Politecnico di Milano
Corso di Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria
federico.lastaria@polimi.it

Dimostrazioni da conoscere per la seconda prova.

17 Dicembre 2019

Indice

1 Teoremi per la seconda prova in itinere. Dimostrazioni.

1.1 Teorema della Media Integrale

Denotiamo $\mathcal{R}[a,b]$ lo spazio delle funzioni Riemann-integrabili sull'intervallo $[a,b]$. Ricordiamo che le funzioni Riemann-integrabili sono limitate, vale a dire, esistono finiti l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f su $[a,b]$.

Teorema 1.1 (Teorema della Media Integrale)**.** *(a) Sia $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Siano*

$$m = \inf\ f \qquad\qquad M = \sup\ f \tag{1.1}$$

l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f su $[a,b]$. Allora

$$m \ \leq\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \ \leq\ M \tag{1.2}$$

(b) Se inoltre f è continua, esiste un punto c in $[a,b]$ per il quale vale l'uguaglianza:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \tag{1.3}$$

Dimostrazione. (a) Dall'ovvia doppia disuguaglianza

$$m \leq f(x) \leq M$$

valida per ogni $x \in [a,b]$, segue, per la proprietà di monotonia dell'integrale,

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \tag{1.4}$$

ossia

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \tag{1.5}$$

(in quanto $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ e $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$). Dall'ultima disuguaglianza (1.5), dividendo per $b-a$, segue subito la tesi (1.2).

(b) Supponiamo ora f continua su $[a,b]$ (e, di conseguenza, integrabile secondo Riemann). Per le disuguaglianze (1.2), il numero

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{1.6}$$

è compreso tra l'estremo inferiore m e l'estremo superiore M di f in $[a,b]$. Per una ben nota proprietà delle funzioni continue su un intervallo (*Teorema dei Valori Intermedi*), f assume *tutti* i valori compresi tra il suo estremo inferiore e il suo estremo superiore. Pertanto, esiste un punto c tra a e b nel quale f assume il valore $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, cioè vale l'uguaglianza (1.3). Q.E.D.

1.2 Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Formula di Newton–Leibniz

Teorema 1.2 (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Caso f continua.)**.** *Sia* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora valgono i due fatti seguenti.*

1 (Derivata della funzione integrale)

Poniamo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad\qquad x \in [a, b] \tag{1.7}$$

(F si chiama funzione integrale *di f, con punto iniziale a). Allora F è una antiderivata (o primitiva) di f, ossia F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni x in $[a, b]$:*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x) \tag{1.8}$$

2 (Formula di Newton–Leibniz)

Se G è una qualunque antiderivata (o primitiva) di f su $[a, b]$ (ossia G è una funzione derivabile su $[a, b]$ tale che $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$), allora

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \tag{1.9}$$

Dimostrazione

1. (Derivata della funzione integrale)

Fissiamo un punto x in $[a, b]$. Allora

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\Big[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\Big] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c) \tag{1.10}$$

dove c è un opportuno punto tra x e $x + h$. La (1.10) segue dal Teorema della Media Integrale, applicato all'intervallo di estremi x e $x + h$. Quando h tende a zero, il punto c, compreso tra x e $x + h$, tende a x. Poiché f è continua, $f(c)$ tende a $f(x)$ e quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \tag{1.11}$$

Dunque $F'(x) = f(x)$.

2. (Formula di Newton–Leibniz)

Sia $G(x)$ una qualunque primitiva di $f(x)$ su $[a, b]$. Poiché

$$G'(x) = f(x) = F'(x)$$

le due funzioni $G(x)$ e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ hanno la *stessa derivata sull'intervallo* $[a, b]$. Quindi differiscono per una costante:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \tag{1.12}$$

Ponendo in questa uguaglianza prima $x = b$ e poi $x = a$ e sottraendo, si ottiene la tesi:

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= \Big[\int_a^b f(t)\,dt + c \Big] - \Big[\int_a^a f(t)\,dt + c \Big] && (1.13) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt && (1.14) \end{aligned}$$

come si voleva dimostrare. Q.E.D.

1.3 Integrazione per parti

Teorema 1.3 (Integrazione per parti)**.** *Siano* $I \xrightarrow{F} \mathbb{R}$, $I \xrightarrow{G} \mathbb{R}$ *due funzioni di classe* C^1 *sullo stesso intervallo* I*, e siano* f, g *le rispettive derivate. Allora vale la seguente* formula di integrazione per parti *per l'integrale indefinito:*

$$\int Fg = FG - \int fG \tag{1.15}$$

Dimostrazione. Per la Regola di Leibniz,

$$(FG)' = fG + Fg, \tag{1.16}$$

da cui ricaviamo $Fg = (FG)' - fG$. Dunque,

$$\begin{aligned} \int Fg &= \int (FG)' - \int fG \\ &= FG - \int fG \end{aligned} \tag{1.17}$$

(perché, per definizione, una primitiva di $(FG)'$ è FG).

Osservazione. Si ricordi che l'*integrale indefinito* $\int f$ – dove f è una funzione definita su un intervallo I di $\mathbb{R}$ – non denota una singola funzione, ma l'*insieme di tutte le funzioni* (dette primitive di f) definite sull'intervallo I la cui derivata è f. Per un ben noto teorema[1], se F è una particolare di tali primitive, l'insieme $\int f$ è costituito allora da tutte le funzioni $F + c$, dove c è una costante reale arbitraria:

$$\int f = F + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

[1]Il teorema dice: *Siano* I *un intervallo di* $\mathbb{R}$*,* g *e* h *due funzioni derivabili su* I*. Se* $g' = h'$*, allora* g *e* h *differiscono per una costante.*

1.4 Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$

Teorema 1.4 (Integrabilità di $1/x^a$ in un intorno di $+\infty$). *L'integrale generalizzato*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \qquad \begin{cases} \text{\emph{è divergente a} } +\infty & \text{\emph{se} } a \le 1 \\ \text{\emph{è convergente}} & \text{\emph{se} } a > 1 \end{cases} \tag{1.18}$$

Dimostrazione Se $a = 1$, abbiamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln 1) = +\infty \tag{1.19}$$

e quindi l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ è divergente.

Se $a \neq 1$, si ha

$$\int_1^t \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{1-a}\Big[x^{1-a}\Big]_1^t = \frac{1}{1-a}(t^{1-a} - 1) \tag{1.20}$$

Ora

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1-a}(t^{1-a} - 1) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 1 \\ \dfrac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Riassumendo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \qquad \begin{cases} \text{è divergente a } +\infty & \text{se } a \le 1 \\ \text{è convergente} & \text{se } a > 1 \end{cases} \tag{1.21}$$

Q.E.D.

1.5 Struttura dello spazio delle soluzioni di un'equazione lineare

Notazioni. Partiamo da un'equazione lineare non omogenea

$$y' + a(x)\,y = f(x) \tag{1.22}$$

dove $a(x)$ e $f(x)$ sono due funzioni (assegnate) continue su uno *stesso intervallo* I di $\mathbb{R}$.

Chiamiamo D l'operatore differenziale[2] che manda una qualunque funzione $y \in C^1(I)$ in

$$Dy = y' + a(x)\,y$$

Si vede senza difficoltà che l'operatore D è lineare, cioè soddisfa:

$$\begin{aligned} D(y_1 + y_2) &= Dy_1 + Dy_2 \\ D(\lambda y) &= \lambda Dy \end{aligned}$$

per ogni $y, y_1, y_2 \in C^1(I)$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lo spazio

$$\operatorname{Ker} D = \{y \in C^1(I) | \quad Dy = 0\}, \tag{1.23}$$

che si chiama *nucleo* di D, è lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione *omogenea*

$$y' + a(x)\,y = 0 \tag{1.24}$$

Lo spazio $\operatorname{Ker} D$ contiene la funzione nulla, perché ovviamente la funzione identicamente nulla soddisfa l'equazione omogenea.

Teorema 1.5 (Struttura dello spazio delle soluzioni di un'equazione lineare)**.** *Consideriamo le due equazioni:*

$$y' + a(x)\,y = f(x) \qquad \textit{Equazione lineare non-omogenea} \tag{1.25}$$

$$y' + a(x)\,y = 0 \qquad \textit{Equazione lineare omogenea associata} \tag{1.26}$$

dove $a(x)$ e $f(x)$ sono due funzioni continue su uno stesso intervallo I di $\mathbb{R}$. Sia y_p una soluzione particolare (che pensiamo fissata una volta per tutte) dell'equazione non omogenea (1.25) e chiamiamo $\mathcal{S}$ lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare non omogenea (1.25). Allora

$$\mathcal{S} = y_p + \operatorname{Ker} D \tag{1.27}$$

In modo più esplicito:

(a) Ogni soluzione $y \in \mathcal{S}$ si scrive come $y = y_p + y_0$, con $y_0 \in \operatorname{Ker} D$.

(b) Ogni funzione del tipo $y_p + y_0$, con $y_0 \in \operatorname{Ker} D$, appartiene a $\mathcal{S}$.

[2] Si può vedere, ad esempio, D come un operatore il cui dominio è $C^1(I)$ e il cui codominio è $C^0(I)$. Infatti, se y è in $C^1(I)$, la funzione $Dy = y' + a(x)\,y$ è continua.

Dimostrazione Dimostriamo le due implicazioni *(a)* e *(b)*.

(a) Se $y \in \mathcal{S}$*, allora la funzione* y *si scrive come* $y = y_p + y_0$*, con* $y_0 \in \operatorname{Ker} D$.

L'ipotesi $y \in \mathcal{S}$ può essere riscritta come $D(y) = f(x)$; e l'ipotesi che y_p sia una soluzione particolare, si può scrivere come: $D(y_p) = f(x)$. Dunque, per la linearità di D,

$$D(y - y_p) = D(y) - D(y_p) = f(x) - f(x) = 0$$

L'uguaglianza $D(y - y_p) = 0$ dice che $y - y_p$ appartiene a $\operatorname{Ker} D$. Poniamo $y - y_p = y_0$. Allora $y = y_p + y_0$, con $y_0 \in \operatorname{Ker} D$. Dunque abbiamo dimostrato l'inclusione: $\mathcal{S} \subseteq y_p + \operatorname{Ker} D$.

(b) Se $y = y_p + y_0$*, con* $y_0 \in \operatorname{Ker} D$*, allora* $y \in \mathcal{S}$.

Per ipotesi, $y = y_p + y_0$, con $D(y_0) = 0$ e $D(y_p) = f(x)$. Per la linearità dell'operatore D,

$$D(y) = D(y_0 + y_p) = D(y_0) + D(y_p) = 0 + f(x) = f(x)$$

Abbiamo allora dimostrato che $D(y) = f(x)$, ossia che $y = y_0 + y_p$ appartiene allo spazio delle soluzioni $\mathcal{S}$. Dunque, abbiamo dimostrato l'inclusione: $y_p + \operatorname{Ker} D \subseteq \mathcal{S}$.

Concludiamo allora che è vera la tesi:

$$\mathcal{S} = y_p + \operatorname{Ker} D$$

Q.E.D.

1.6 Proiezione di un vettore lungo un altro

Teorema 1.6 (Proiezione di un vettore lungo un altro)**.** *Sia* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ *un vettore non nullo. Ogni vettore* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ *si scrive, in modo unico, come*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp} \tag{1.28}$$

con $\mathbf{a}_{\parallel}$ *parallelo a* $\mathbf{b}$ *(cioè, multiplo di* $\mathbf{b}$*) e* $\mathbf{a}_{\perp}$ *ortogonale a* $\mathbf{b}$*. Il vettore* $\mathbf{a}_{\parallel}$ *si denota* $\mathbf{P_b}(\mathbf{a})$ *e si chiama* proiezione ortogonale *di* $\mathbf{a}$ *lungo* $\mathbf{b}$*.*

Si ha:

$$\mathbf{P_b}(\mathbf{a}) = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\right)\mathbf{b} \tag{1.29}$$

In particolare, se $|\mathbf{u}| = 1$*, vale la formula:*

$$P_{\mathbf{u}}\,\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{u} \qquad \textit{(Solo se } |\mathbf{u}| = 1\textit{)}.$$

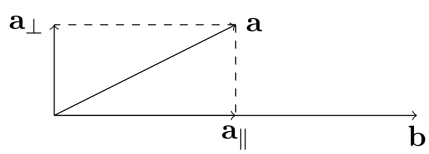


Figura 1: Il vettore $\mathbf{a}_{\parallel}$, denotato anche $\mathbf{P_b}(\mathbf{a})$, si chiama *proiezione ortogonale* di $\mathbf{a}$ lungo $\mathbf{b}$

Dimostrazione Si deve avere $P_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = t\mathbf{b}$, per un opportuno scalare $t \in \mathbb{R}$. Il vettore $\mathbf{a} - P_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a} - t\mathbf{b}$ è ortogonale a $\mathbf{b}$ se e solo se

$$(\mathbf{a} - t\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}) = 0$$

ossia (per bilinearità) se e solo se

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - t(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) = 0 \tag{1.30}$$

Questa è un'equazione di primo grado in t. Poiché $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \neq 0$ (perché $\mathbf{b} \neq 0$), l'equazione (1.30) ha un'unica soluzione

$$t = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}$$

Dunque, la proiezione ortogonale di $\mathbf{a}$ lungo $\mathbf{b}$ è

$$P_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\right)\mathbf{b} \tag{1.31}$$

Q.E.D.

Osservazione Si noti che la *lunghezza* del vettore $P_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$, vettore proiezione di $\mathbf{a}$ lungo $\mathbf{b}$, è data da:

$$\begin{aligned} |P_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}| &= \left|\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\right|\,|\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|^2}\,|\mathbf{b}| \\ &= \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|} \end{aligned}$$

In particolare, se $\mathbf{u}$ è unitario, cioè se $|\mathbf{u}| = 1$, la lunghezza di $P_{\mathbf{u}}\,\mathbf{a}$ è data da

$$|P_{\mathbf{u}}\,\mathbf{a}| = |\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}| \qquad \text{(Solo se } |\mathbf{u}| = 1\text{).}$$

1.7 Derivata di un vettore di lunghezza costante

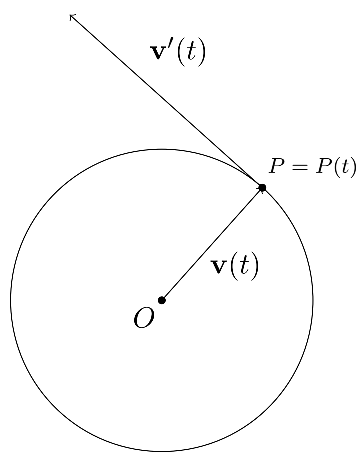
Teorema 1.7 (Derivata di un vettore di lunghezza costante)**.** *Se la lunghezza di un vettore* $\mathbf{v}(t)$ *in* $\mathbb{R}^3$ *(o* $\mathbb{R}^2$*) rimane costante, al variare di* t *in un intervallo* I *di* $\mathbb{R}$*, allora il vettore derivato* $\mathbf{v}'(t)$ *è ortogonale a* $\mathbf{v}(t)$*.*

Dimostrazione Poiché $|\mathbf{v}(t)|^2 = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ è costante, la sua derivata (che si calcola con la *Regola di Leibniz*) è nulla:

$$0 = (\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t))' = \mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) = 2\mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t)$$

Ne segue che $\mathbf{v}'(t)$ è ortogonale a $\mathbf{v}(t)$. Q.E.D.

Osservazione *(Una interpretazione cinematica.)* Supponiamo che $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^2$ $(t \in \mathbb{R})$ abbia lunghezza costante. Se pensiamo a $\mathbf{v}(t)$ come a un vettore spiccato dall'origine O di $\mathbb{R}^2$, tale vettore, avendo lunghezza costante, descrive il moto di un punto $P = P(t)$ che si muove sulla circonferenza di centro O e raggio uguale alla lunghezza di $\mathbf{v}(t)$.



Il vettore $\mathbf{v}'(t)$ si interpreta allora come il vettore velocità istantanea all'istante t. Pertanto $\mathbf{v}'(t)$ è tangente alla traiettoria (la circonferenza) e quindi è ortogonale al raggio $\mathbf{v}(t)$. (Il fatto che $\mathbf{v}(t)$ abbia lunghezza costante non implica che $\mathbf{v}'(t)$ abbia lunghezza costante; ossia, il moto è circolare, ma non necessariamente uniforme).

1.8 Equivalenza di due definizioni di curvatura

Definizione 1.8 (Curvatura. Prima definizione.)**.** *La* curvatura *di una curva* $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$, $s \longmapsto \underline{\alpha}(s)$, parametrizzata alla lunghezza d'arco*, in* $s \in I$ *è il modulo del vettore accelerazione:*

$$\kappa(s) = \left|\mathbf{T}'(s)\right| = \left|\underline{\alpha}''(s)\right| \tag{1.32}$$

Definizione 1.9 (Curvatura. Seconda definizione.)**.** *Sia* P *un punto fissato sulla curva* $\underline{\alpha}$*. Il limite (se esiste)*

$$\lim_{Q \to P} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta s} \tag{1.33}$$

al tendere del punto Q *sulla curva* $\underline{\alpha}$ *al punto* P*, si chiama* curvatura *della curva* $\underline{\alpha}$ *nel punto* P*.*

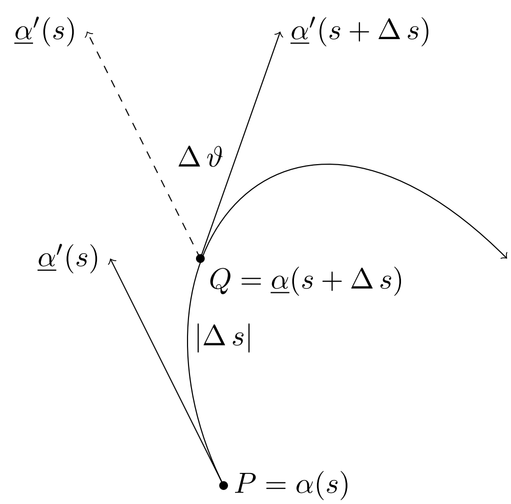


Figura 2: $\Delta\vartheta$ è l'angolo (positivo) tra i due vettori tangenti unitari $\underline{\alpha}'(s + \Delta s)$ e $\underline{\alpha}'(s)$, tangenti alla curva $\underline{\alpha}$ rispettivamente nei punti $Q = \alpha(s + \Delta s)$ e $P = \alpha(s)$. Poiché il parametro è la lunghezza d'arco (misurata a partire da un punto qualunque sulla curva), la distanza, misurata sulla curva, tra P e Q è data da $|\Delta s|$. Il rapporto $\Delta\vartheta/|\Delta s|$ dà una misura di quanto la curva $\underline{\alpha}$ si discosta dalla direzione tangente nel punto $\underline{\alpha}(s)$ lungo il tratto lungo $|\Delta s|$. Il limite $\kappa(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \Delta\vartheta/|\Delta s|$ è, per definizione, la curvatura nel punto $P = \underline{\alpha}(s)$. La curvatura $\kappa(s)$ misura la *rapidità con la quale la curva si discosta dalla direzione tangente.*

Teorema 1.10 (Equivalenza delle due definizioni di curvatura)**.** *Sia $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ una curva di classe*[3] *C^2 e regolare*[4]*, parametrizzata mediante la lunghezza d'arco. Fissiamo un punto $P = \underline{\alpha}(s)$ sulla curva e sia $Q = \underline{\alpha}(s + \Delta s)$ un punto sulla curva vicino a P. Chiamiamo $\Delta\vartheta(> 0)$ l'angolo fra i vettori tangenti in P e Q. Definiamo la curvatura $\kappa(s)$, $s \in I$, come:*

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|} \tag{1.34}$$

Allora $\kappa(s)$ è uguale al modulo del vettore accelerazione $\underline{\alpha}''(s)$:

$$\kappa(s) = |\underline{\alpha}''(s)| \tag{1.35}$$

Nota. *Poiché, per definizione, $\mathbf{T}(s) = \underline{\alpha}'(s)$, e quindi $\underline{\alpha}''(s) = \mathbf{T}'(s)$, l'uguaglianza (1.35) si può scrivere anche:*

$$\kappa(s) = |\mathbf{T}'(s)| \tag{1.36}$$

Dimostrazione Poiché i vettori tangenti $\underline{\alpha}'(s)$ e $\underline{\alpha}'(s + \Delta s)$ sono unitari (cioè di lunghezza uno) e formano un angolo $\Delta\vartheta$, si ha

$$|\underline{\alpha}'(s + \Delta s) - \underline{\alpha}'(s)| = 2 \sin \frac{\Delta\vartheta}{2} \tag{1.37}$$

come si vede dalla figura qui sotto:

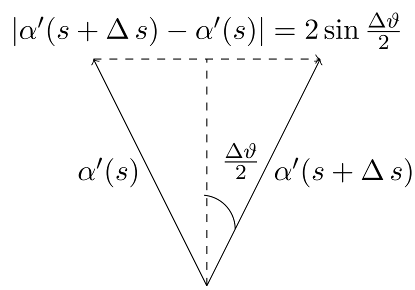


Figura 3: Il lato del triangolo isoscele è lungo 1 e l'angolo al vertice è $\Delta\vartheta$. Quindi la base è $2 \sin \frac{\Delta\vartheta}{2}$. Ma la base è la differenza vettoriale tra i lati; quindi la sua lunghezza è $|\underline{\alpha}'(s + \Delta\, s) - \underline{\alpha}'(s)|$. Dunque $|\underline{\alpha}'(s + \Delta\, s) - \underline{\alpha}'(s)| = 2 \sin \frac{\Delta\vartheta}{2}$.

Dunque,

$$\begin{aligned} \frac{|\underline{\alpha}'(s + \Delta\, s) - \underline{\alpha}'(s)|}{|\Delta s|} &= \frac{2 \sin \frac{\Delta\vartheta}{2}}{|\Delta s|} \\ &= \frac{\sin \frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|} \end{aligned}$$

[3]Una curva parametrizzata $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ si dice di *classe* C^2 se le sue componenti $x(t), y(t), z(t)$ sono funzioni di classe C^2, cioè derivabili due volte con derivata seconda continua.

[4]Una curva parametrizzata $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ si dice *regolare* se il suo vettore tangente $\underline{\alpha}'(t)$ è diverso dal vettore nullo, per ogni $t \in I$.

Si noti che quando $\Delta s \to 0$, anche $\Delta\vartheta \to 0$. Allora, quando $\Delta s \to 0$, il primo membro tende a $|\underline{\alpha}''(s)|$, mentre il secondo membro tende[5] a $\kappa(s)$. Dunque, abbiamo dimostrato che

$$\kappa(s) = |\underline{\alpha}''(s)| \tag{1.38}$$

Q.E.D.

[5]Si noti che $\lim_{\Delta\vartheta\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}} = 1$ e $\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|} = \kappa(s)$ per definizione.

1.9 Decomposizione dell'accelerazione

Ricordiamo alcune nozioni sulle parametrizzazioni di una curva.

Sia $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ una curva regolare (cioè soddisfacente: $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$). Fissato $t_0 \in I$, si chiama *lunghezza d'arco (a partire da t_0)* la funzione φ, denotata più semplicemente s, così definita:

$$I \xrightarrow{\varphi} J, \qquad t \longmapsto \varphi(t) = s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau \tag{1.39}$$

dove $J = \varphi(I)$. L'interpretazione è semplice: $s(t)$ è la lunghezza (con segno) dell'arco di curva dal valore t_0 al valore t del parametro, ossia è la distanza, *misurata sulla curva*, dal punto $\alpha(t_0)$ al punto $\alpha(t)$. Se $t > t_0$, $s(t) > 0$; se $t < t_0$, $s(t) < 0$.

La funzione φ è invertibile. Infatti, è suriettiva (perché, per definizione, il suo codominio coincide con la sua immagine: $J = \varphi(I)$) ed è iniettiva, in quanto è strettamente crescente, perché $\varphi'(t) = |\alpha'(t)| > 0$. In generale, il parametro sull'intervallo iniziale I si denota t, mentre il parametro sull'intervallo J si chiama s (*parametro lunghezza d'arco*) e le due funzioni $I \xrightarrow{\varphi} J$ e $J \xrightarrow{\varphi^{-1}} I$ (l'una inversa dell'altra) si denotano, rispettivamente, $s = s(t)$ e $t = t(s)$. Si noti che, per la regola di derivazione della funzione inversa (qui è utile la notazione di Leibniz),

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)} = \frac{1}{|\alpha'(t(s))|} \tag{1.40}$$

Si consideri ora curva $\hat{\alpha} = \alpha \circ \varphi^{-1}$:

$$J \xrightarrow{\hat{\alpha}} \mathbb{R}^3, \qquad s \longmapsto \hat{\alpha}(s) = \alpha(\varphi^{-1}(s)) = \alpha(t(s)) \tag{1.41}$$

La curva $\hat{\alpha}$ si chiama *riparametrizzazione alla lunghezza d'arco (o con lunghezza unitaria)* della curva α. Il seguente diagramma aiuta a chiarire la situazione.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{R}^3 \\ J \arrow[ur, "\hat{\alpha} = \alpha \circ \varphi^{-1}"'] \arrow[u, bend left=60, "\varphi^{-1}"] & \end{tikzcd}$$

Questa curva $\hat{\alpha}$ ha *velocità scalare unitaria*. Infatti, usando la regola della derivata della funzione composta, otteniamo:

$$\left|\frac{d}{ds}\hat{\alpha}(s)\right| = \left|\frac{d}{ds}\alpha(t(s))\right| = \left|\left[\frac{d\alpha(t)}{dt}\right]_{t=t(s)} \frac{dt}{ds}\right| = \left|\alpha'(t(s))\right| \; \frac{1}{|\alpha'(t(s))|} = 1 \tag{1.42}$$

Teorema 1.11 (Decomposizione dell'accelerazione lungo **T** e **N**). *Sia $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ una curva regolare e di classe C^2, parametrizzata con un parametro arbitrario. Allora l'accelerazione $\alpha''(t)$ si decompone nel modo seguente:*

$$\alpha''(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N} \tag{1.43}$$

dove $v(t) = |\alpha'(t)|$ è la velocità scalare e κ è la curvatura.

Dimostrazione Se $\hat{\alpha}$ è la riparametrizzazione di α alla lunghezza d'arco (a partire da un qualunque valore iniziale $t_0 \in I$), possiamo vedere α come funzione composta: $\alpha = \hat{\alpha} \circ \varphi$, dove $\varphi(t) = s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau$ è la funzione lunghezza d'arco (si veda il paragrafo precedente):

$$\alpha(t) = \hat{\alpha}(\varphi(t)) = \hat{\alpha}(s(t)) \tag{1.44}$$

Possiamo allora calcolare le derivate successive di $\alpha(t)$ usando la regola di derivazione delle funzioni composte. Per la derivata prima di $\alpha(t)$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{d\hat{\alpha}(s(t))}{dt} \\ &= \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{\alpha}(s)}{ds} \\ &= v\mathbf{T}(s) \end{aligned}$$

dove $v = v(t) = ds/dt = |\alpha'(t)|$ è la velocità scalare La derivata seconda di $\alpha(t)$ (cioè l'accelerazione $\alpha''(t)$) è allora data da:

$$\begin{aligned} \alpha''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\left(v\mathbf{T}(s)\right) \\ &= \frac{dv}{dt}\mathbf{T}(s) + v\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds}\frac{ds}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt}\mathbf{T}(s) + v^2\kappa\mathbf{N}(s) \end{aligned}$$

perché $\frac{ds}{dt} = v$ e (per definizione di κ e di **N**) $\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} = \kappa\mathbf{N}$. Q.E.D.

Osservazione 1 Se denotiamo $\rho = 1/\kappa$ il raggio di curvatura nel punto $\alpha(t)$ (nell'ipotesi $\kappa \neq 0$), la (1.43) si può scrivere:

$$\alpha''(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N} \tag{1.45}$$

Osservazione 2 (**Altro modo per trovare N**) Ci sono diversi modi per calcolare **N**. Un modo consiste nel trovare prima **T** e **B**, e poi calcolare $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$. Un altro modo (che qualche volta può risultare vantaggioso), è il seguente. Partiamo dall'uguaglianza trovata sopra:

$$\alpha'(t) = v\mathbf{T}(s) = |\alpha'(t)|\mathbf{T}(s) = |\alpha'(t)|\mathbf{T}(s(t)) \tag{1.46}$$

(dove $v(t) = |\alpha'(t)|$ è la velocità scalare, e scriviamola come

$$\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \mathbf{T}(s(t)) = \mathbf{T}(t) \tag{1.47}$$

Il termine a primo membro è il vettore velocità $\alpha'(t)$ normalizzato (cioè, diviso per la sua lunghezza).

Calcoliamo la derivata rispetto a t:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} &= \frac{d}{dt}\mathbf{T}(t) \\ &= \frac{d}{dt}\mathbf{T}(s(t)) \\ &= \frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\mathbf{T}(s(t)) \\ &= vk\mathbf{N} \end{aligned}$$

(perché $\frac{d}{ds}\mathbf{T}(s) = k\mathbf{N}(s)$). Siccome $|\mathbf{N}| = 1$,

$$|\mathbf{T}'(t)| = |vk\mathbf{N}| = vk \tag{1.48}$$

Pertanto,

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{vk} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \tag{1.49}$$

Riassumendo: per trovare $\mathbf{N}$ (quando la parametrizzazione è arbitraria) si può procedere nel modo seguente:

- Si calcola $\alpha'(t)$ e lo si normalizza. Si ottiene così il vettore $\mathbf{T}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$
- Si calcola la derivata $\mathbf{T}' = \frac{d}{dt}\mathbf{T}(t)$, e la si normalizza. Si ottiene così

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{vk} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \tag{1.50}$$

Questo metodo per trovare $\mathbf{N}$ talvolta può essere vantaggioso (questo accade quando le componenti di $\mathbf{T}$ non sono troppo complicate). In altri casi, i conti possono essere molto laboriosi, e allora sarà meglio trovare $\mathbf{N}$ come $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$.

1.10 Il prodotto misto

Teorema 1.12 (Il prodotto misto come volume orientato)**.** *Siano* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *vettori nello spazio vettoriale euclideo orientato* $\mathbb{R}^3$*. Il prodotto misto*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \tag{1.51}$$

è il volume orientato del parallelepipedo costruito su $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *(in questo ordine).*

Dimostrazione Per la definizione di prodotto scalare, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ è dato da:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|\ |\mathbf{c}|\ \cos\gamma$$

dove γ è l'angolo tra $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Per la definizione di prodotto vettoriale,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \text{Area Parallelogramma}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Inoltre, il valore assoluto di $|\mathbf{c}|\ \cos\gamma$ è l'altezza del parallelepipedo costruito su $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Quindi, il valore assoluto del prodotto misto è uguale a

$$\begin{aligned}|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| &= [\text{Area Parallelogramma}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})]\ [\text{Altezza Parallelepipedo}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})] \\ &= \text{Volume Parallelepipedo}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\end{aligned}$$

Inoltre, se γ è acuto, si ha $\cos\gamma > 0$ e la terna $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ (se non è complanare) è orientata come $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Se invece γ è ottuso, si ha $\cos\gamma < 0$, e la terna $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ è orientata in modo discorde rispetto a $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Quindi il prodotto misto dà il *volume orientato*, nel senso che il suo valore assoluto dà il volume del parallelepipedo, mentre il suo segno dice se la terna ordinata $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ è positivamente o negativamente orientata. Q.E.D.

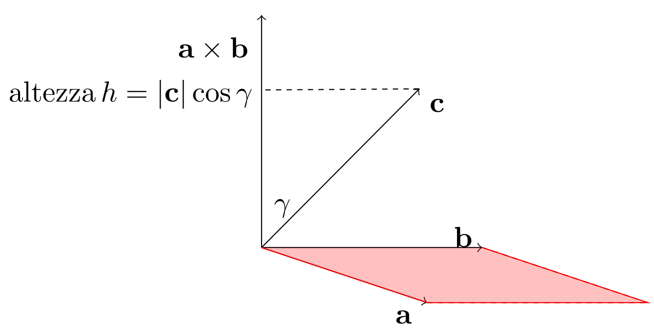


Figura 4: Il prodotto misto $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|\,|\mathbf{c}| \cos\gamma$ è il volume orientato del parallelepipedo definito dagli spigoli $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Infatti, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ è l'area di base, e (il valore assoluto di) $|\mathbf{c}| \cos\gamma$ è l'altezza.

Osservazione Si noti che tre vettori sono *complanari* (o *linearmente dipendenti*) se, e solo se, il loro prodotto misto è nullo.