Politecnico di Milano
Corso di Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria
federico.lastaria@polimi.it

Complementi

Irrazionalità di $\sqrt{2}$. Una dimostrazione geometrica.

12 Giugno 2018

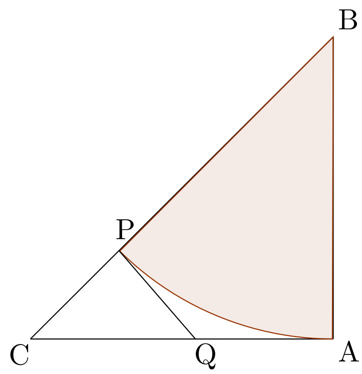
1 Una dimostrazione geometrica

Vediamo una semplice dimostrazione geometrica della irrazionalità di $\sqrt{2}$. (Nella sostanza, seguo [1]). In termini geometrici, come è ben noto, si tratta di dimostrare che:

La diagonale e il lato di un quadrato – o, il che è lo stesso, l'ipotenusa e il cateto di un triangolo rettangolo isoscele – non sono commensurabili tra loro.

Questo significa che non esiste alcun segmento $\mathbf{u}$ che sia contenuto un numero intero n di volte nella diagonale di un quadrato, e un numero intero m di volte nel lato dello stesso quadrato.

La dimostrazione è per assurdo. Supponiamo che l'ipotenusa e il cateto di un triangolo rettangolo isoscele T siano commensurabili, cioè abbiano un sottomultiplo comune $\mathbf{u}$. Fissiamo questo segmento $\mathbf{u}$ come unità di misura. Allora le lunghezze dei lati di T sono tre numeri interi. Ora, fra tutti i triangoli rettangoli isosceli per i quali le misure (rispetto a $\mathbf{u}$) dei lati sono numeri interi, prendiamo il più piccolo. Chiamiamolo ABC.



Consideriamo la circonferenza di centro B e raggio AB, e sia P il punto in cui tale circonferenza interseca l'ipotenusa BC. Dal punto P mandiamo poi la tangente alla circonferenza (vale a dire, la perpendicolare all'ipotenusa), e sia Q il punto di intersezione di questa retta con il lato AC. Ovviamente anche il triangolo rettangolo PQC è isoscele (l'angolo acuto $\widehat{PCQ}$ è metà di un angolo retto). Dico che le misure dei lati del triangolo rettangolo isoscele PQC sono anch'esse tre numeri interi. Infatti:

- $|CP|$ è un intero. Infatti, $|CP| = |BC| - |BP| = |BC| - |AB|$, che è un numero intero, perché sia $|BC|$ sia $|AB|$ sono interi;
- $|QP|$ è un intero, perché $|QP| = |CP|$;
- $|CQ|$ è un intero. Infatti, $|QA| = |QP|$ (segmenti di tangente a una circonferenza spiccati da uno stesso punto Q sono congruenti). Allora $|CQ| = |CA| - |QA| = |CA| - |QP|$ è intero, perché $|CA|$ e $|QP|$ sono entrambi interi.

Dunque, il triangolo rettangolo isoscele PCQ, che è più piccolo di ABC, ha anch'esso i lati con misure intere. Siamo arrivati a un assurdo, perché ABC è il più piccolo triangolo rettangolo isoscele con quella proprietà. L'assurdo dipende dal fatto di avere supposto l'ipotenusa e il cateto di un triangolo rettangolo isoscele commensurabili. Quindi non sono commensurabili, come si voleva dimostrare.

Riferimenti bibliografici

[1] Tom M. Apostol, *Irrationality of The Square Root of Two - A Geometric Proof*, The American Mathematical Monthly, Vol. 107, No. 9 (Nov., 2000), pp. 841-842.