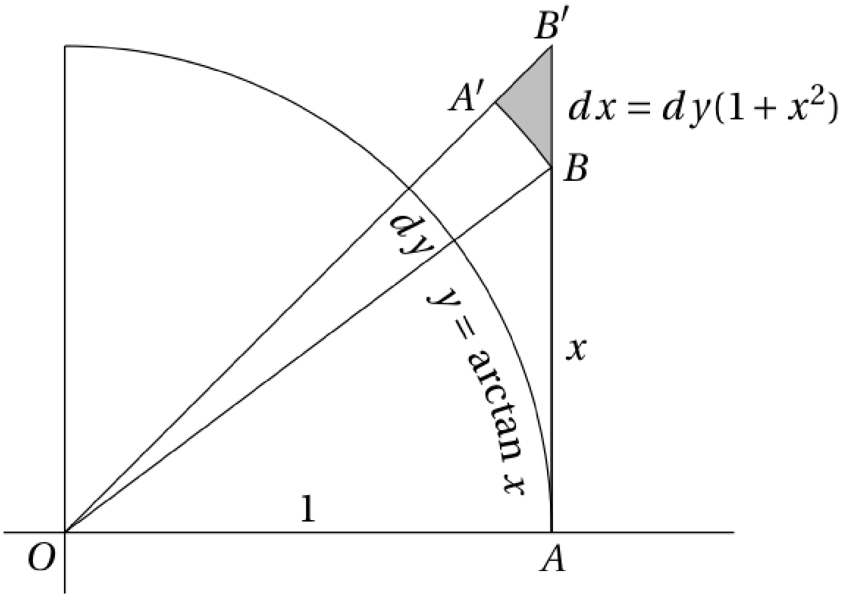
Politecnico di Milano
Corso di Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria
federico.lastaria@polimi.it

Calcolo della derivata di $\arctan x$ con argomentazioni geometriche sulle variazioni infinitesime.
Agosto 2018

1 Il calcolo della derivata di $\arctan x$ con argomentazioni geometriche

Il calcolo di derivate e, più in generale, il calcolo di limiti, può essere talvolta effettuato sulla base di argomentazioni geometriche. Come esempio, vediamo come si può ricavare, in modo geometrico, la derivata dell'arcotangente.



.

Figura 1: Interpretazione geometrica dell'arcotangente e legame tra variazioni infinitesimali.

Interpretazione geometrica di tangente e arcotangente.

Nella figura, la misura x del segmento tangente AB è la tangente dell'angolo al centro $\angle AOB$ o del corrispondente arco sulla circonferenza unitaria. Quindi, detta y la misura dell'angolo $\angle AOB$, si ha $x = \tan y$ e $y = \arctan x$. Chiamiamo dx e dy le corrispondenti variazioni infinitesimali. Poiché dy è una variazione infinitesima, assumiamo che nel triangolino infinitesimale $\triangle A'BB'$ l'archetto $\widehat{\text{A'B}}$ sia un segmento rettilineo, e che i due triangoli $\triangle A'BB'$ e $\triangle AOB$ siano simili (quando dx e dy 'tendono a zero'). Dalla similitudine di questi triangoli segue

Il 'triangolo infinitesimale' $\triangle A'BB'$ è simile al triangolo $\triangle AOB$.

$$dx : OB = A'B : 1$$

Poiché $OB = \sqrt{1+x^2}$ e $A'B = OB\,dy = \sqrt{1+x^2}\,dy$, si ha

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}\,dy}{1}$$

da cui ricaviamo la derivata di $\arctan x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Problema 1.1. *Trovare con argomentazioni geometriche la derivata della funzione seno.*

Riferimenti bibliografici

[1] Stillwell, John, *Yearning for the Impossible. The Surprising Truths of Mathematics* Second Edition, CRC Press, (2018), (p. 128).

[2] Needham, Tristan, *Visual Complex Analysis*, Clarendon Press, Oxford, (1997), (p. ix).