Politecnico di Milano
Corso di Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria
federico.lastaria@polimi.it

Introduzione alle equazioni differenziali

23 Novembre 2017

Indice

1 Equazioni a variabili separabili

Si chiamano *equazioni a variabili separabili* (o *equazioni separabili*) le equazioni differenziali del tipo

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) \tag{1.1}$$

oppure, con una notazione equivalente,

$$y'(x) = g(x)\,h(y) \tag{1.2}$$

A secondo membro figura il prodotto di una funzione della sola x e di una funzione della sola y. Più precisamente, $g = g(x)$ $(x \in I)$ e $h = h(y)$ $(y \in J)$ sono due funzioni continue assegnate, i cui domini sono rispettivamente un intervallo I e un intervallo J. Ad esempio, l'equazione $y' = x(y-1)$ è a variabili separabili ($g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; $h(y) = y-1$, $y \in \mathbb{R}$). Anche $y' = y^2$ è a variabili separabili (con $g(x) = 1$ e $h(y) = y^2$). Invece, $y' = y^2 + \sin x$ non è a variabili separabili.

1.1 Soluzione delle equazioni a variabili separabili

Data l'equazione separabile $y' = g(x)h(y)$, sia $Z(h)$ l'insieme degli zeri di h, cioè dei numeri in cui la funzione $h = h(y)$ si annulla:

$$Z(h) = \{z \in \mathbb{R} \mid h(z) = 0\}$$

Per ogni numero $z^* \in Z(f)$ la funzione costante $y(x) = z^*$ è ovviamente soluzione dell'equazione (1.1) (perché la derivata della funzione costante $y(x) = z^*$ è nulla e quindi soddisfa (1.1)). Quindi, a ogni soluzione z^* dell'equazione $h(y) = 0$ (se ne esistono) corrisponde la soluzione costante $y(x) = z^*$ dell'equazione (1.1). Queste soluzioni costanti si chiamano *soluzioni di equilibrio*. Cerchiamo ora le altre soluzioni.

Supponiamo allora che una funzione $y = y(x)$ sia una soluzione dell'equazione (1.1) e che $h(y)$ non sia identicamente nulla. Allora (per continuità) esiste tutto un intervallo, diciamo J, sul quale la funzione $h(y)$ non si annulla mai. Possiamo allora scrivere l'equazione $y' = g(x)h(y)$, sull'intervallo J, come

$$\frac{1}{h(y)}y' = g(x) \tag{1.3}$$

Sia $H(y)$ una antiderivata (una primitiva) di $\frac{1}{h(y)}$:

$$H'(y) = \frac{1}{h(y)} \tag{1.4}$$

Allora, per la regola di derivazione di una funzione composta, si ha:

$$\frac{d}{dx}H(y(x)) = H'(y)y' = \frac{1}{h(y)}g(x)h(y) = g(x) \tag{1.5}$$

Dunque, $H(y(x))$ è una primitiva di $g(x)$. Pertanto, se $G(x)$ è una qualunque altra primitiva di $g(x)$, si avrà

$$H(y(x)) = G(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

Siccome sull'intervallo J la derivata $H'(y) = \frac{1}{h(y)}$ non si annulla mai, la funzione H è invertibile su J. Detta H^{-1} la sua inversa, dalla (1.6) segue

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C), \qquad C \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

In questo modo si trova (almeno in linea teorica) la soluzione $y(x)$. La formula (1.7) è però in generale soltanto teorica, perché sarà spesso difficile, o impossibile, trovare H^{-1} e ricavare esplicitamente la funzione y dall'uguaglianza (1.6). In ogni caso, la formula (1.6) fornisce le soluzioni in *forma implicita*.

1.2 Tecnica di Leibniz per risolvere le equazioni separabili

Un metodo pratico per trovare le soluzioni di un'equazione a variabili separabili

$$y' = g(x)h(y) \tag{1.8}$$

consiste nella seguente tecnica formale, dovuta a Leibniz (1691), mediante la quale si sintetizzano le argomentazioni svolte nel paragrafo precedente.

Anzitutto, troviamo le soluzioni di equilibrio, cioè le soluzioni costanti $y(x) = z^*$, dove $z^* \in \mathbb{R}$ è un numero per il quale $h(z^*) = 0$. Poi scriviamo $\frac{dy}{dx}$ (notazione di Leibniz) al posto di y':

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{1.9}$$

e separiamo formalmente le variabili:

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx \tag{1.10}$$

Qui ci stiamo tacitamente restringendo a un intervallo in cui $h(y)$ non si annulli mai. Ora integriamo formalmente entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx \tag{1.11}$$

Se $H(y)$ è una antiderivata di $1/h(y)$ e $G = G(x)$ è un'antiderivata di $g(x)$, avremo da (1.11)

$$H(y) = G(x) + C \tag{1.12}$$

Siamo arrivati in questo modo alla soluzione in forma implicita, che coincide con la (1.6). A questo punto ricaviamo la funzione y, se possibile. Altrimenti, lasciamo la soluzione in forma implicita.

1.3 Esistenza e unicità locale di soluzioni del problema di Cauchy per equazione a variabili separabili

Valgono i seguenti due teoremi, che ci limitiamo a enunciare. Per comprendere gli enunciati, si ricordi che una funzione f, definita su un intervallo I, si dice di classe C^0 se è continua in I, e di classe C^1 se è derivabile in I, con derivata continua.

Teorema 1.1. (**Esistenza e unicità locale della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione a variabili separabili**) *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = g(x)h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Se la funzione $g(x)$ è di classe $C^0(I)$ e la funzione $h(y)$ è di classe $C^1(J)$ (I, J intervalli), allora, qualunque sia la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ (con $x_0 \in I$), il problema di Cauchy (1.13) ha una e una sola soluzione, definita su un intervallo massimale $\tilde{I}$ che contiene x_0. Questo intervallo massimale $\tilde{I}$ è incluso in I, e in generale è più piccolo di I.

Si possono indebolire le ipotesi del teorema. Infatti, è sufficiente richiedere che la funzione $g(y)$ abbia rapporto incrementale limitato. (Si veda il paragrafo 3.1).

Questo teorema si chiama di esistenza e unicità *locale*, perché la soluzione è definita, a priori, soltanto su un opportuno intorno connesso (intervallo) contenente x_0.

Vale anche il seguente teorema (caso particolare di un teorema generale di Peano) che garantisce l'esistenza, ma non l'unicità, di soluzioni del problema di Cauchy 1.13. In tale problema i *dati* sono le due funzioni $g(x)$ e $h(y)$, oltre alla condizione iniziale $y(x_0) = y_0$.

Teorema 1.2 (Esistenza di soluzioni del problema di Cauchy)**.** *La continuità delle funzioni date $g(x)$ e $h(y)$ garantisce l'*esistenza *di soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' & = & g(x)h(y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases} \tag{1.14}$$

qualunque sia la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Però, in generale, non ne garantisce l'unicità.

Vedremo degli esempi nel paragrafo 1.5.

1.4 Esempio sul carattere locale delle soluzioni

Il teorema di esistenza e unicità 1.1 garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy soltanto su un *intervallo massimale* attorno al punto x_0 (senza stabilire, a priori, quale sia questo intervallo).

Esempio 1.3 (Modello di una 'esplosione')**.** *Studiamo il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1.15}$$

L'equazione $y' = y^2$ è a variabili separabili. Infatti è del tipo $y' = g(x)h(y)$, dove g è la funzione costante $g(x) = 1$ per ogni x, e $h(y) = y^2$. Poiché g è di classe $C^0(\mathbb{R})$ e h è di classe $C^1(\mathbb{R})$, le ipotesi del teorema 1.1 di esistenza e unicità locale sono soddisfatte, e quindi il problema di Cauchy (1.22) ha una e una sola soluzione $y(x)$. Poiché questa funzione $y(x)$ è continua (perché derivabile) e nel punto $x_0 = 0$ assume il valore positivo 1, deve mantenersi positiva (quindi, mai nulla) in tutto un intorno di $x_0 = 0$. Allora possiamo senz'altro dividere per y^2 (tecnica delle equazioni a variabili separabili). Otteniamo:

$$\frac{y'}{y^2} = 1$$

ossia

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

Integrando, abbiamo

$$-\frac{1}{y} = x + c$$

dove c è una costante arbitraria. La richiesta $y(0) = 1$ permette di determinare la costante c. Infatti, ponendo $x = 0$, si ha

$$-\frac{1}{y(0)} = 0 + c, \tag{1.16}$$

da cui ricaviamo $-1 = c$. Dunque, otteniamo la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{1-x} \tag{1.17}$$

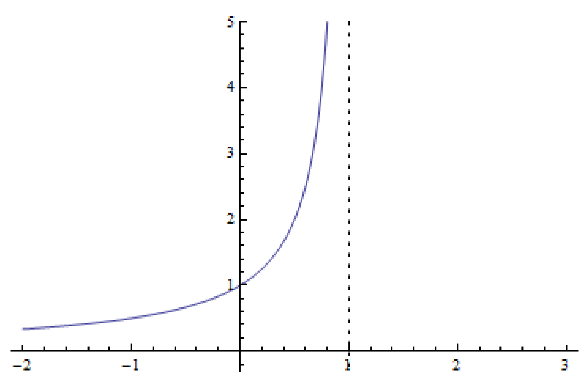


Figura 1: Grafico di $y(x) = \dfrac{1}{1-x}$, soluzione del problema ai valori iniziali $y' = y^2$, $y(0) = 1$. L'intervallo massimale su cui è definita tale soluzione è $(-\infty, 1)$.

A questo punto, dopo aver risolto il problema di Cauchy in modo esplicito, vediamo che *il più grande intervallo contenente* $x_0 = 0$ *sul quale può essere estesa la soluzione* $y(x)$, osia *l'intervallo massimale* della soluzione del problema di Cauchy, è l'intervallo $(-\infty, 1)$. Intuitivamente, quello che succede in questo esempio è che la funzione $y' = y^2$ – che assegna la pendenza in ogni punto (x, y) – cresce in modo talmente rapido che la soluzione $y(x)$ ha un asintoto verticale. In altri termini, la soluzione $y(x)$ 'diventa infinita in un tempo finito' cioè diventa infinita quando x si avvicina a 1.

1.5 Esempio di non unicità di soluzioni

Il teorema di esistenza 1.1 afferma che un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = g(x)h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.18}$$

in cui g e h sono di classe C^0 ma h non è di classe C^1, ha sempre soluzioni, ma non è più garantita l'unicità della soluzione. Vediamo due esempi.

Esempio 1.4. *Studiamo il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = y^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

Ovviamente, la funzione costante $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, è soluzione del nostro problema di Cauchy.

Ma il nostro problema di Cauchy ha infinite altre soluzioni. Infatti si vede con un calcolo diretto che, per ogni fissato $x_0 > 0$, la funzione

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x_0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}(x - x_0)^{\frac{3}{2}} & \text{se } x > x_0 \end{cases} \tag{1.20}$$

e anche la funzione

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x_0 \\ -\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}(x - x_0)^{\frac{3}{2}} & \text{se } x > x_0 \end{cases} \tag{1.21}$$

sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy.

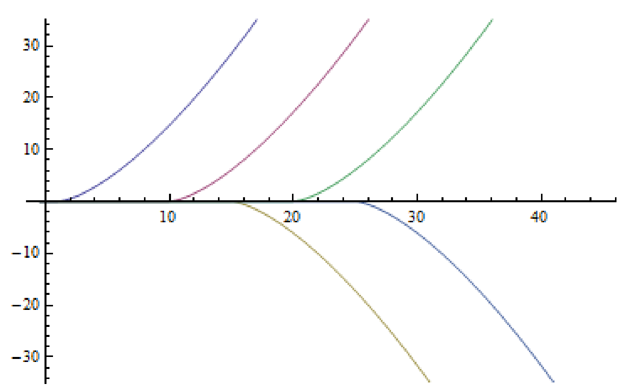


Figura 2: Alcune delle infinite soluzioni del tipo 1.20 e 1.21 (a 'spina di pesce') dello stesso problema di Cauchy.

Si noti che nel caso dell'equazione che stiamo trattando, non c'è unicità nel futuro, ma c'è unicità nel passato (cioè, fissato un punto, c'è un unico modo di 'tornare indietro' a $-\infty$ lungo una curva integrale), come si vede bene dalla Figura 2.

Un altro esempio simile è il seguente.

Esempio 1.5. *Studiamo il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

La funzione $\sqrt{x}$ è continua, ma non è derivabile in 0. Si verifica facilmente, con un calcolo diretto, che per ogni $T > 0$, la funzione {equation x(t)= $\begin{matrix} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{4}(t-T)^2 & t \geq T \end{matrix}$ è soluzione del problema di Cauchy (1.22). (Infatti, per ogni $t \geq T$, la funzione $x(t)$ è derivabile e $x'(t) = \frac{1}{2}(t-T)$, e la sua radice quadrata è $\sqrt{x(t)} = \sqrt{\frac{1}{4}(t-T)^2} = \frac{1}{2}(t-T)$. Dunque vale $x' = \sqrt{x}$. Inoltre, vale la condizione iniziale $x(0) = 0$). Dunque il problema di Cauchy ha infinite soluzioni.

1.6 Altri esempi di equazioni a variabili separabili

Esempio 1.6. *Trovare tutte le soluzioni dell'equazione a variabili separabili*

$$y' = \alpha y, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{1.23}$$

Soluzione. Anzitutto, abbiamo la soluzione costante identicamente nulla: $y(x) = 0$ per ogni x. Troviamo ora le altre soluzioni. Sia $y(x)$ una funzione che sia soluzione di (1.23) e che si mantenga sempre diversa da zero su un intervallo J. Allora, per $x \in J$,

$$\frac{y'}{y} = \alpha, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{dy}{y} = \alpha\, dx \tag{1.24}$$

Integrando,

$$\int \frac{dy}{y} = \int \alpha\, dx \qquad \text{da cui segue} \qquad \ln|y| = \alpha x + c \tag{1.25}$$

Allora

$$e^{\ln|y|} = e^{\alpha x + c}, \tag{1.26}$$

ossia

$$|y| = e^c e^{\alpha x} \qquad \text{ossia} \qquad y = \pm e^c e^{\alpha x} = K e^{\alpha x} \tag{1.27}$$

dove K è una qualunque costante non nulla. Ora notiamo che la soluzione di equilibrio (cioè costante) $y = 0$ si ottiene dall'espressione $Ke^{\alpha x}$ per $K = 0$. Possiamo allora concludere che la soluzione generale (cioè l'insieme di tutte le soluzioni) dell'equazione (1.23) è data da

$$y(x) = K e^{\alpha x}, \qquad K \in \mathbb{R} \tag{1.28}$$

(Si noti che, in questo caso, tutte le soluzioni $Ke^{\alpha x}$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$.)

Esempio 1.7. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1.29}$$

Soluzione. L'equazione è a variabili separabili, perché è del tipo $y' = g(x)h(y)$, dove $g(x) = -x$, $h(y) = 1/y$. Usiamo la tecnica di risoluzione di Leibniz. Separiamo le variabili:

$$y\,dy = -x\,dx$$

(Si noti che l'equazione $y\,dy = -x\,dx$ alla quale siamo pervenuti è in realtà più generale dell'equazione (1.29), in quanto ha senso anche quando $y = 0$). Integrando, otteniamo

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

da cui $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$, dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria, ossia

$$y^2 = -x^2 + C \qquad (C \text{ costante})$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$, abbiamo $1 = 0 + C$, ossia $C = 1$:

$$y^2 = -x^2 + 1$$

Non abbiamo ancora trovato in modo esplicito l'espressione della soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy (1.29). A priori, da $y^2 = -x^2 + 1$ segue $y = \sqrt{1 - x^2}$ oppure $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Poiché noi vogliamo $y(0) = 1$, dobbiamo scegliere il segno positivo; otteniamo così la soluzione:

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Si osservi che l'intervallo massimale sul quale questa soluzione è definita è $(-1, 1)$.

Esempio 1.8. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = x^2y^3 \\ y(1) = 3 \end{cases} \tag{1.30}$$

Soluzione. Separando le variabili, otteniamo

$$\frac{dy}{y^3} = x^2\,dx$$

Allora $\int \frac{dy}{y^3} = \int x^2\,dx$, e quindi

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{3}x^3 + C \tag{1.31}$$

La condizione $y(1) = 3$ dà $-1/18 = 1/3 + C$, da cui $C = -7/18$. Sostituendo questo valore di C nell'equazione (1.32), otteniamo la soluzione

$$y(x) = \frac{3}{\sqrt{7 - 6x^3}} \tag{1.32}$$

Si noti che la condizione $y(1) = 3$ impone la scelta del segno $+$ davanti alla radice. L'intervallo massimale sul quale è definita la soluzione (1.32) del problema di Cauchy (1.30) è il più grande intervallo sul quale il radicando $7 - 6x^3$ è positivo, cioè $\left(-\infty, \sqrt[3]{7/6}\right)$.

Esempio 1.9. *Trovare le soluzioni dell'equazione a variabili separabili*

$$y' = y(1-y) \tag{1.33}$$

Soluzione. Le due soluzioni di equilibrio sono le funzioni costanti $y_1(x) = 0$ e $y_2(x) = 1$.

Scriviamo ora $y' = dy/dx$ e usiamo la tecnica di separazione delle variabili:

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y), \qquad \frac{dy}{y(y-1)} = dx \tag{1.34}$$

Quindi

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx \tag{1.35}$$

Da $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$ segue (omettendo la costante arbitraria)

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \ln|y| - \ln|1-y| = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| \tag{1.36}$$

Da (1.35) segue allora

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + C \tag{1.37}$$

e, applicando la funzione esponenziale,

$$\left|\frac{y}{1-y}\right| = e^{x+C} = ke^x \tag{1.38}$$

dove $k = e^C$ è una costante positiva arbitraria. Dunque

$$\frac{y}{1-y} = \pm ke^x = Ke^x \tag{1.39}$$

dove K è una costante arbitraria non nulla. Esplicitando y in funzione di x abbiamo

$$y(x) = \frac{Ke^x}{1+Ke^x} \tag{1.40}$$

Si noti che la soluzione di equilibrio $y_1(x) = 0$ si ottiene da (1.40) ponendo $K = 0$. Invece, l'altra soluzione di equilibrio $y_2(x) = 1$ si può pensare ottenuta formalmente da (1.40) facendo tendere K a $+\infty$.

2 Equazioni lineari del primo ordine

Una *equazione differenziale lineare del primo ordine* è un'equazione del tipo

$$y' + a(x)\, y = f(x) \tag{2.1}$$

dove $a(x)$ e $f(x)$ sono due funzioni definite e continue su uno stesso intervallo I di $\mathbb{R}$. Se la funzione $f(x)$ non è identicamente nulla, l'equazione lineare (2.19) si dice *non omogenea*. Invece, un'equazione lineare del tipo

$$y' + a(x)\, y = 0 \tag{2.2}$$

si dice *omogenea*.

Il motivo per il quale una tale equazione si dice lineare è il seguente. Fissata una funzione $a = a(x)$ in $C(I)$, chiamiamo D l'operatore differenziale che trasforma una funzione y nella funzione

$$Dy = y' + a(x)\, y \tag{2.3}$$

(Poiché l'operatore D dipende dalla funzione $a = a(x)$, una notazione più corretta per denotare D sarebbe D_a. Scriveremo comunque D per semplicità.) Possiamo pensare che il dominio di D sia lo spazio vettoriale $C^1(I)$ e che il suo codominio sia lo spazio vettoriale $C^0(I)$. Allora si vede subito che D è un operatore *lineare*, cioè soddisfa le due proprietà seguenti:

$$D(y_1 + y_2) = Dy_1 + Dy_2 \tag{2.4}$$
$$D(\lambda y) = \lambda D y \tag{2.5}$$

per ogni $y, y_1, y_2 \in C^1(I)$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Con la notazione operatoriale, l'equazione lineare (2.1) si scrive in modo più semplice come:

$$Dy = f(x) \tag{2.6}$$

2.1 Struttura dello spazio delle soluzioni e interpretazione geometrica

Consideriamo le due equazioni:

$$y' + a(x)\, y = f(x) \qquad \text{Equazione lineare non-omogenea} \tag{2.7}$$
$$y' + a(x)\, y = 0 \qquad \text{Equazione lineare omogenea associata} \tag{2.8}$$

Teorema 2.1 (Struttura dello spazio delle soluzioni)**.** *Sia y_p una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (2.7). Allora:*

(a) Ogni soluzione y di (2.7) si scrive come $y = y_0 + y_p$, dove y_0 è una soluzione dell'equazione omogenea associata (2.8).

(b) Ogni funzione del tipo $y_0 + y_p$, dove y_0 è una soluzione dell'equazione omogenea associata (2.8), è soluzione dell'equazione non-omogenea (2.7).

In altri termini, il teorema afferma quanto segue:

`Spazio delle soluzioni dell'equazione non omogenea`
$=$
`Spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea`
$+$
`Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea`

Dimostrazione. Denotiamo con y_0 una qualunque soluzione dell'equazione omogenea e con y_p una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Dunque y_0 e y_p soddisfano rispettivamente

$$Dy_0 = 0 \qquad \text{e} \qquad Dy_p = f(x) \tag{2.9}$$

dove D è l'operatore differenziale che manda una funzione φ in $D\varphi = \varphi' + a(x)\,\varphi$. Per dimostrare l'enunciato, occorre articolare la dimostrazione in due parti.

a) *Se $Dy = f(x)$, allora la funzione y è del tipo $y = y_0 + y_p$*

Per ipotesi, $D(y) = f(x)$ e $D(y_p) = f(x)$. Dunque, per la linearità di D,

$$D(y - y_p) = D(y) - D(y_p) = f(x) - f(x) = 0$$

Ora l'uguaglianza $D(y - y_p) = 0$ dice che $y - y_p = y_0$ è soluzione dell'equazione omogenea. Allora la funzione y è del tipo $y = y_0 + y_p$.

b) *Se la funzione y è del tipo $y = y_0 + y_p$, allora $D(y) = f(x)$.*

Per ipotesi, $D(y_0) = 0$ e $D(y_p) = f(x)$. Dunque, per la linearità dell'operatore D,

$$D(y) = D(y_0 + y_p) = D(y_0) + D(y_p) = 0 + f(x) = f(x)$$

Quindi $y = y_0 + y_p$ soddisfa $D(y) = f(x)$. Q.E.D.

Lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea $D(y) = y' + a(x)y = 0$ si chiama *nucleo* dell'operatore D e si denota Ker D (inglese *kernel*):

$$\text{Ker } D = \{y \in C^1(I) \mid D(y) = 0\} \tag{2.10}$$

La seguente immagine può essere utile:

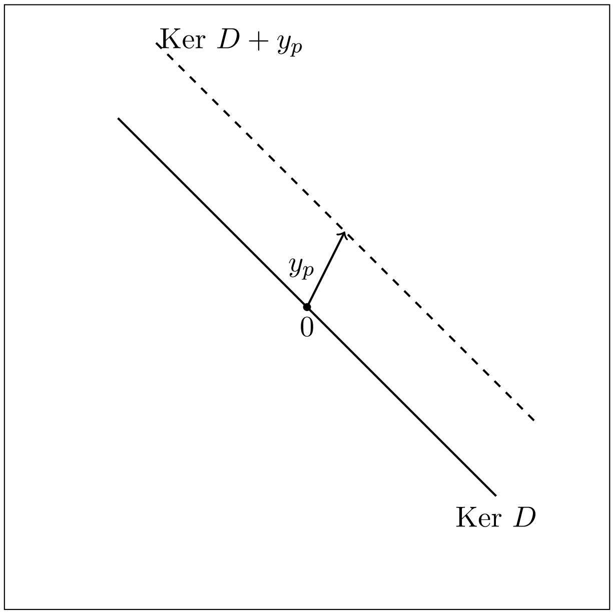


Figura 3: Ker D è lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea. La funzione y_p è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea; Ker $D + y_p$ (ottenuto da Ker D mediante traslazione del vettore y_p) è lo spazio delle soluzioni dell'equazione non omogenea.

2.2 Soluzione generale dell'equazione lineare omogenea

Teorema 2.2 (Soluzione generale dell'equazione lineare omogenea)**.** *La soluzione generale dell'equazione lineare omogenea del primo ordine*

$$y' + a(x)\, y = 0 \tag{2.11}$$

dove $a(x)$ è una funzione continua su un intervallo J, è

$$y(x) = Ce^{-A(x)}, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

dove $A(x)$ è una qualunque antiderivata di $a(x)$ su J, cioè una qualunque particolare funzione (definita su J), tale che $A'(x) = a(x)$, per ogni $x \in J$.

Dimostrazione. L'equazione si scrive anche $y' = -a(x)y$, e quindi è a variabili separabili. Ovviamente, abbiamo la soluzione costante di equilibrio: $y = 0$. Negli intervalli in cui una soluzione $y(x)$ si mantiene diversa da zero, dividiamo per $y(x)$, separiamo le variabili e integriamo:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -a(x)dx = -A(x) + C_1 \tag{2.13}$$

dove $A(x)$ è una qualunque fissata antiderivata di $a(x)$. Distinguiamo due casi. Quando $y(x)$ è positiva, abbiamo

$$\ln y = -A(x) + C_1, \qquad y = e^{c_1}e^{-A(x)} = C_1e^{-A(x)}, \quad C_1 > 0 \tag{2.14}$$

Quando $y(x)$ è negativa, abbiamo

$$\ln(-y) = -A(x) + c_2, \qquad y = -e^{c_2}e^{-A(x)} = C_2 e^{-A(x)}, \quad C_2 < 0 \tag{2.15}$$

Possiamo allora unificare i due casi ($y > 0$ e $y < 0$), scrivendo

$$y(x) = Ce^{-A(x)}, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

dove C è una costante arbitraria che può essere sia positiva, sia negativa. Di più, vediamo che per $C = 0$ otteniamo la soluzione nulla. Quindi, la (2.16) descrive, al variare di C in $\mathbb{R}$, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea (2.11). Si noti che le soluzioni (2.16) dell'equazione omogenea (2.11), $y' = -a(x)y$, con $a(x)$ definita e continua su un intervallo J, sono definite su tutto J. Inoltre, una soluzione sull'intervallo J è o sempre positiva, o sempre negativa, o identicamente nulla. (Cioè, non può capitare che cambi segno su J).

2.3 Soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea

Ricerca di una soluzione particolare di una equazione lineare non omogenea con il metodo della variazione delle costanti (Lagrange 1775,1788).

Il metodo di Lagrange consiste nel cercare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea tra le funzioni del tipo

$$y_1 = c(x)e^{-A(x)} \tag{2.17}$$

dove $A(x)$ è una qualunque antiderivata di $a(x)$ (fissata in modo arbitrario) e $c(x)$ è una funzione incognita. Poiché $y_1' = c'(x)(x)e^{-A(x)} - c(x)\,a(x)e^{-A(x)}$, sostituendo (2.17) nell'equazione (2.19) si ottiene

$$c'(x)e^{-A(x)} - c(x)\,a(x)e^{-A(x)} + a(x)\,c(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

cioè

$$c'(x)e^{-A(x)} = f(x)$$

$$c'(x) = f(x)e^{A(x)}$$

$$c(x) = \int f(x)e^{A(x)}\,dx \tag{2.18}$$

Nella formula 2.18, a secondo membro si può scegliere come $c(x)$ una qualunque antiderivata di $f(x)e^{A(x)}$, fissata in modo arbitrario.

Soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine

Sommando la soluzione generale (2.16) dell'equazione omogenea e l'integrale particolare (2.18) si ottiene, per il teorema di struttura, la soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea:

Teorema 2.3 (Soluzione generale di un'equazione lineare del primo ordine)**.** *La soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine*

$$y' + a(x)\,y = f(x) \tag{2.19}$$

è data da

$$y \quad = \quad Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}\,dx \tag{2.20}$$

dove $A(x)$ *è una qualunque primitiva di* $a(x)$*,* C *è una costante arbitraria e* $\int f(x)e^{A(x)}\,dx$ *denota una qualunque antiderivata di* $f(x)e^{A(x)}$*.*

Osservazione. Nella formula della soluzione generale (2.20), con il simbolo $\int f(x)e^{A(x)}\,dx$ denotiamo una qualunque antiderivata della funzione $f(x)e^{A(x)}$. Quindi, quando si fanno i conti, non è necessario aggiungere una costante arbitraria in $\int f(x)e^{A(x)}\,dx$. (Tale eventuale costante, verrebbe comunque assorbita dalla costante C nel termine $Ce^{-A(x)}$). In definitiva, si ricordi che la soluzione generale (2.20) dipende da *un'unica costante arbitraria* $C \in \mathbb{R}$.

Osservazione. Si osservi che abbiamo ottenuto, a posteriori, un risultato importante, che vale per le equazioni lineari (ma che in generale non vale per altri tipi di equazioni differenziali):

Se i coefficienti $a(x), f(x)$ *di un'equazione lineare* $y' + a(x)\,y = f(x)$ *sono definiti e continui su uno stesso intervallo* I *di* $\mathbb{R}$*, allora le soluzioni dell'equazione sono definite su* tutto *l'intervallo* I*.*

2.4 Interpretazione geometrica della soluzione generale

Interpretazione geometrica della soluzione generale (2.20) di un'equazione lineare del primo ordine:

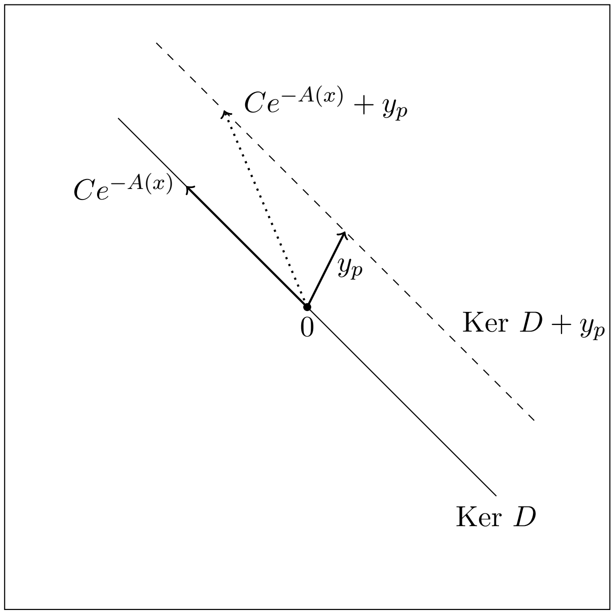


Figura 4: Ker D è lo spazio vettoriale (di dimensione 1) delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea. È costituito da tutti i multipli della soluzione $e^{-A(x)}$, dove $A(x)$ è un'antiderivata di $a(x)$, comunque fissata. La funzione $y_p = e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Lo spazio delle soluzioni dell'equazione non omogenea è lo spazio (affine, di dimensione 1) Ker $D + y_p$, ottenuto da Ker D mediante traslazione del vettore y_p.

2.5 Principio di sovrapposizione

Torniamo alla scrittura di un'equazione lineare in termini di un operatore

$$D(z) = z' + a(x)\, z$$

dove $a(x)$ è una funzione nota, definita e continua su un intervallo I di $\mathbb{R}$, e $z = z(x)$ è la funzione incognita.

Teorema 2.4 (Principio di sovrapposizione)**.** *Se z_1 e z_2 sono soluzioni delle due equazioni (lineari non omogenee)*

$$Dz = f_1 \qquad\qquad Dz = f_2 \tag{2.21}$$

(f_1, f_2 funzioni continue su I) allora $z_1 + z_2$ è soluzione dell'equazione

$$Dz = f_1 + f_2 \tag{2.22}$$

Il principio di sovrapposizione, immediata conseguenza della proprietà di linearità dell'equazione, ha il seguente significato fisico. Supponiamo che la legge che descrive un fenomeno sia lineare. Allora quando si valutano gli effetti di molte perturbazioni, possiamo tener conto separatamente delle singole perturbazioni e poi sommare gli effetti. (Ad esempio, se due sassi sono gettati nell'acqua, le onde provocate da ciascuno di essi possono essere calcolate separatamente e poi le perturbazioni sommate).

(Ad esempio: se due sassi sono gettati contemporaneamente nell'acqua, le onde provocate da ciascuno di essi possono essere calcolate in modo indipendente, e poi le rispettive perturbazioni sommate; nel volo di un missile, si possono introdurre correzioni indipendenti per il vento e per le deviazioni della densità dell'atmosfera dalle densità tabulate eccetera.)

Dimostrazione (del principio di sovrapposizione). Per ipotesi,

$$Dz_1 = f_1 \qquad\qquad Dz_2 = f_2 \tag{2.23}$$

Sommando membro a membro, poiché $D(z_1 + z_2) = Dz_1 + Dz_2$, si ha

$$D(z_1 + z_2) = Dz_1 + Dz_2 = f_1 + f_2 \tag{2.24}$$

Dunque $z_1 + z_2$ è soluzione dell'equazione $Dz = f_1 + f_2$. Q.E.D.

2.6 Problema di Cauchy per le equazioni lineari del primo ordine

Il problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine

$$\begin{cases} y' + a(x)y &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{2.25}$$

($a(x), f(x)$ continue su uno stesso intervallo I), si risolve facilmente. Infatti, sappiamo già che la soluzione generale è

$$y \quad = \quad Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}\, dx \tag{2.26}$$

Allora, la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ determina il valore della costante C.

Si può anche scrivere una formula esplicita. Scegliamo come antiderivata $A(x)$ di $a(x)$ la funzione

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(u)\, du \tag{2.27}$$

Questa particolare antiderivata soddisfa la condizione $A(x_0) = 0$. Allora si vede subito che la soluzione del problema di Cauchy (2.25) è data da

$$y(x) \quad = \quad y_0e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} f(u)e^{A(u)}\, du \tag{2.28}$$

Infatti, questa funzione è del tipo (2.26) e quindi è una soluzione di $y' + a(x)y = f(x)$, e si vede subito, valutando in x_0, che $y(x_0) = y_0$. (Perché $y_0e^{-A(x_0)} = y_0e^0 = y_0$ e il termine $\int_{x_0}^{x_0}$ .... è nullo).

Si noti che, nel caso di equazioni lineari del primo ordine, tutte le soluzioni sono definite su tutto l'intervallo I sul quale sono definiti i coefficienti $a(x)$ e $f(x)$.

2.7 Esempi di equazioni lineari del primo ordine

Esempio 2.5. *Trovare la soluzione generale dell'equazione*

$$y' - x^2 y = 0 \tag{2.29}$$

Soluzione. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine omogenea. Una antiderivata di $a(x) = -x^2$ è $A(x) = -\frac{1}{3}x^3$. La soluzione generale è

$$Ce^{\frac{1}{3}x^3}, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{2.30}$$

Esempio 2.6. *Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine*

$$y' - xy = x \tag{2.31}$$

Soluzione. $a(x) = -x$, una antiderivata di $a(x)$ è $A(x) = -\frac{1}{2}x^2$. Una antiderivata di $e^{A(x)} f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} x$ è

$$\int e^{-\frac{1}{2}x^2} x = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Dunque la soluzione generale è data da:

$$Ce^{\frac{1}{2}x^2} + e^{\frac{1}{2}x^2} \int e^{-\frac{1}{2}x^2} x\, dx = Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{2.32}$$

Esempio 2.7. *Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare del primo ordine*

$$y' + y = 7 \tag{2.33}$$

e la soluzione del problema di Cauchy $y' + y = 7$, $y(0) = 1$.

Soluzione. Una antiderivata di $a(x) = 1$ è $A(x) = x$. La soluzione generale è

$$Ce^{-x} + e^{-x} \int 7e^x\, dx = Ce^{-x} + 7, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{2.34}$$

Si noti che la funzione costante $y_p = 7$ è una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea $y' + y = 7$.

La soluzione del problema di Cauchy $y' + y = 7$, $y(0) = 1$, è

$$-6e^{-x} + 7 \tag{2.35}$$

Esempio 2.8. *Trovare la soluzione generale dell'equazione*

$$x' + 2x - e^t = 0 \tag{2.36}$$

Soluzione. L'equazione è lineare del primo ordine, del tipo $x' + a(t)x = f(t)$ con $a(t) = 2$, $f(t) = e^t$. Una antiderivata di $a(t)$ è $A(t) = 2t$ e una antiderivata di $f(t)e^{A(t)} = e^t e^{2t} = e^{3t}$ è $\frac{1}{3}e^{3t}$. Quindi la soluzione generale è

$$Ce^{-2t} + e^{-2t}\frac{1}{3}e^{3t} = Ce^{-2t} + \frac{1}{3}e^t, \qquad C \in \mathbb{R} \tag{2.37}$$

Esempio 2.9. *Trovare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + x^2\, y = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases} \tag{2.38}$$

Soluzione.

La soluzione del problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine

$$\begin{cases} y' + a(x)y &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{2.39}$$

($a(x), f(x)$ continue su uno stesso intervallo I), è data da:

$$y(x) = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} f(u)e^{A(u)}\, du \tag{2.40}$$

dove

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(u)\, du \tag{2.41}$$

Nel problema di Cauchy (2.38), si ha $a(x) = x^2$ e $f(x) = x^2$. Quindi la soluzione è

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= 2e^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \int_0^x e^{\frac{t^3}{3}} t^2\, dt \\ &= 2e^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \left[e^{\frac{t^3}{3}} \right]_0^x \\ &= 2e^{-\frac{x^3}{3}} + e^{-\frac{x^3}{3}} \left(e^{\frac{x^3}{3}} - 1 \right) \\ &= \boxed{e^{-\frac{x^3}{3}} + 1} \end{aligned}$$

3 Il teorema di esistenza e unicità. (Argomento facoltativo).

3.1 Il teorema di esistenza e unicità locale. Condizione di Lipschitz.

Si chiama *equazione differenziale del primo ordine in forma normale* un'equazione che si scriva come

$$y' = f(x, y) \tag{3.1}$$

dove $f(x, y)$ è una funzione continua su un dominio Ω di $\mathbb{R}^2$.

Equazione differenziale "del primo ordine" significa che la massima derivata della funzione incognita che figura nell'equazione è la derivata prima $y'(x)$. In modo simile, un'equazione come $y'' = F(x, y, y')$ si dirà equazione del *secondo ordine.* L'espressione "in forma normale" significa che l'equazione è esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo. Ad esempio, l'equazione $y' = x \cdot y$ è in forma normale, l'equazione $y'' = x \cdot y' + y$ e in forma normale, mentre $x \cdot y \cdot y' + (y')^2 = 0$ non è in forma normale.

Tutte le equazioni a variabili separabili $y' = g(x)h(y)$ e tutte le equazioni lineari del primo ordine del tipo $y' = -a(x)y + f(x)$ sono particolari equazioni differenziali del primo ordine del tipo $y' = f(x, y)$.

Diremo che una funzione $y = y(x)$, definita su un intervallo I di $\mathbb{R}$, è *soluzione dell'equazione 3.1 nell'intervallo I*, se

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{3.2}$$

per ogni $x \in I$. Se la funzione $y = y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale, il suo grafico si chiama una *curva integrale.*

La funzione f associa a ogni punto (x, y) in Ω il numero $f(x, y)$ che interpretiamo come una assegnata *pendenza* (cioè come il coefficiente angolare di una retta). Dunque, dire che una funzione $y(x)$ è una soluzione di $y' = f(x, y)$ significa che la pendenza del grafico di $y(x)$ nel punto $(x, y(x))$ è uguale a $f(x, y)$.

Il *problema di Cauchy*, o *problema ai valori iniziali*, consiste nel cercare una soluzione $y(x)$ il cui grafico passi per un punto (x_0, y_0), *assegnato* in Ω. In altri termini, il problema di Cauchy consiste nel risolvere il sistema

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Si dice che la funzione $f = f(x, y)$, definita su $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ha *rapporto incrementale limitato rispetto a y in* Ω, se esiste una costante positiva L, tale che per ogni coppia di punti del tipo $(x, y_2), (x, y_1)$ in Ω (con *la stessa ascissa*), si ha

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L\,|y_2 - y_1| \tag{3.4}$$

Se esiste una costante L per la quale la 3.4 è soddisfatta, diremo anche che f soddisfa in Ω a una *condizione di Lipschitz rispetto a y*, con *costante di Lipschitz L.*

Enunciamo ora, senza darne la dimostrazione, il fondamentale teorema di esistenza e unicità locale della soluzione di un problema di Cauchy.

Teorema 3.1 (Esistenza e unicità locale del problema di Cauchy)**.** *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Supponiamo che siano soddisfatte le ipotesi seguenti:

1. *La funzione $f(x,y)$ sia continua su un rettangolo*
$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 - a \leq x \leq x_0 + a,\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$
centrato in (x_0, y_0) (dove a, b sono due numeri positivi).

2. *La funzione f soddisfi sul rettangolo R a una condizione di Lipschitz rispetto alla variabile y (cioè abbia rapporto incrementale limitato rispetto a y in R).*

Allora esiste un $\delta > 0$ tale che sull'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ il problema di Cauchy (3.5) ha una e una sola soluzione.

Dunque, attraverso il punto (x_0, y_0) passa una e una sola curva integrale dell'equazione $y' = f(x,y)$.

Osservazione Una condizione sufficiente perché f soddsfi una condizione di Lipschitz (di tipo (3.4)) rispetto alla variabile y su un rettangolo $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ è che *f abbia derivata parziale f'_y rispetto a y, e che f'_y sia continua sul rettangolo R.* Infatti, in tal caso la derivata parziale f'_y (rispetto a y) è limitata su R (Teorema di Weierstrass), cioè esiste un numero L tale che

$$|f'_y(x,y)| \leq L$$

per ogni $(x,y) \in R$. Allora, per ogni coppia di punti $(x,y_1), (x,y_2) \in R$ esiste (per il teorema del valor medio di Lagrange) un opportuno y^* (compreso tra y_2 e y_1) per il quale si ha:

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = f'_y(x,y^*)\,|y_2 - y_1| \leq L\,|y_2 - y_1|$$

Questo prova che f ha in R rapporto incrementale limitato rispetto a y.

Possiamo esprimere la proprietà di *unicità* dicendo che, nelle ipotesi del teorema, *due curve integrali distinte* (cioè i grafici di due soluzioni distinte) *non possono mai avere alcun punto in comune.*

4 Un esempio di studio qualitativo: l'equazione logistica

Un possibile modello per descrivere la crescita di una popolazione è dato dall'equazione differenziale della crescita esponenziale:

$$x' = ax, \qquad a > 0 \tag{4.1}$$

Sappiamo che le soluzioni di questa equazione sono esattamente tutte le funzioni del tipo $x(t) = Ce^{at}$, dove C è una costante reale arbitraria. La quantità $x(t)$ misura la popolazione di una certa specie all'istante t, e l'equazione (4.1) esprime l'ipotesi che la velocità di riproduzione $x'(t)$ sia proporzionale alla quantità $x(t)$ di individui. Ovviamente, questo modello[1]

[1] Detto anche modello di Malthus.

si fonda su drastiche semplificazioni e trascura diversi effetti. Ad esempio, non tiene conto del fatto che la popolazione non può crescere senza limite. Inoltre, con l'aumento della popolazione, la competizione tra gli individui (ad esempio, per il cibo) può rallentare la velocità di riproduzione.

Proviamo allora a raffinare le nostre ipotesi, supponendo che:

1. Se la popolazione $x(t)$ è molto piccola, la velocità di crescita $x'(t)$ è (all'incirca) proporzionale a $x(t)$.

2. Se la popolazione diventa sufficientemente grande, il tasso di crescita $x'(t)$ diventa negativo.

Naturalmente non esiste un'unica equazione che sia compatibile con queste due ipotesi. Una di tali infinite equazioni è l'equazione del *modello logistico dell'accrescimento*[2]:

$$x' = ax(1 - \frac{x}{N}) \tag{4.2}$$

I parametri a e N sono positivi e si possono interpretare nel modo seguente: a è il tasso di crescita percentuale quando x è piccola, ossia quando il termine quadratico ax^2/N è trascurabile. (Infatti, in tal caso, l'equazione $x' = ax(1 - \frac{x}{N}) = ax - a\frac{x^2}{N}$ è praticamente indistinguibile da $x' = ax$, l'equazione della crescita esponenziale). Invece N è una quantità limite di popolazione, raggiunta la quale, la velocità di crescita si annulla. (Infatti, se a secondo membro si pone $x = N$, si ha $x' = ax(1 - \frac{x}{N}) = 0$). Non appena la quantità di popolazione supera la quota N, la velocità di crescita diventa negativa. (Infatti, se $x > N$, si ha $(1 - \frac{x}{N}) < 0$ e quindi si ha $x' = ax(1 - \frac{x}{N}) < 0$).

Non è restrittivo assumere $N = 1$. Questa ipotesi significa che abbiamo operato un cambio di scala, scegliendo la quantità N come unità di misura della popolazione. (Allora $x(t)$ rappresenterà la frazione di popolazione N presente all'istante t). L'equazione logistica si scrive allora

$$x' = ax(1 - x) \tag{4.3}$$

Si tratta di un'equazione

1. *Del primo ordine* (perché la derivata più alta che figura è la derivata prima).

2. *In forma normale* (perché è esplicitata rispetto a x', ossia è del tipo $x' = f(x, t)$).

3. *Autonoma.* Questo significa che il secondo membro $ax(1-x)$ *non dipende esplicitamente dal tempo* t.

4. *Non lineare.* (Ricordiamo che le equazioni lineari sono quelle del tipo $x' = ax + b$, dove a, b sono funzioni di t).

4.1 Studio qualitativo

Senza affrettarci a risolvere in modo esplicito l'equazione (4.3), possiamo studiarla *in modo qualitativo*[3]. Rappresentiamo il campo di direzioni dell'equazione $x' = a(1 - x)x$ sul piano

[2] Questa equazione fu studiata dal biologo belga Verhulst nel 1838.

[3] "*La matematica è l'arte di non fare i calcoli*", diceva provocatoriamente il matematico Oscar Chisini.

t, x delle soluzioni. Questo significa che nel punto di coordinate (t, x) riportiamo la pendenza, che è data dalla quantità $a(1-x)x$. Facciamo le seguenti osservazioni:

1. Ci sono due *soluzioni di equilibrio*, in corrispondenza dei valori in cui il secondo membro $a(1-x)x$ si annulla. Precisamente, le due soluzioni costanti $x(t) \equiv 0$ (per ogni t) e $x(t) \equiv 1$ (per ogni t).

2. Se $0 < x < 1$, la pendenza $a(1-x)x$ è positiva.

3. Se $x > 1$, la pendenza $a(1-x)x$ è negativa.

Dunque la posizione di equilibrio 0 è *instabile*: appena la popolazione diventa positiva, comincia a crescere. Invece, la posizione di equilibrio 1 è *asintoticamente stabile*. Questo significa che una popolazione di poco superiore a 1 decresce, mentre una di poco inferiore a 1, cresce.

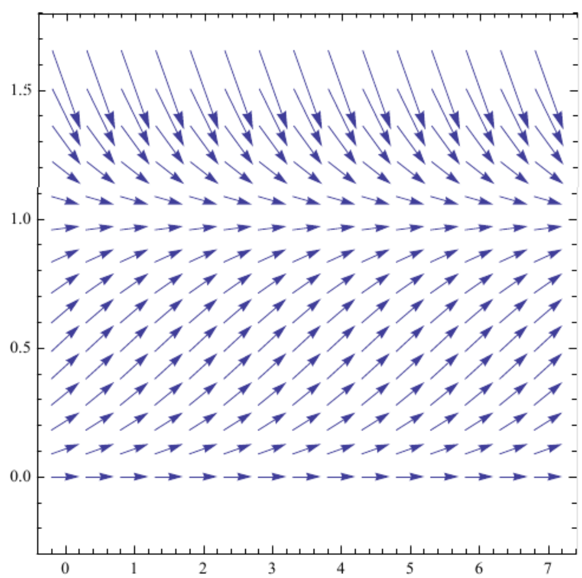
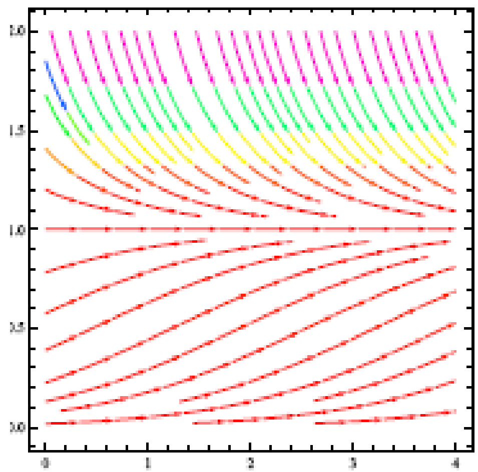


Figura 5: Campo di direzioni per l'equazione logistica $x' = a(1-x)x$.

Dallo studio del campo di direzioni possiamo indovinare l'andamento delle curve integrali, ossia dei grafici delle soluzioni:



.

Figura 6: Curve integrali (cioè grafici delle soluzioni) dell'equazione logistica $x' = a(1-x)x$. Queste curve si chiamano *curve logistiche.*

Per disegnare in modo qualitativo le curve integrali, occorre fare qualche considerazione.

Anzitutto si noti che il grafico della soluzione di equilibrio $x = 1$ (la soluzione costante $x(t) \equiv 1$ per ogni $t \geq 0$) fa da barriera alle altre soluzioni, nel senso che nessuna soluzione attraversa la retta $x = 1$. Questo è ovvio, perché se una soluzione (diversa da $x = 1$) intersecasse la retta $x = 1$ in un punto, per tale punto passerebbero due distinte curve integrali, e questo violerebbe l'unicità della soluzione.

È importante studiare il comportamento asintotico delle soluzioni. Supponiamo che $x(t)$ sia una soluzione che parta dal punto $(0, A)$, con $0 < A < 1$. Poiché il grafico di $x(t)$ è tutto contenuto nella striscia $0 < x < 1$, la derivata $x'(t) = a[1 - x(t)]x(t)$ è positiva, e quindi la funzione $x(t)$ è crescente (e superiormente limitata da 1). Quindi esiste finito il limite di $\lim_{t\to+\infty} x(t) = L$. Tale valore asintotico L è proprio uguale a 1. Infatti, esiste il limite di $x'(t)$, per $t \to +\infty$, perché

$$\lim_{t\to+\infty} x'(t) = \lim_{t\to+\infty} a(1-x)x = a(1-L)L$$

Inoltre, tale limite deve essere uguale a zero. (Cenno: Se $x(t) \to L$ per $t \to +\infty$ e $x'(t)$ ha limite per $t \to +\infty$, tale limite deve essere zero. Infatti, se $n \in \mathbb{N}$, per il teorema del valor medio $x(n+1) - x(n) = x'(t_n).1$, per un opportuno $t_n \in [n, n+1]$. Facendo tendere n a $+\infty$, il primo membro tende a $L - L = 0$ e quindi $x'(t_n) \to 0$. Poiché la successione t_n tende a $+\infty$, anche $x'(t) \to 0$ per $t \to +\infty$). Quindi $aL(1-L) = 0$, e quindi $L = 1$. In modo del tutto analogo, vediamo che anche le curve logistiche che partono da punti $(0, B)$, con $B > 1$, tendono asintoticamente alla posizione di equilibrio (asintoticamente stabile) $x = 1$.

Lo studio qualitativo verrà confermato dallo studio delle soluzioni, che ora troviamo in modo esplicito.

4.2 Soluzioni in forma esplicita

L'equazione logistica $x' = a(1-x)x$ è a variabili separabili. Da $\frac{dx}{(1-x)x} = a\,dt$, segue

$$\int \frac{dx}{(1-x)x} = \int a\,dt + C \tag{4.4}$$

Poiché $\frac{1}{(1-x)x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$, l'equazione (4.4) diventa:

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{1-x}\,dx = \int a\,dt + C \tag{4.5}$$

Passando alle antiderivate,

$$\ln|x| - \ln|1-x| = at + C \tag{4.6}$$

Poiché ci stiamo restringendo al caso $x > 0$ (per la natura del problema, la popolazione non può essere negativa), si ha $|x| = x$. Anche se alla fine vedremo che non ce n'è bisogno, distinguiamo due casi.

1) Se $1-x > 0$, si ha $|1-x| = 1-x$ e pertanto

$$\ln\frac{x}{1-x} = at + C$$

ossia

$$\frac{x}{1-x} = e^C \cdot e^{at} \tag{4.7}$$

dove e^C è una costante arbitraria positiva.

2) Se invece $1-x < 0$, si ha $|1-x| = x-1$ e da (4.6) segue $\ln\frac{x}{x-1} = at + C$ e

$$\frac{x}{x-1} = e^C \cdot e^{at},$$

con e^C costante positiva arbitraria, ossia

$$\frac{x}{1-x} = (-\,e^C) \cdot e^{at}, \tag{4.8}$$

dove $(-\,e^C)$ è una costante negativa arbitraria. Possiamo allora unificare le (4.7) e (4.8) scrivendo semplicemente

$$\frac{x}{1-x} = K \cdot e^{at} \tag{4.9}$$

dove K è una costante reale arbitraria (positiva, nulla o negativa). Da (4.9) segue:

$$x(t) = \frac{Ke^{at}}{1+Ke^{at}} \tag{4.10}$$

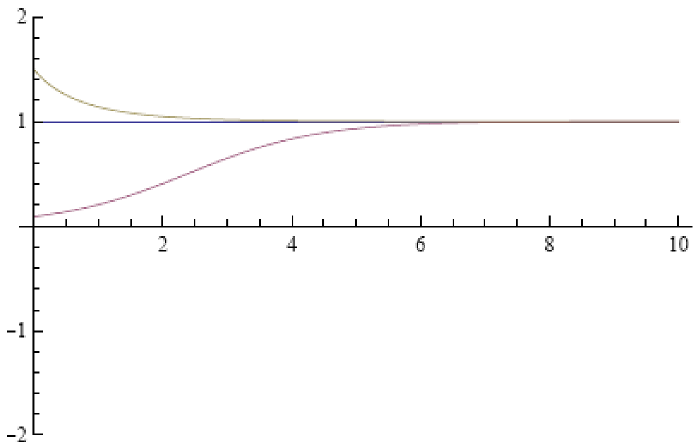
Valutando questa espressione all'istante $t = 0$ si ha $x(0) = \frac{K}{1+K}$. Risolvendo rispetto a K,

$$K = \frac{x(0)}{1-x(0)}$$

Sostituendo tale valore di K in (4.10), con qualche passaggio algebrico possiamo riscrivere la (4.10) in termini della popolazione iniziale $x(0)$ come

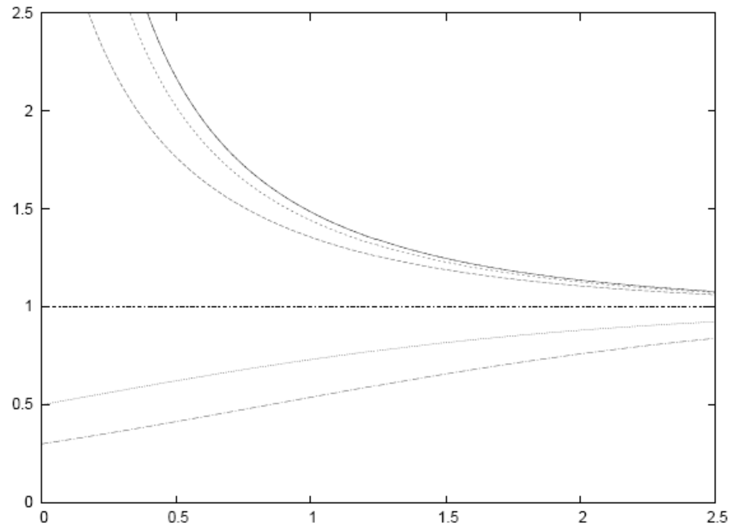
$$x(t) = \frac{x(0)e^{at}}{1 - x(0) + x(0)e^{at}} \tag{4.11}$$

Questa soluzione è valida per ogni condizione iniziale $x(0)$. In particolare, se $x(0) = 0$ si ha $x(t) \equiv 0$ e se $x(0) = 1$ si ha $x(t) \equiv 1$. (In questo modo si ritrovano le due soluzioni di equilibrio).



.

Figura 7: Tre soluzioni $x(t) = \frac{x(0)e^t}{1-x(0)+x(0)e^t}$ dell'equazione logistica $x' = (1-x)x$ soddisfacenti le condizioni iniziali $x(0) = 1, x(0) = 1/12, x(0) = 1.5$



.

Figura 8: Curve logistiche corrispondenti a diverse condizioni iniziali

Ringraziamenti. L'autore di queste note è grato al prof. Luigi Quartapelle (Politecnico di Milano) per commenti e correzioni.