

Politecnico di Milano  
Corso di Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria  
federico.lastaria@polimi.it

## L'algoritmo di Euclide e grandezze incommensurabili

(Argomento molto interessante, ma facoltativo)

16 Settembre 2019

### 1 L'algoritmo di Euclide e le grandezze incommensurabili

Riportiamo la descrizione del procedimento delle divisioni successive.

**Teorema 1.1** (Algoritmo di Euclide. Elementi, Libro VII, Prop. 2). *Siano  $a, b$  numeri interi positivi,  $a > b$ . Effettuiamo le divisioni successive:*

$$\begin{aligned}a &= q_1 b + r_1 \\ b &= q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\ &\dots = \dots \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n\end{aligned}$$

Allora l'ultimo resto non nullo  $r_n$  è il massimo comun divisore di  $a$  e  $b$ .

### 2 Due problemi

**Problema 1.** *Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché due grandezze omogenee  $A, B$  siano incommensurabili, è che il procedimento di Euclide, applicato ad esse, non abbia mai termine.*

**Problema 2.** Utilizzando l'esercizio precedente, dimostrare che la diagonale e il lato di un quadrato sono incommensurabili tra loro, cioè che  $\sqrt{2}$  non è razionale.

*Suggerimento:* Si ragioni sulla figura qui sotto.

