Politecnico di Milano
Corso di Analisi e Geometria 1

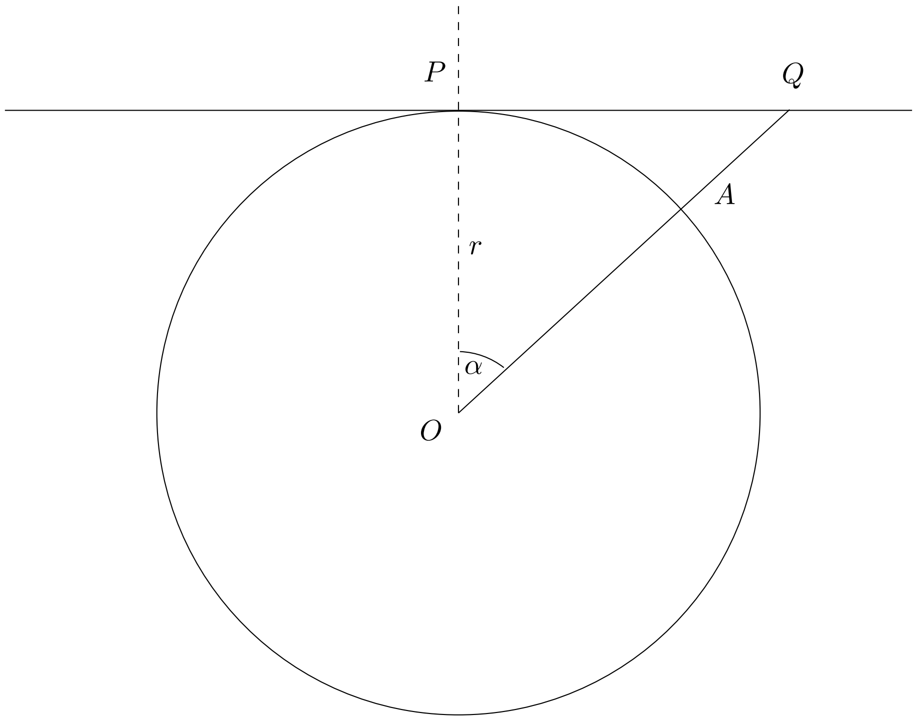
Federico Lastaria
federico.lastaria@polimi.it

Un esempio di confronto tra infinitesimi in Archimede
Agosto 2018

1 Confronto tra infinitesimi nel trattato *Sulle Spirali*

Prendo spunto da alcune interessanti osservazioni di Lucio Russo ([1], cap. XIII, *La Scienza*) sul modo in cui Archimede introduce un confronto tra infinitesimi e dimostra che un infinitesimo può essere (come si dice nel linguaggio matematico odierno) di ordine superiore rispetto a un altro infinitesimo fissato (*Sulle Spirali*, Proposizione 5).

Data una circonferenza di centro O e raggio r, fissiamo un suo punto P, la retta tangente in P e un punto Q su questa retta tangente.



Entrambi i segmenti AQ e PQ diventano ovviamente piccoli quanto si vuole, pur di avvicinare sempre più il punto Q al punto P, ossia, pur di prendere l'angolo $\alpha = \widehat{AOP}$ sufficientemente piccolo. Ma, come si intuisce facilmente, diventano piccoli in modo diverso. Infatti, il segmento AQ tende a zero più velocemente di PQ, nel senso che AQ diventa arbitrariamente piccolo non soltanto in senso assoluto, ma anche rispetto allo stesso segmento PQ. Cosa significa quest'ultima affermazione? Significa, in termini più precisi, che anche *il rapporto* AQ/PQ (denotiamo nello stesso modo, per semplicità, i segmenti e le loro lunghezze) diventa piccolo quanto si vuole, se si prende $\alpha = \widehat{AOP}$ abbastanza piccolo. Nel linguaggio moderno, diremmo che AQ è un *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a PQ, al tendere di α a zero. Il rapporto AQ/PQ si può scrivere in questo modo:

$$\frac{AQ}{PQ} = \frac{OQ - r}{PQ} = \frac{1 - \frac{r}{OQ}}{PQ/OQ} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

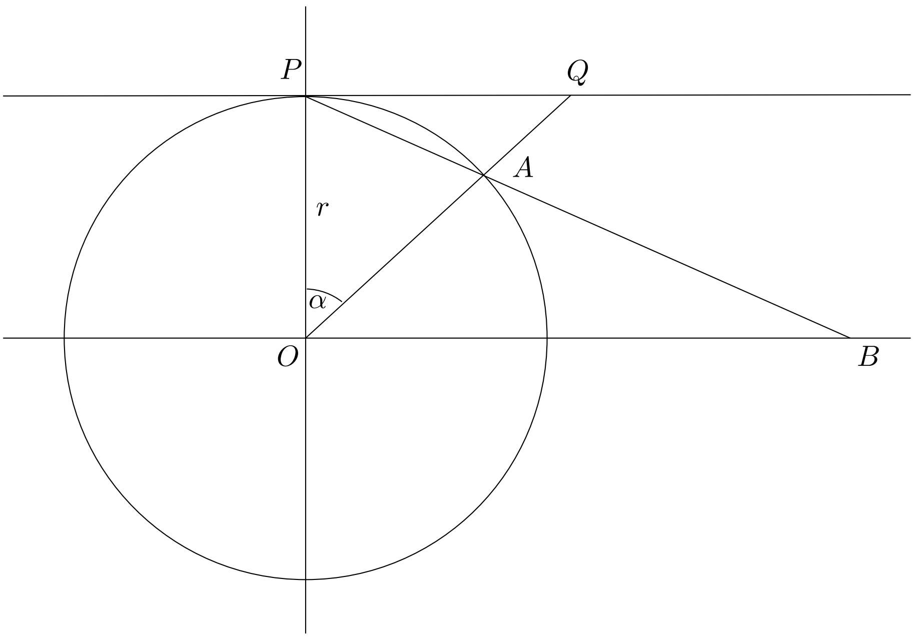
Si tratta allora di dimostrare che

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = 0$$

Con le tecniche odierne, questo limite si calcola senza alcuna difficoltà e 'meccanicamente', cioè, senza alcuna argomentazione geometrica. (In altri termini, senza capire cosa si sta facendo). Si può moltiplicare e dividere per $1 + \cos\alpha$, si possono utilizzare le formule di bisezione, o stime asintotiche, o la regola di De L'Hospital eccetera.

Vediamo invece come il problema viene risolto da Archimede (*Sulle Spirali*, Proposizione 5; si veda [2] e [3]).

Archimede prende in considerazione il punto B intersezione della retta PA con la retta passante per il centro O della circonferenza e parallela a PQ.



Ora, dalla similitudine dei triangoli AQP e AOB segue la proporzione

$$AQ : PQ = OA : OB$$

Ma $OA = r$ è costante, in quanto è il raggio della circonferenza. Quindi il rapporto AQ/PQ è uguale al rapporto r/OB, che tende a zero quando Q si avvicina a P, perché il numeratore r è costante, mentre il denominatore OB tende a $+\infty$.

Lucio Russo ([1], cap. XIII) commenta:

"Sono convinto che, dovendo spiegare il concetto di infinitesimi di diverso ordine, sia didatticamente molto più efficace usare l'esempio considerato da Archimede e la sua limpida dimostrazione, immediatamente visualizzabile, che ricorrere alle tante scatole nere cui i nostri studenti sono abituati."

Altre considerazioni sono lasciate a chi legge.

Riferimenti bibliografici

[1] Lucio Russo, *Perché la cultura classica. La risposta di un non classicista.* Mondadori, 2018.

[2] Archimede, *Opere*, UTET, Classici della Scienza, a cura di A. Frajese, 1988.

[3] T. L. Heath (ed.), *The Works of Archimedes*, Dover, 2002.