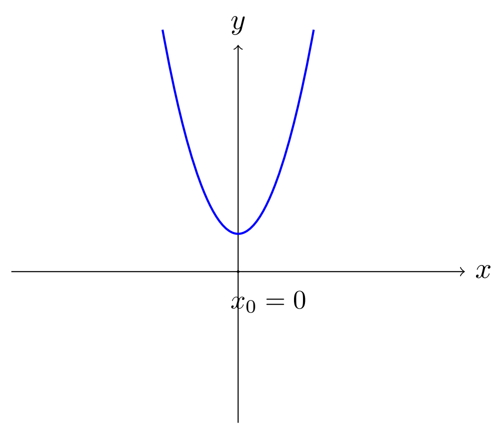


Figura 13: Grafico di $f(x) = x^2 + 1$. Se applichiamo l'algoritmo di Newton alla funzione $f(x) = x^2 + 1$, che non ha radici reali, il metodo fallisce. In questo caso è invece molto interessante studiare la dinamica complessa, cioè la dinamica del metodo di Newton nel campo complesso. (Come Arthur Cayley fece attorno al 1879, nel caso dei polinomi di secondo grado. Cayley suggerì anche di fare uno studio della convergenza del metodo di Newton nel campo complesso per l'equazione cubica $z^3 - 1 = 0$, arrendendosi però all'estrema difficoltà di questo caso. La questione tornò in auge soprattutto con l'uso della computer graphics.)

1.6.2 La derivata di f in un punto x_n si annulla

La funzione di iterazione N di Newton è data da

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Quindi il metodo non si può applicare se in uno dei punti x_n (il punto iniziale x_0 o un punto x_n successivo) la retta tangente al grafico di f è orizzontale, cioè $f'(x_n) = 0$. Questo succede, ad esempio, nel caso di $f(x) = x^3 + 1$, quando si scelga $x_0 = 0$.

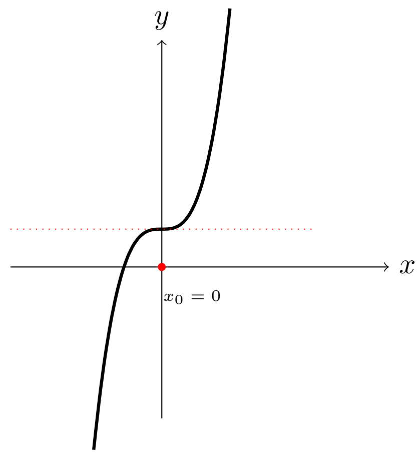
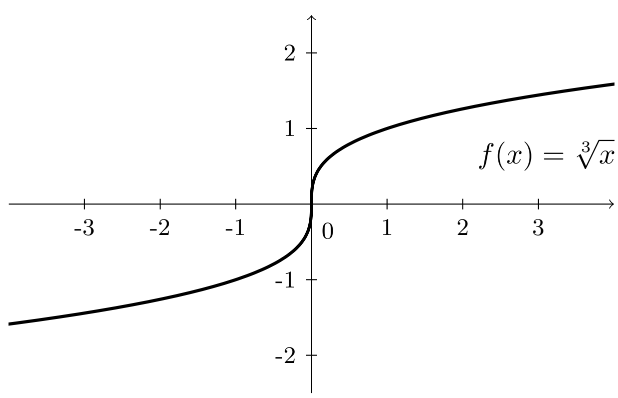


Figura 14: Grafico di $f(x) = x^3 + 1$. Il valore iniziale $x_0 = 0$ non è ammissibile per l'algoritmo di Newton, perché $f'(0) = 0$.

1.6.3 La funzione f non è derivabile nel punto in cui si annulla

Se la funzione f non è derivabile in x^*, la successione $N(x_n)$ può risultare non convergente, e quindi il metodo di Newton può fallire, come mostrano i due esempi seguenti.

Esempio. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} = (x)^{\frac{1}{3}}$, il cui unico zero è $x^* = 0$. Questa funzione è derivabile (con derivata non nulla) in ogni punto diverso da zero.



Scegliamo $x_0 = 1$. Per $n \geq 1$, avremo

$$N(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}(x_n)^{-\frac{2}{3}}} = -2x_n \qquad (1.44)$$

Quindi la successione assume i valori $1, -2, 4, -8, 16, -32, ...$, e non è convergente.

Esempio. La funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ è derivabile in ogni punto, tranne che nello zero di f. Qualunque sia il valore iniziale $x_0 \neq 0$, abbiamo $x_1 = -x_0$. Quindi avremo $x_2 = x_0$, $x_3 = -x_0$ eccetera. Quindi la successione x_n non converge: l'orbita di x_0 è un ciclo di ordine 2.

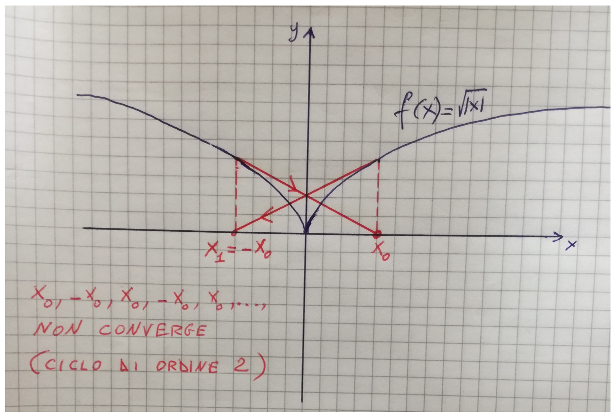


Figura 15

1.6.4 Cambio di convessità. Cattiva scelta dell'approssimazione iniziale.

Se in un intervallo contenente uno zero di f, la derivata seconda f'' cambia segno (e quindi f cambia la convessità), la successione delle iterate di Newton $N(x_n)$ può non convergere.

Ad esempio, consideriamo il polinomio $f(x) = x^3 - 5x$, le cui tre radici sono $-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}$. In un intorno dello zero $x^* = 0$ di f, la derivata seconda $f''(x) = 6x$ non ha segno costante. La funzione N di iterazione di Newton associata a f è

$$N(x) = x - \frac{x^3 - 5x}{3x^2 - 5} \tag{1.45}$$

Se si parte dal punto iniziale $x_0 = 1$, otteniamo (Figura 16)

$$N(1) = -1 \qquad\qquad N(-1) = 1 \tag{1.46}$$

Dunque, la successione di punti

$$x_0, N(x_0), N(N(x_0)), N(N(N(x_0))), ...$$

non è convergente. È il 2-ciclo di periodo 2:

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, ...$$

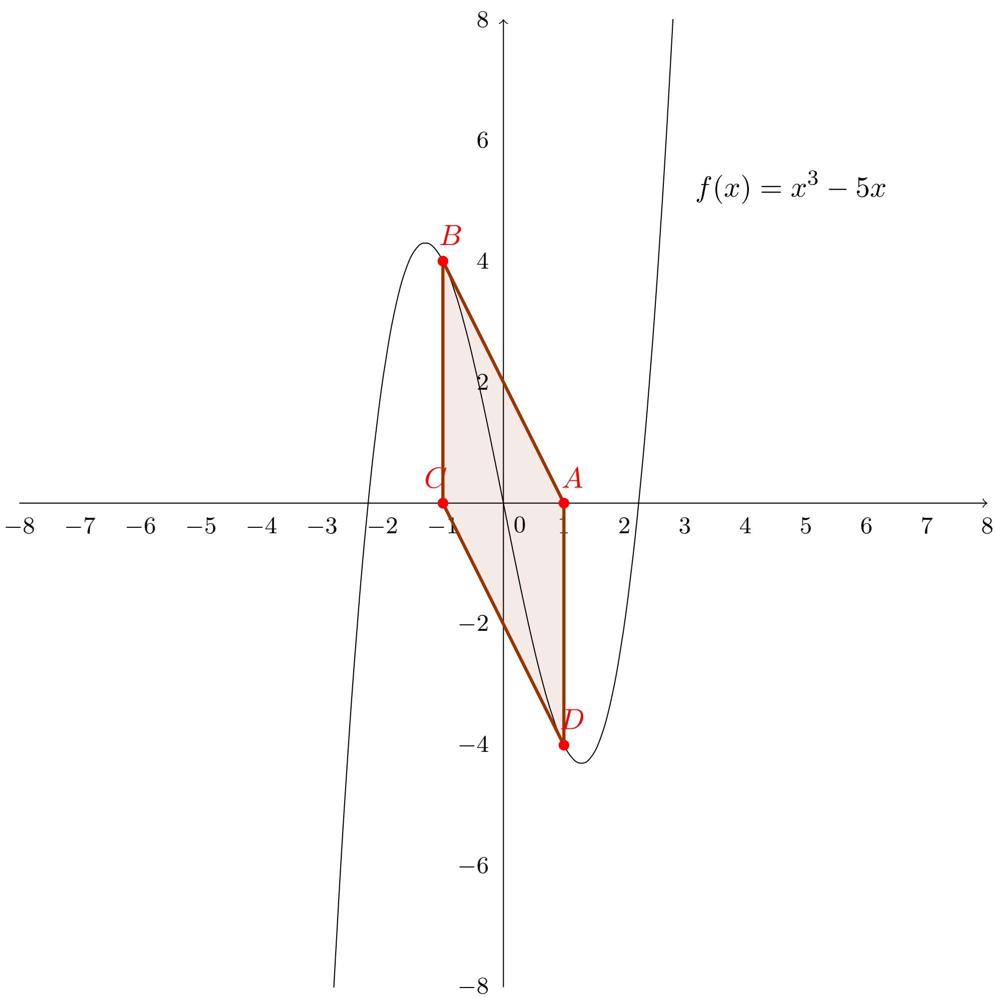


Figura 16: La dinamica di Newton può generare dei cicli. Per esempio, data la funzione $f(x) = x^3 - 5x$, la scelta di $x_0 = 1$ porta a un ciclo di ordine 2: $N(1) = -1, \quad N(-1) = 1$.

1.7 Zeri e punti fissi

1.7.1 Equivalenza tra ricerca di zeri e ricerca di punti fissi

Data una funzione $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $I = [a,b]$, si consideri l'equazione

$$f(x) = 0 \tag{1.47}$$

Sia ora $I \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$ una *qualunque funzione che non si annulli mai* in I:

$$\forall x \in I \qquad \psi(x) \neq 0 \tag{1.48}$$

Definiamo $I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ come:

$$\varphi(x) = x + f(x)\psi(x) \tag{1.49}$$

Vale allora il seguente fatto, semplicissimo ma concettualmente importante, in quanto identifica gli zeri di f con i punti fissi di φ.

Proposizione 1.2 *Un punto $x^* \in I$ è uno zero di f, cioè*

$$f(x^*) = 0 \tag{1.50}$$

se, e soltanto se, x^* è un punto fisso di φ, cioè

$$\varphi(x^*) = x^* \tag{1.51}$$

Dimostrazione Supponiamo che $f(x^*) = 0$. Allora

$$\varphi(x^*) = x^* + f(x^*)\psi(x^*) = x^* \tag{1.52}$$

e quindi x^* è un punto fisso di φ. Viceversa, se $\varphi(x^*) = x^*$, si ha

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \frac{\varphi(x^*) - x^*}{\psi(*)} && \text{Per la (1.49)} \\ &= 0 && \text{Perché } \varphi(x^*) - x^* = 0 \end{aligned}$$

Vista l'equivalenza tra zeri di f e punti fissi di φ,

Ogni teorema di esistenza di zeri di f equivale a un teorema di esistenza di punti fissi di φ.

Facciamo un esempio.

Si considerino i due enunciati:

Enunciato A. *Ogni funzione continua $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ che assume in a e in b valori di segno contrario, ammette almeno uno zero interno a I*

Enunciato B *Ogni funzione continua $[a,b] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$, tale che $a < \varphi(a)$ e $b > \varphi(b)$ (oppure, $a > \varphi(a)$ e $b < \varphi(b)$), ammette almeno un punto fisso interno a I.*

È facile dimostrare che, assumendo l'Enunciato A si dimostra Enunciato B, e viceversa. (Suggerimento: sfruttare il legame $\varphi(x) = x + f(x)$, che è del tipo (1.49) con $\psi = 1$.)

1.7.2 Ricerca di punti fissi e iterazioni

Per la ricerca dei punti fissi, vale un fatto semplice ma importante, che collega la ricerca dei punti fissi alle iterazioni. Anzitutto, partiamo da una funzione $I \xrightarrow{\varphi} I$, $I = [a, b]$, che abbia *dominio e codominio coincidenti*. In questo caso, si può *iterare* la funzione φ, cioè fare la composizione della funzione φ con se stessa k volte, per ogni intero $n \geq 0$. Scriveremo

$$\varphi^2 = \varphi \circ \varphi, \quad \varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi \quad \text{eccetera} \tag{1.53}$$

Si faccia attenzione al fatto che in (1.53) il simbolo φ^k designa la k-esima iterata, cioè la composizione di φ con se stessa k volte (e non il prodotto).

Fissiamo ora $x_0 \in I$ in modo arbitrario, e costruiamo la successione ricorsiva x_n, $n \in \mathbb{N}$, data da

$$x_0, \varphi(x_0), \varphi^2(x_0), ..., \varphi^n(x_0) \tag{1.54}$$

cioè, la successione definita, in modo ricorsivo, scegliendo $x_0 \in I$ e ponendo poi

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.55}$$

Proposizione 1.3 *Sia $I \xrightarrow{\varphi} I$ continua. Poniamo $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ e supponiamo che x_n converga a $x^* \in I$. Allora x^* è un punto fisso di φ:*

$$x_n \longrightarrow x^* \Longrightarrow \varphi(x^*) = x^* \tag{1.56}$$

Dimostrazione Poiché φ è continua, da $x_n \to x^*$ segue $x_{n+1} = \varphi(x_n) \to \varphi(x^*)$. Dunque, abbiamo che $x_n \to x^*$ e $x_{n+1} \to \varphi(x^*)$. Per l'unicità del limite, si ha allora $x^* = \varphi(x^*)$.

In definitiva:

Se il legame tra f e φ è del tipo (1.49) *il problema di trovare uno zero di f si riconduce a* ricercare condizioni su φ che assicurino la convergenza della successione delle iterate (1.55), almeno per certe scelte del valore iniziale x_0.

Ad esempio, nel metodo delle tangenti di Newton, allo scopo di calcolare uno zero x^* di f, si definisce la funzione di iterazione

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{1.57}$$

che è del tipo (1.49), con $\psi(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$. Fissato in modo opportuno il punto iniziale x_0, la successione ricorsiva $x_{n+1} = N(x_n)$ è convergente, e converge al punto fisso di N, che conicide con lo zero x^* di f.

1.8 Convergenza locale del metodo di Newton-Raphson-Fourier

Abbiamo visto (teorema 1.1) che, dato un intervallo $I = [a, b]$ che contenga uno zero x^* di f, sotto opportune ipotesi e con una buona scelta dell'approsimazione iniziale x_0, la successione $N(x_n)$ delle iterate converge allo zero x^*. Ora vediamo invece un risultato *locale*, che assicura che (sotto opportune condizioni) esiste un intorno $I^* = (x^* - \delta, x^* + \delta)$ tale che, *comunque si scelga* $x_0 \in I^*$, tutti termini della successione $N(x_n)$ appartengono a I^* (quindi, l'iterazione di N è possibile) e la successione $x_{n+1} = N(x_n)$ converge a x^*.

Teorema 1.4 (Convergenza locale del metodo di Newton-Raphson-Fourier) *Poniamo* $I = [a, b]$ *e sia* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione soddisfacente le seguenti ipotesi:*

(i) f *è due volte differenziabile su* I*;*

(ii) $f(a)f(b) < 0$*;*

(iii) esistono due costanti $m, M > 0$ *per le quali:*

$$\forall x \in I \qquad |f'(x)| \geq m > 0, \qquad |f''(x)| \leq M \tag{1.58}$$

Allora valgono i fatti seguenti:

1. *Esiste un punto, e uno solo,* $x^* \in (a, b)$ *tale che* $f(x^*) = 0$.

2. *Esiste un sottointervallo* $I^* \subset I$ *contenente* x^* *tale che, comunque si fissi* $x_0 \in I^*$*, tutti i termini della successione*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1.59}$$

apartengono a I^* *e la successione* (x_n) *converge a* x^*.

3. *(Convergenza quadratica) Posto* $K = \dfrac{M}{2m}$*, si ha, per ogni* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq K\,|x_n - x^*|^2 \tag{1.60}$$

Cioè, l'errore al passo $(n+1)$*-esimo è maggiorato dal prodotto della costante* K *per il quadrato dell'errore commesso al passo* n*-esimo.*

Dimostrazione (1). Poiché $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni opposti, per il teorema degli zeri esiste almeno un $x^* \in (a, b)$ per il quale $f(x^*) = 0$. E non esistono altri zeri y^* di f in $[a, b]$, perché altrimenti, per il teorema di Rolle, si avrebbe $f'(z) = 0$ per qualche z tra x^* e y^*, contro l'ipotesi $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$. (Altra dimostrazione dell'unicità dello zero di f: la condizione $|f'(x)| > 0$ implica che f sia strettamente monotòna sull'intervallo I, e quindi iniettiva. Pertanto, f non può avere due zeri distinti).

(2) e (3). Ora dimostriamo che, se δ è un numero positivo sufficientemente piccolo, l'intervallo $I^* = (x^* - \delta, x^* + \delta)$ soddisfa la tesi *2* del teorema, cioè, tutti i numeri $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ appartengono a I^* e $(x_n) \to x^*$ per $n \to +\infty$.

Prendiamo un punto arbitrario $x' \in I$ e chiamiamo x'' il punto in cui x' viene mandato dall'algoritmo di Newton:

$$x'' = x' - \frac{f(x')}{f'(x')} \tag{1.61}$$

Allo scopo di valutare il secondo membro di (1.61), scriviamo la formula di Taylor di f, con il resto di Lagrange, relativa all'intervallo di estremi x' e x^*:

$$0 = f(x^*) = f(x') + f'(x')(x^* - x') + \frac{1}{2}f''(c)(x^* - x')^2 \tag{1.62}$$

per un opportuno c tra x' e x^*. Dalla (1.62) ricaviamo

$$-f(x') = f'(x')(x^* - x') + \frac{1}{2}f''(c)(x^* - x')^2 \tag{1.63}$$

Dunque,

$$\begin{aligned}
x'' - x^* &= x' - \frac{f(x')}{f'(x')} - x^* \\
&= x' - x^* + \frac{f'(x')(x^* - x') + \frac{1}{2}f''(c)(x^* - x')^2}{f'(x')} \\
&= \frac{f'(x')(x' - x^*) + f'(x')(x^* - x') + \frac{1}{2}f''(c)(x^* - x')^2}{f'(x')} \\
&= \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x')}(x' - x^*)^2
\end{aligned}$$

Poiché, per l'ipotesi (1.58), $|f'(x)| \geq m > 0$ e $|f''(x)| \leq M$ per ogni $x \in I$, posto $K = \dfrac{M}{2m}$, si ha:

$$|x'' - x^*| \leq \frac{1}{2}\frac{|f''(c)|}{|f'(x')|}|x' - x^*|^2 \leq K|x' - x^*|^2 \tag{1.64}$$

Scegliamo ora un $\delta > 0$ in modo tale che si abbia $\delta < 1/K$ e che l'intervallo $I^* = (x^* - \delta, x^* + \delta)$ sia incluso in I. Se $x_n \in I^*$, allora $|x_n - x^*| < \delta$. Allora, da (1.64) segue che

$$|x_{n+1} - x^*| \leq K|x_n - x^*|^2 \leq \underbrace{K|x_n - x^*|}_{<1}|x_n - x^*| < |x_n - x^*| \tag{1.65}$$

La (1.65) dice che la distanza di un termine x_{n+1} da x^* è minore della distanza del precedente termine x_n da x^*. Quindi, se si parte da un qualunque x_0 in $I^\star = (x^* - \delta, x^* + \delta)$, tutti i successivi x_n definiti dal metodo di Newton, appartengono anch'essi a I^*. Usando successivamente la (1.65) otteniamo

$$|x_1 - x^*| \leq K\delta|x_0 - x^*|, \qquad |x_2 - x^*| \leq (K\delta)|x_1 - x^*| \leq (K\delta)^2|x_0 - x^*| \tag{1.66}$$

e più in generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - x^*| \leq (K\delta)^n|x_0 - x^*| \tag{1.67}$$

Siccome $K\delta < 1$, la successione $(K\delta)^n$ tende a zero.. Quindi la disuguaglianza (1.67) dimostra che x_n converge a x^*. Inoltre, la (1.64) dimostra che, per ogni scelta del punto iniziale $x_0 \in I^*$, si ha

$$|x_{n+1} - x^*| \leq K\,|x_n - x^*|^2 \tag{1.68}$$

cioè, la convergenza di (x_n) a x^* è quadratica. □

2 Bibliografia

Riferimenti bibliografici

[1] R. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*, Perseus Book Publishing 1992. Second Edition, CRC Press, 2020.

[2] R. Devaney, *Mastering Differential Equations: The Visual Method*, The Great Courses, 2011.

[3] R. Palais e B. Palais, *The Magic of Iteration*, *Appendix B* di *Differential Equations, Mechanics and Computation*, AMS, 2009.

http://vmm.math.uci.edu/ODEandCM/

[4] P. D. Straffin Jr., *Newton's Method and Fractal Patterns*, COMAP, 1991. (Reperibile online).

[5] G. Strang, *Calculus*, MIT Open Courseware, (Capitolo 3.7).

https://mitocw.ups.edu.ec/resources/res-18-001-calculus-online-textbook-spring-2005/textbook/

[6] N. Ya. Vilenkin, *Methods of Successive Approximations,* Mir Publishers, Moscow, 1979.

https://archive.org/search.php?query=little+mathematics+library+mir&sin=&sin=