Politecnico di Milano. Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria

Alcune osservazioni sulle varie forme della proprietà di completezza

Settembre 2017

Queste note, ancora provvisorie, hanno lo scopo di offrire spunti per possibili approfondimenti. Gli argomenti trattati sono al di fuori del programma del corso.

Indice

1 Forme equivalenti della proprietà di completezza dei numeri reali

1.0.1 Alcune definizioni

Richiamiamo alcune definizioni. Supponiamo che $\mathbb{K}$ sia un campo ordinato.

Una *sezione* (A, B) di $\mathbb{K}$ è una coppia di parti di $\mathbb{K}$ che soddisfano le proprietà seguenti:

1. $A \cup B = \mathbb{K}, \ \ A \cap B = \emptyset$.
2. Per ogni $a \in A$, per ogni $b \in B, \ \ a < b$.

Proprietà di Dedekind.
[Dedekind]
Per ogni sezione (A, B) di $\mathbb{K}$ esiste un λ in $\mathbb{K}$ tale che, per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$, si ha $a \leq \lambda \leq b$.

Tale numero λ (necessariamente unico) si chiama l'*elemento separatore* della sezione (A, B).

Dimostrazione della unicità dell'elememento separatore di una sezione. Supponiamo che esistano due numeri distinti λ e μ, entrambi elementi separatori della sezione (A, B), e sia $x = \dfrac{\lambda + \mu}{2}$ il loro punto medio. Allora si ha

$$a \leq \lambda < x < \mu \leq b$$

per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$. Poiché per ogni $a \in A$ si ha $a < x$, il punto x deve stare in B. Analogamente, poiché per ogni $b \in B$ si ha $x < b$, il punto x deve stare in A. Quindi x deve stare sia in A che in B, in contraddizione con il fatto che $A \cap B = \emptyset$.

Proprietà di esistenza dell'estremo superiore.
[Sup]

Ogni insieme $E \subset K$ non vuoto e superiormente limitato ha una minima limitazione superiore (che si denota $\sup E$ e si chiama estremo superiore di E).

Proprietà di Archimede
[**Archimede**]

Per $a, b \in \mathbb{K}$, $a, b > 0$, esiste un intero $n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$.

La Proprietà di Archimede vale anche nel campo ordinato (non completo) $\mathbb{Q}$. (Quindi questa Proprietà, da sola, non implica la proprietà di completezza). Si dimostra invece facilmente che un campo ordinato completo (ossia $\mathbb{R}$) è archimedeo.

Proprietà delle successioni monotone limitate
[**Successioni Monotone Limitate**]

In $\mathbb{K}$, ogni successione monotona e limitata è convergente.

Proprietà degli intervalli inscatolati
[**Intervalli Inscatolati**]

Supponiamo che $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, sia una successione di intervalli compatti inscatolati

$$I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

tali che la lunghezza $b_n - a_n$ di I_n tenda a zero quando $n \to +\infty$. Allora esiste uno e un solo numero reale che appartiene a tutti gli intervalli I_n.

1.1 Forme equivalenti della proprietà di completezza

Teorema 1.1 (Forme equivalenti della proprietà di completezza) *In un campo ordinato $\mathbb{K}$ le proprietà seguenti sono tra loro equivalenti:*

1. **[Sup]** *Ogni insieme $E \subset \mathbb{K}$ non vuoto e superiormente limitato ha una minima limitazione superiore (che si denota* $\sup E$ *e si chiama estremo superiore di E).*

2. **[Dedekind]** *Per ogni sezione (A, B) di $\mathbb{K}$ esiste un λ in $\mathbb{K}$ tale che, per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$, si ha $a \leq \lambda \leq b$.*

3. **[Successioni Monotone Limitate]** *In $\mathbb{K}$, ogni successione monotona e limitata è convergente.*

4. **[Archimede & Cauchy]** *Il campo $\mathbb{K}$ è archimedeo e ogni successione di Cauchy in $\mathbb{K}$ converge in $\mathbb{K}$.*

5. **[Archimede & Intervalli Inscatolati]** *Il campo $\mathbb{K}$ è archimedeo e per ogni successione di intervalli compatti (chiusi e limitati) inscatolati $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ per i quali i diametri degli I_n tendono a zero, esiste uno e un solo punto di $\mathbb{K}$ che appartiene a I_n per ogni n.*

Proposizione 1.2 [Sup] $\Longrightarrow$ [Dedekind]

Dimostrazione. Sia (A, B) una sezione di $\mathbb{R}$. Poiché A è limitato superiormente, per la proprietà [Sup] esiste la minima limitazione superiore di A, chiamiamola λ. Dunque $a \leq \lambda$ per ogni $a \in A$. D'altra parte, per definizione di sezione, ogni $b \in B$ è una limitazione superiore di A (cioè $b > a$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$) e quindi per ogni b su ha $\lambda \leq b$, perché λ e la *minima* limitazione superiore. In definitiva

$$a \leq \lambda \leq b$$

e quindi λ è elemento separatore della sezione (A, B). □

Proposizione 1.3 [Dedekind] $\Longrightarrow$ [Successioni Monotone Limitate]

Dimostrazione. Sia b_n una successione monotona decrescente e limitata. Definiamo una sezione (A, B), ponendo:

$$A = \{x : \quad x \leq b_n \text{ per tutti gli } n\} \qquad B = \{y : \quad \text{esiste un } n \text{ per il quale } b_n < y\}$$

Per ipotesi, questa sezione ha un elemento separatore, che chiamiamo λ. Dimostriamo che b_n converge a s. Fissato $\varepsilon > 0$, $\lambda + \varepsilon$ sta in B e quindi, per definizione di B, esiste un k tale che $b_k < \lambda + \varepsilon$. Allora $b_n \leq b_k < s + \varepsilon$ per tutti gli $n \geq k$, perché la successione b_n è decrescente. Affermiamo che λ appartiene ad A. Per assurdo, supponiamo $\lambda \in B$. Allora $b_k < \lambda$ per qualche k. Se m è il punto medio di $[b_k, \lambda]$, da $b_k < m < \lambda$ segue $m \in A$ (perché $m < s$) e $m \in B$ (perché $b_k < m$). Assurdo, perché A e B non hanno punti in comune.

Poiché $s \in A$, si ha $s \leq b_n$ per ogni n. Quindi vale definitivamente

$$s \leq b_n \leq b_k \leq s + \varepsilon$$

Questo prova che b_n converge a s. □

Proposizione 1.4 [Successioni Monotone Limitate] $\Longrightarrow$ [Archimede] & [Cauchy]

Dimostrazione. Anzitutto dimostriamo che [Successioni Monotone Limitate] implica la Proprietà di Archimede. Supponiamo per assurdo che la Proprietà di Archimede non sussista, cioè che esistano due numeri positivi a, b in $\mathbb{R}$ tali che $na \leq b$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione na è limitata; ovviamente è anche crescente e dunque converge (Perché per ipotesi tutte le successioni monotone limitate convergono). Sia $\omega \in \mathbb{R}$ il suo limite. Poiché $(n+1)a = na + a$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)a = \lim_{n\to+\infty}(na+a) = \lim_{n\to+\infty} na + \lim_{n\to+\infty} a = \omega + a$$

D'altra parte $(n+1)a$ è una sottosuccessione di na e quindi converge allo stesso limite ω. Dunque si avrebbe $\omega + a = \omega$, con $\omega, a > 0$. Questo è assurdo.

Dimostriamo ora che ogni successione a_n di Cauchy converge. Abbiamo bisogno di due lemmi[1].

Lemma 1. *Ogni successione b_n (anche non di Cauchy) ha una sottosuccessione monotona.*

Dimostrazione. Diremo che una successione b_n ha un *picco* b_k in corrispondenza dell'indice k se $b_k \geq b_n$ per tutti gli $n \geq k$. Se ci sono infiniti picchi, essi formano ovviamente una sottosuccessione monotona non crescente, e il teorema è dimostrato. Se invece il numero di picchi è finito (in particolare se non ce ne sono), c'è un ultimo indice k oltre il quale non ci sono più picchi. Cominciamo la nostra sottosuccessione con $h_0 = k+1$. Siccome a_{h_0} non è un picco esiste un $h_1 > h_0$ tale che $a_{h_1} > a_{h_0}$. Siccome a_{h_1} non è un picco, esiste un $h_2 > h_1$ tale che $a_{h_2} > a_{h_1}$ e così via. Abbiamo allora trovato una successione monotona crescente a_{h_n}.

Lemma 2. *Ogni successione a_n di Cauchy è limitata.*

Dimostrazione. Poiché a_n è una successione di Cauchy, esiste un indice k tale che $|a_m - a_n| < 1$ per tutti gli $m, n \leq k$. Quindi tutti i termini a_n, con $n \geq k$ sono contenuti nell'intervallo di estremi $a_k - 1$ e $a_k + 1$. I termini iniziali a_i con $i < k$ sono in numero finito e costituiscono un insieme limitato. Quindi l'insieme $\{a_n\}$ di tutti gli elementi della successione è limitato.

Dimostrati i lemmi, riprendiamo la dimostrazione:

[Successioni Monotone Limitate] $\Longrightarrow$ [Cauchy].

Sia a_n una successione di Cauchy. Per il Lemma 1, a_n ha una sottosuccessione a_{h_n} monotona, e per il Lemma 2 tale sottosuccessione a_{h_n} è limitata. Dunque, per la nostra ipotesi [Successioni Monotone Limitate], esiste il limite

$$s = \lim_{n\to+\infty} a_{h_n} \tag{1.1}$$

Ora a_n è una successione di Cauchy con una sottosuccessione convergente a s. Dimostriamo che l'intera successione a_n converge a s. Questo segue

[1] Seguiamo [1], pag.49.

dalla disuguaglianza

$$|a_n - s| \leq |a_n - a_{h_n}| + |a_{h_n} - s| \tag{1.2}$$

tenuto conto che, fissato $\varepsilon > 0$, si ha definitivamente $|a_n - a_{h_n}| \leq \varepsilon$ (perché a_n è di Cauchy) e $|a_{h_n} - s| \leq \varepsilon$ (perché a_{h_n} converge a s). □

Proposizione 1.5 [Archimede] & [Cauchy] $\Longrightarrow$ [Archimede] & [Intervalli Inscatolati]

Dimostrazione. Sia $I_n = [a_n, b_n]$ una successione di intervalli inscatolati. Dimostriamo che a_n è una successione di Cauchy. Siccome gli intervalli sono inscatolati, per ogni k, e per ogni $n, m > k$, a_n e a_m appartengono a $[a_k, b_k]$ e quindi $|a_n - a_m| < b_k - a_k$. Poiché per ipotesi $b_k - a_k$ tende a zero, si avrà $|a_n - a_m| < \varepsilon$ per n, m sufficientemente grandi e quindi a_n è di Cauchy. Allora, per ipotesi, esiste $s = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Poiché a_n è crescente, si ha $a_n \leq s$ per ogni n. Siccome $a_k < b_n$ per ogni k e n, si ha, passando al limite, $s \leq b_n$, per ogni n. Quindi $a_n < s < b_n$ per ogni n e quindi $s \in I_n$ per ogni n. Ovviamente s è l'unico punto in comune a tutti gli I_n, in quanto le lunghezze degli I_n tendono a zero.

Proposizione 1.6 [Archimede] & [Intervalli Inscatolati] $\Longrightarrow$ [Sup]

Dimostrazione. Sia $E \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato. Descriviamo un procedimento per costruire una successione di intervalli inscatolati $I_n = [a_n, b_n]$, nella quale nessuno degli a_n è una limitazione superiore di E, mentre tutti i b_n sono limitazioni superiori di E. Partiamo da un (qualunque) elemento a_0 che non sia limitazione superiore e da un (qualunque) elemento b_0 che sia una limitazione superiore per E. In questo modo costruiamo il primo intervallo $I_0 = [a_0, b_0]$. Consideriamo ora il punto medio m_0 di I_0. Se m_0 non è una limitazione superiore per E, lo chiamiamo a_1, e poniamo $b_1 = b_0$. Se invece m_0 è una limitazione superiore per E, poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = m_0$. In ogni caso, abbiamo costruito l'intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$. Ora iteriamo il procedimento e nello stesso modo costruiamo I_n per ogni n. Il diametro di I_n è $b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$. Poiché vale la proprietà di Archimede, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0 \tag{1.3}$$

Per l'ipotesi degli Intervalli Inscatolati, esiste un unico numero s che appartiene a tutti gli I_n:

$$a_n \leq s \leq b_n \tag{1.4}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo che s è l'estremo superiore di E. Anzitutto s è una limitazione superiore per E. Infatti, supponiamo per assurdo che ci sia un $x \in E$ tale che $s < x$. Per 1.3, esiste un $h \in \mathbb{N}$ per il quale $s < b_h < x$. Questa è una contraddizione con il fatto che b_h è una limitazione superiore di E. Resta da provare che nessun numero minore di s è una limitazione superiore per E. Sia allora $s' < s$. Sempre per 1.3, esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $s' < a_k < s$. Poiché a_k non è una limitazione superiore per E, deve esistere un $y \in E$ tale che $a_k < y$. Dunque si ha $s' < a_k < y$, con $y \in E$. Ma questo è assurdo, perché allora s' non è una limitazione superiore per E.

1.1.1 Altre implicazioni

Abbiamo già dimostrato l'equivalenza di diverse forme dell'assioma di completezza. Anche se non è necessario dal punto di vista logico, può essere utile dimostrare direttamene altre implicazioni.

Proposizione 1.7 [Dedekind] $\Longrightarrow$ [Sup]

Sia E un insieme non vuoto e superiormente limitato di numeri reali. Chiamiamo A l'insieme dei numeri che non sono limitazioni superiori di E e chiamiamo B l'insieme dei numeri che sono limitazioni superiori per E. Si verifica immediatamente che (A, B) è una sezione di $\mathbb{R}$. Per la proprietà di Dedekind, tale sezione ha un elemento separatore λ. Dimostriamo che λ è l'estremo superiore di E.

Anzitutto λ è una limitazione superiore di E, cioè sta in B. Infatti, supponiamo per assurdo che λ non sia una limitazione superiore di E. Allora esiste un $e \in E$ tale che $\lambda < e$. Consideriamo il punto medio $m = \dfrac{\lambda + e}{2}$. La disuguaglianza $\lambda < m < e$ dice da un lato che $m \in B$ (perché $\lambda < m$ e λ è elemento separatore di (A, B)), dall'altro che $m \in A$ (perché $m < e$). Questo è assurdo, perché $A \cap B = \emptyset$.

La disuguaglianza $\lambda \leq b$, per ogni $b \in B$ (cioè per ogni limitazione superiore b di E), dice poi che λ, fra tutte le limitazioni superiori di E, è la minima. $\square$

Proposizione 1.8 [Sup] $\Longrightarrow$ [Intervalli Inscatolati]

Dimostrazione. Sia $I_n = [a_n, b_n]$ una successione di intervalli inscatolati

$$I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \cdots$$

L'insieme dei primi estremi a_n è superiormente limitato (ogni secondo estremo b_h è una limitazione superiore) e quindi ha un estremo superiore: $\lambda = \sup\{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$. Si ha

$$a_n \leq \lambda \tag{1.5}$$

per ogni n. Ma si ha anche

$$\lambda \leq b_n \tag{1.6}$$

per ogni n. Infatti, supponiamo, per assurdo, che esista un k tale che $b_k < \lambda$. Allora, per ogni n, si ha $a_n < b_h < \lambda$ e quindi $\sup\{a_n,\, n \in \mathbb{N}\} \leq b_k < \lambda$.

Assurdo. Quindi si ha $a_n \leq \lambda \leq b_n$ per ogni n, ossia λ appartiene a tutti gli I_n. Abbiamo così dimostrato che esiste almeno un punto λ che appartiene a tutti gli I_n. Si noti che fino a quato punto non abbiamo utilizzato l'ipotesi che la successione $b_n - a_n$ dei diametri degli intervalli I_n tende a zero. Tale ipotesi serve per dimostrare l'unicità. Supponiamo infatti che $\lambda' < \lambda''$ siano entrambi in I_n per ogni n e sia $d = \lambda'' - \lambda'$ la distanza tra di essi. Poniamo $\varepsilon = \frac{1}{2}d$. Poiché $b_n - a_n$ tende a zero, per tutti gli n sufficientemente grandi si ha $b_n - a_n < \varepsilon = \frac{1}{2}d$. Poiché λ' appartiene a tutti gli I_n e definitivamente $b_n - a_n < \frac{1}{2}d$, gli intervalli $[a_n, b_n]$ sono tutti contenuti nell'intorno di centro λ' e raggio $\frac{1}{2}d$. Ma λ'' non appartiene a tale intorno e pertanto non può essere contenuto in tutti gli I_n. Siamo arrivati a un assurdo. □

Proposizione 1.9 [Archimede] & [Cauchy] $\Longrightarrow$ [Dedekind]

La dimostrazione è del tutto analoga a quella dell'implicazione [Successioni Monotone Limitate] $\Longrightarrow$ [Dedekind].

Dimostrazione. Sia (A, B) una sezione e sia $I_k = [a_k, b_k]$ la successione di intervalli definita nel modo seguente. Prendiamo un a (qualunque) in A e un b (qualunque) in B e poniamo $I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$. Consideriamo il punto medio di I_0. O tale punto medio sta in A, o sta in B. (Non può stare sia in A che in B, per definizione di sezione). Se il punto medio di I_0 sta in A, lo chiamiamo a_1 e poniamo $b_1 = b_0$. Se invece il punto medio di I_0 sta in B, lo chiamiamo b_1 e poniamo $a_1 = a_0$. In ogni caso, ci siamo costruiti l'intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$. Iteriamo il procedimento e in questo modo costruiamo l'intervallo I_k per ogni k.

Sia $\varepsilon > 0$. Per tutti gli n sufficientemente grandi, si ha

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} < \varepsilon \tag{1.7}$$

Infatti, per la Proprietà di Archimede, esiste un naturale N tale che $N\varepsilon > b_0 - a_0$. Allora, per ogni $n \geq N$, si ha $2^n\varepsilon \geq 2^N\varepsilon > N\varepsilon > b_0 - a_0$, e quindi vale 1.7. Inoltre, se $m, n > N$, i punti a_m, a_n appartengono all'intervallo $[a_N, b_N]$ e dunque $|a_n - a_m| < \varepsilon$. La successione dei primi estremi a_n è dunque di Cauchy e quindi converge. Inoltre anche b_n converge allo stesso limite λ. Infatti

$$|b_n - \lambda| \leq |b_n - a_n| + |a_n - \lambda| \tag{1.8}$$

e sia $|b_n - a_n|$ che $|a_n - \lambda|$ tendono a zero.

Dimostriamo che λ è l'elemento separatore di (A, B). Se b è in B, allora $a_n < b$ ($a_n \in A$ e ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B) e quindi, facendo tendere n a $+\infty$, si ha $\lambda \leq b$. Se a sta in A, si ha $a < b_n$ e quindi, passando al limite, $a \leq \lambda$. In definitiva risulta $a \leq \lambda \leq b$ (per ogni $a \in A$, per ogni $b \in B$) e quindi λ è l'elemento separatore della sezione (A, B). □

Proposizione 1.10 [Successioni Monotone Limitate] $\Longrightarrow$ [Dedekind]

Dimostrazione. Anzitutto dimostriamo che [Successioni Monotone Limitate] implica la Proprietà di Archimede. Supponiamo per assurdo che la Proprietà di Archimede non sussista, cioè che esistano due numeri positivi a, b in $\mathbb{R}$ tali che $na \leq b$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione na è limitata; ovviamente è anche crescente e dunque converge (Perché per ipotesi tutte le successioni monotone limitate convergono). Sia $\omega \in \mathbb{R}$ il suo limite. Poiché $(n+1)a = na + a$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)a = \lim_{n\to+\infty}(na+a) = \lim_{n\to+\infty} na + \lim_{n\to+\infty} a = \omega + a$$

D'altra parte $(n+1)a$ è una sottosuccessione di na e quindi converge allo stesso limite ω. Dunque $\omega + a = \omega$, con $\omega, a > 0$. Questo è assurdo.

Dimostriamo ora che vale la Proprietà di Dedekind. Sia (A, B) una sezione e sia $I_k = [a_k, b_k]$ la successione di intervalli definita nel modo seguente. Prendiamo un a (qualunque) in A e un b (qualunque) in B e poniamo $I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$. Consideriamo il punto medio di I_0. O tale punto medio sta in A, o sta in B. (Non può stare sia in A che in B, per definizione di sezione). Se il punto medio di I_0 sta in A, lo chiamiamo a_1 e poniamo $b_1 = b_0$. Se invece il punto medio di I_0 sta in B, lo chiamiamo b_1 e poniamo $a_1 = a_0$. In ogni caso, ci siamo costruiti l'intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$. Iteriamo il procedimento e in questo modo costruiamo l'intervallo I_k per ogni k.

Sia $\varepsilon > 0$. Per tutti gli n sufficientemente grandi, si ha

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} < \varepsilon \tag{1.9}$$

Infatti, per la Proprietà di Archimede, esiste un naturale N tale che $N\varepsilon > b_0 - a_0$. Allora, per ogni $n \geq N$, si ha $2^n\varepsilon \geq 2^N\varepsilon > N\varepsilon > b_0 - a_0$, e quindi vale 1.9.

La successione a_n è crescente e, poiché $a_n < b_0$ per ogni n, è anche limitata superiormente. Quindi, per ipotesi, è convergente. Precisamente a_n converge al numero λ, estremo superiore dell'insieme degli a_n. Dimostriamo che λ è l'elemento separatore della sezione (A, B). Anzitutto λ è anche il limite della successione b_n. Infatti

$$|b_n - \lambda| \leq |b_n - a_n| + |a_n - \lambda| \tag{1.10}$$

e sia $|b_n - a_n|$ che $|a_n - \lambda|$ tendono a zero.

Se b è in B, allora $a_n < b$ ($a_n \in A$ e ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B) e quindi, facendo tendere n a $+\infty$, si ha $\lambda \leq b$. Se a sta in A, si ha $a < b_n$ e quindi, passando al limite, $a \leq \lambda$. In definitiva risulta $a \leq \lambda \leq b$ (per ogni $a \in A$, per ogni $b \in B$) e quindi λ è l'elemento separatore della sezione (A, B).

Riferimenti bibliografici

[1] Ebbinghaus ...[et al.], *Numbers*, Springer-Verlag, 1991.

[2] Giusti, E. *Esercizi e Complementi di Analisi Matematica*, Parte prima, Bollati Boringhieri.