Politecnico di Milano
Corso di Analisi e Geometria 1

Federico Lastaria
federico.lastaria@polimi.it

Dimostrazioni da conoscere per la prima prova.
14 Ottobre 2019

Indice

1 Teoremi per la prima prova in itinere. Dimostrazioni.

1.1 Irrazionalità di $\sqrt{2}$

Teorema 1.1 (Irrazionalità di $\sqrt{2}$). *Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2.*

Dimostrazione.[1] Supponiamo, per assurdo, che esistano due numeri interi positivi p, q tali che

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \tag{1.1}$$

Non è restrittivo supporre che gli interi p e q siano primi tra loro, cioè che non abbiano fattori primi in comune. (Altrimenti, riduciamo la frazione $\frac{p}{q}$ ai minimi termini). Da (1.1) segue

$$p^2 = 2q^2 \tag{1.2}$$

Dall'uguaglianza (1.2) segue che p^2 è pari. Quindi anche p è pari:

$$p = 2a \tag{1.3}$$

(Infatti, se p fosse dispari, anche il suo quadrato p^2 sarebbe dispari). Sostituendo $p = 2a$ nell'uguaglianza (1.2), si ottiene

$$(2a)^2 = 2q^2 \tag{1.4}$$

da cui

$$2a^2 = q^2 \tag{1.5}$$

Ma allora q^2 è pari e quindi anche q è pari. Ne segue che p e q sono entrambi pari. Siamo arrivati a una contraddizione, perché avevamo supposto che p e q non avessero fattori primi in comune. Q.E.D.

Osservazione. Abbiamo dunque dimostrato che la diagonale d e il lato l di un quadrato sono *incommensurabili tra loro, cioè non hanno alcun sottomultiplo in comune*. Questo significa che non esistono numeri interi m, n per i quali $\frac{1}{m}d = \frac{1}{n}l$. Infatti, se ciò accadesse, il rapporto m/n tra d e l sarebbe un numero razionale.

[1] Per seguire meglio la dimostrazione, richiamiamo alcuni fatti elementari. Un numero $m \in \mathbb{N}$ è pari se è divisibile per 2, cioè se si può scrivere $m = 2h$, $h \in \mathbb{N}$; è dispari se diviso per 2 dà resto 1, cioè se si può scrivere $m = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Se un numero $m = 2h$ è pari, il suo quadrato è pari. (Infatti, $m^2 = (2h)^2 = 2(2h^2)$). Se un numero $m = 2k+1$ è dispari, il suo quadrato è dispari. (Infatti, $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$).

1.2 Successioni monotòne limitate

Teorema 1.2 (Successioni monotòne limitate). *Ogni successione in $\mathbb{R}$ che sia crescente*

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots \tag{1.6}$$

e (superiormente) limitata è convergente. Precisamente, converge all'estremo superiore dell'insieme dei suoi termini.

Se invece una successione è decrescente e limitata, convergerà all'estremo inferiore dell'insieme dei suoi termini.

Dimostrazione. Sia (a_n), $n \in \mathbb{N}$, una successione crescente e limitata. Chiamiamo

$$A = \{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$$

l'insieme dei suoi elementi. Per ipotesi l'insieme A è (non vuoto e) limitato. Pertanto (qui si usa la completezza dei reali) A ha un estremo superiore. Poniamo $L = \sup A$.

Ricordiamo che, per definizione, l'estremo superiore L di A è *la minima limitazione superiore* di A, cioè l'unico numero $L \in \mathbb{R}$ che soddisfa queste due proprietà:

1. L è una limitazione superiore per A, cioè:

$$a_n \leq L \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}$$

2. Nessun numero $L' < L$ è una limitazione superiore per A, cioè:

Per ogni $L' < L$ esiste un $a_k \in A$ per il quale $L' < a_k$.

Dimostriamo che a_n converge a L. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Siccome $L - \varepsilon < L$, il numero $L - \varepsilon$ non è una limitazione superiore dell'insieme $A = \{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$. Dunque esiste un intero k per il quale $L - \varepsilon < a_k$. Poiché la successione è crescente, per tutti gli $n > k$ si ha $a_k < a_n$ e quindi $L - \varepsilon < a_n$, definitivamente (cioè, per tutti gli n maggiori di k). Ma per ogni n si ha $a_n \leq L$. Riassumendo, si ha

$$L - \varepsilon < a_n \leq L$$

per tutti gli $n > k$. Per la stessa definizione di limite di una successione, si conclude allora che $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$. Q.E.D.

Osservazione. Si dimostra che in un campo ordinato $\mathbb{K}$, la proprietà delle successioni monotòne limitate ("*Ogni successione monotòna limitata converge in* $\mathbb{K}$") è equivalente alla proprietà dell'estremo superiore ("*Ogni sottoinsieme di* $\mathbb{K}$ *non vuoto e superiormente limitato ha una minima limitazione superiore*").

1.3 Prodotto di due numeri complessi. Formula di De Moivre.

Teorema 1.3 (Prodotto di due numeri complessi. Formula di De Moivre.)**.** *Il prodotto dei numeri complessi*

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad\qquad z' = r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta') \tag{1.7}$$

è il numero complesso:

$$z \cdot z' = rr'[\cos(\vartheta + \vartheta') + i\sin(\vartheta + \vartheta')] \tag{1.8}$$

In breve, quando si moltiplicano tra loro due numeri complessi, i moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano.

In particolare, vale la Formula di De Moivre:

$$[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)]^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) \tag{1.9}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= [r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)] \cdot [r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')] \\ &= rr'[(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta') + i(\sin\vartheta\cos\vartheta' + \cos\vartheta\sin\vartheta')] \\ &= rr'[\cos(\vartheta + \vartheta') + i\sin(\vartheta + \vartheta')] \end{aligned}$$

La Formula di De Moivre (1.9) segue subito dalla formula del prodotto (1.8), ponendo $z = z'$ e iterando. Q.E.D.

Osservazione. Dalla formula di moltiplicazione segue che l'inverso del numero $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ è

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} = r^{-1}(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)) \tag{1.10}$$

Dalle formule (1.8) e (1.10) segue che *il quoziente di due numeri complessi ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti*: se $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e $z' = r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')$, allora

$$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}(\cos(\vartheta' - \vartheta) + i\sin(\vartheta' - \vartheta)) \tag{1.11}$$

Osservazione. La formula di De Moivre permette di trovare (o ritrovare) diverse identità trigonometriche. Facciamo un esempio ($r = 1, n = 2$): da $(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^2 = \cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta$ segue, sviluppando il quadrato a primo membro

$$\cos^2\vartheta + 2i\cos\vartheta\sin\vartheta - \sin^2\vartheta = \cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta$$

e infine, *uguagliando le parti reali e i coefficienti delle parti immaginarie*:

$$\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta \qquad\qquad \sin 2\vartheta = 2\cos\vartheta\sin\vartheta$$

(In questo modo è molto più facile ricordare le formule).

1.4 Radici n-esime

Teorema 1.4 (Radici n-esime di un numero complesso). *Sia $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ un numero complesso non nullo e sia n un intero positivo. Esistono esattamente n numeri complessi che elevati alla potenza n-esima danno come risultato z. Tali numeri sono:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right], \qquad k = 0, 1, ..., n-1 \quad (1.12)$$

Ciascuno di tali numeri $z_0, ..., z_{n-1}$ si chiama una *radice n-esima* di z. Quindi il teorema dice che ogni numero complesso (non nullo) ha esattamente n radici n-esime. (Nel caso $z = 0$, le n radici n-esime sono coincidenti.)

Dimostrazione. Un numero complesso

$$w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \tag{1.13}$$

è una radice n-esima di z se $w^n = z$, ossia (per la formula di De Moivre) se

$$|w|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \tag{1.14}$$

Ora due numeri complessi, scritti in forma polare, sono uguali se e solo se hanno i moduli uguali, e gli argomenti *uguali a meno di multipli interi di* 2π:

$$|w|^n = r, \qquad n\alpha = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ma si vede facilmente che si ottengono n radici distinte soltanto per gli n valori $k = 0, 1, ..., (n-1)$, mentre dando a k un qualunque altro valore, si riottiene una delle radici $z_0, ..., z_{n-1}$. Quindi tutte le n radici n-esime distinte hanno modulo e argomento rispettivamente dati da

$$\sqrt[n]{r}, \qquad \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

Q.E.D.

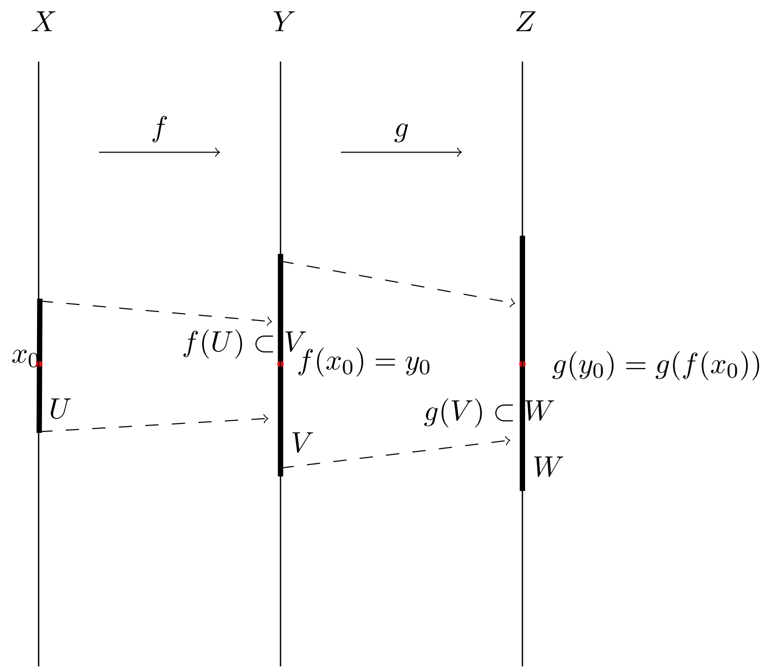
Osservazione. Si noti che le radici n-esime si trovano tutte sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{r}$ e sono equidistanziate tra loro, cioè sono i vertici di un poligono regolare di n lati.

1.5 Continuità della funzione composta

Teorema 1.5 (Composizione di funzioni continue). *Se* $X \xrightarrow{f} Y$ *e* $Y \xrightarrow{g} Z$ *sono funzioni continue* (X, Y, Z *sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$, *oppure, più in generale, spazi metrici), allora anche la funzione composta* $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ *è continua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Dimostrazione Sia $x_0 \in X$, poniamo $f(x_0) = y_0$, e sia W un qualunque intorno



di $g(f(x_0)) = g(y_0)$.

Per la continuità di g in y_0, esiste un intorno V di y_0 tale che $g(V) \subset W$. Del resto, poiché f è continua in x_0, esiste un intorno U di x_0 per il quale $f(U) \subset V$. Poiché da $f(U) \subset V$ segue $g(f(U)) \subset g(V)$, si ha

$$(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$$

Questo prova la continuità della funzione composta in x_0. Poiché x_0 è un punto arbitario di X, abbiamo dimostrato la continuità della funzione composta $g \circ f$.

Q.E.D.

1.6 Teorema degli Zeri

Teorema 1.6 (Teorema degli Zeri). *Siano* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervallo e* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione continua. Siano* a, b *due punti appartenenti a* I*, con* $a < b$*. Supponiamo che i valori* $f(a)$ *e* $f(b)$ *abbiano segni opposti (*$f(a) < 0$ *e* $f(b) > 0$*, o viceversa). Allora esiste almeno un punto* $\alpha \in (a, b)$ *in cui si ha* $f(\alpha) = 0$*.*

Dimostrazione La dimostrazione del Teorema degli Zeri è costruttiva, cioè presenta un algoritmo (detto **metodo di bisezione** o metodo dicotomico) per mezzo del quale è possibile trovare un punto in cui f si annulla. Per fissare le idee supponiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ e consideriamo il punto medio $c = \dfrac{a+b}{2}$ dell'intervallo $[a, b]$. Possono presentarsi due casi. Se $f(c) = 0$ il problema è risolto (abbiamo trovato uno zero di f). Se invece $f(c) \neq 0$, scegliamo tra i due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ quello in cui la funzione f assume valori discordi agli estremi. Tenuto conto delle nostre scelte iniziali ($f(a) < 0$ e $f(b) > 0$), si tratta di scegliere l'intervallo in cui la funzione assume valore negativo nell'estremo di sinistra e valore positivo nell'estremo di destra. Quindi se $f(c) \neq 0$, scegliamo l'intervallo $I_1 = [i_1, j_1]$ nel modo seguente :

$$I_1 = [i_1, j_1] = \begin{cases} [a, c] & se \quad f(c) > 0 \\ \\ [c, b] & se \quad f(c) < 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

Operiamo ora sull'intervallo $I_1 = [i_1, j_1]$ nello stesso modo in cui abbiamo operato sull'intervallo $[a, b]$. Precisamente: sia c_1 il punto medio di $[i_1, j_1]$. Se $f(c_1) = 0$ il problema è risolto (c_1 è uno zero di f). Altrimenti scegliamo tra i due intervalli $[i_1, c_1]$ e $[c_1, j_1]$ quello in cui la funzione assume valore negativo nell'estremo di sinistra e positivo nell'estremo di destra.

Iterando questo procedimento, si possono avere due casi:

1. Esiste un intero positivo k tale che la funzione si annulla nel punto medio c_k dell'intervallo $[i_k, j_k]$. In questo caso abbiamo trovato un punto c_k nel quale la funzione f si annulla, e la tesi del teorema è dimostrata.

2. La funzione non si annulla in nessun punto medio c_k. In questo caso otteniamo una successione infinita di intervalli compatti inscatolati

$$[i_1, j_1] \supset [i_2, j_2] \supset [i_3, j_3] \supset \cdots \supset [i_n, j_n] \supset \cdots$$

con le due seguenti proprietà:

(a) nell'estremo di sinistra di ogni intervallo la funzione assume valore negativo, mentre nell'estremo di destra assume valore positivo, cioè per ogni k $(0 \leq k \leq n)$ abbiamo $f(i_k) < 0$ e $f(j_k) > 0$.

(b) gli intervalli hanno ampiezza $j_k - i_k = \dfrac{b-a}{2^k}$

Abbiamo dunque costruito una successione di intervalli compatti inscatolati le cui ampiezze tendono a zero. Per il teorema sugli intervalli inscatolati (conseguenza della completezza di $\mathbb{R}$) esiste un unico numero reale α che appartiene a tutti gli intervallini $[i_n, j_n]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. A tale numero α convergono le due successioni i_n e j_n:

$$\lim_{n \to +\infty} i_n = \alpha = \lim_{n \to +\infty} j_n$$

Poiché f è continua in $x = \alpha$ ('f commuta con lim', nel senso che 'f lim = lim f'), abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} f(i_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} i_n\right) = f(\alpha) \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(j_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} j_n\right) = f(\alpha)$$

Ma poiché $f(i_n) < 0$ (per ogni n), risulta

$$f(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} f(i_n) \leq 0$$

(perché il limite di una successione di termini $f(i_n) < 0$ è certamente ≤ 0). Analogamente, poiché $f(j_n) > 0$ per ogni n, si deve avere

$$f(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} f(j_n) \geq 0$$

Poichè le due ultime disuguaglianze devono valere contemporaneamente, abbiamo $f(\alpha) = 0$ e quindi α è uno zero di f. Q.E.D.

1.7 Teorema dei Valori Intermedi

Teorema 1.7 (Teorema dei Valori Intermedi. Una funzione continua trasforma connessi in connessi)**.** *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua. Se a e b appartengono a I, la funzione f assume ogni valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$. Detto altrimenti, l'immagine $J = f(I)$ di f è un intervallo.*

In breve: *Le funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ trasformano intervalli in intervalli.*

Dimostrazione Siano $a' = f(a)$ e $b' = f(b)$ due punti di $f(I)$; supponiamo $a' < b'$. Sia w un numero tale che $a' < w < b'$. Dobbiamo dimostrare che $w \in f(I)$. Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - w, \qquad\qquad x \in [a, b]$$

Tale funzione è ovviamente continua sull'intervallo $[a, b]$ e si ha:

$$g(a) = f(a) - w = a' - w < 0 \qquad g(b) = f(b) - w = b' - w > 0 \tag{1.16}$$

Dunque la funzione g soddisfa le ipotesi del Teorema degli Zeri (1.6) sull'intervallo $[a, b]$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ per il quale $g(c) = f(c) - w = 0$, ossia $f(c) = w$, come si voleva dimostrare. Q.E.D.

Commento. Definiamo la seguente proprietà, detta di Darboux:

Proprietà (di Darboux). *Una funzione $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$, soddisfa la* proprietà di Darboux *se per ogni $x_{1,2} \in I$, f assume sull'intervallo $[x_1, x_2]$ ogni valore compreso tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$.*

Il teorema dei Valori Intermedi 1.7 si può allora enunciare dicendo che le funzioni continue su un intervallo soddisfano la proprietà di Darboux. Non è però vero il viceversa. Un controesempio è fornito dalla funzione seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

Si vede facilmente che questa funzione soddisfa la proprietà di Darboux. Ma f non è continua su $\mathbb{R}$, perché in $x_0 = 0$ presenta una discontinuità non eliminabile.

1.8 Derivabilità implica continuità

Teorema 1.8 (Derivabilità implica continuità)**.** *Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0.*

Dimostrazione. Partiamo dall'identità (valida per $x \neq x_0$)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

Allora[2]:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \left(\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \right) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

Questo prova che f è continua in x_0.

Un'altra dimostrazione è la seguente. Poiché f è differenziabile in x_0, si scrive

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + o(h) \qquad (\text{per } \ h \to 0)$$

Passando al limite:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) &= \lim_{h \to 0} \left[f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \right] \\ &= f(x_0) + \lim_{h \to 0} f'(x_0)h + \lim_{h \to 0} o(h) \\ &= f(x_0) + \lim_{h \to 0} f'(x_0)h + \lim_{h \to 0} h \frac{o(h)}{h} \\ &= f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0) \end{aligned}$$

Q.E.D.

[2] Si ricordi che se esistono i limiti di $g_1(x)$ e $g_2(x)$ per $x \to x_0$, allora *il limite della somma $g_1(x) + g_2(x)$ è la somma dei limiti.* Si noti che, a secondo membro, $f(x_0)$ è una costante e quindi $\lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$

1.9 Teorema di Fermat

Teorema 1.9 (Fermat)**.** *Sia* $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali definita su un insieme* $D \subset \mathbb{R}$*. Supponiamo che:*

1. x_0 *sia un punto di massimo (o di minimo) locale per* f*;*
2. x_0 *sia interno a* D*;*
3. f *sia derivabile in* x_0*.*

Allora x_0 *è un punto stazionario di* f*, cioè* $f'(x_0) = 0$*.*

Dimostrazione. Per fissare le idee, supponiamo che x_0 sia un punto di massimo locale per f. Poiché, per ipotesi, x_0 è al tempo stesso un punto interno al dominio D di f e un punto di massimo locale, esiste un intorno sufficientemente piccolo I di x_0 con le due proprietà seguenti[3]:

$$I \subset D \tag{1.18}$$

(perché x_0 è interno a D) e

$$\forall x \in I \qquad f(x) - f(x_0) \leq 0 \tag{1.19}$$

(perché x_0 è punto di massimo locale). Per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$, si ha allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \tag{1.20}$$

se $x > x_0$ e

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \tag{1.21}$$

si ricava[4] rispettivamente $f'(x_0) \leq 0$ e $f'(x_0) \geq 0$. Di conseguenza $f'(x_0) = 0$. Q.E.D.

Osservazione. Si noti che nel teorema dimostrato è essenziale l'ipotesi che x_0 sia interno a D. (Non basta che il punto x_0 appartenga a D). Ad esempio, la funzione $f(x) = x$ nell'intervallo $D = [0, 1]$ ha un punto di massimo locale in $x_0 = 1$, anche se la derivata (sinistra) di f in x_0 non è nulla (è uguale a 1). Naturalmente questo non contaddice il teorema di Fermat. Semplicemente non sono soddisfatte le ipotesi di tale teorema, perché il punto $x_0 = 1$ non è interno a $D = [0, 1]$.

[3]Sappiamo che esiste un intorno U di x_0 che soddisfa la condizione $U \subset D$ e esiste un intorno V di x_0 su cui vale $f(x) \leq f(x_0)$. Allora sull'intersezione $I = U \cap V$ (che è ancora un intorno di x_0) sono soddisfatte entrambe le condizioni.

[4]Qui si usa il teorema di *Permanenza del Segno*: *Sia* g *una funzione definita su un intorno* U *di un punto* x_0 *(con la possibile eccezione del punto* x_0*). Supponiamo che, per ogni* $x \in U \setminus x_0$*, si abbia* $g(x) \geq 0$ *e supponiamo che esista (finito) il limite* $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$*. Allora si ha* $L \geq 0$*.*

1.10 Teorema del Valore Medio (di Lagrange)

Teorema 1.10 (del Valore Medio, o di Lagrange). *Sia* $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione continua sull'intervallo compatto* $[a,b]$ *e derivabile sull'intervallo aperto* (a,b). *Allora esiste un punto* $\gamma \in (a,b)$ *per il quale si ha*

$$f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b-a) \tag{1.22}$$

Dimostrazione. Si consideri la funzione

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \tag{1.23}$$

definita sull'intervallo $[a,b]$. Tale funzione è continua su $[a,b]$, derivabile su (a,b) e assume lo stesso valore agli estremi:

$$g(a) = g(b) = 0$$

Quindi g soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Per tale teorema, esiste un punto γ in (a,b) in cui $g'(\gamma) = 0$. La derivata di $g(x)$ è

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Quindi si ha

$$0 = g'(\gamma) = f'(\gamma) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

che equivale a

$$f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b-a)$$

Q.E.D.

Osservazione. Il teorema di Lagrange ha la seguente interpretazione geometrica. Si noti che il numero $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta (secante) che passa per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, di equazione

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \tag{1.24}$$

Quindi il teorema afferma che esiste almeno un punto $(\gamma, f(\gamma))$ appartenente al grafico della funzione f in cui la retta tangente (il cui coefficiente angolare è $f'(\gamma)$) è parallela alla retta secante che unisce i due punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Si noti che la funzione ausiliaria (1.23) è la differenza tra l'ordinata del punto $(x, f(x))$ sul grafico di f e l'ordinata del punto di coordinate $(x, f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a))$ sulla retta secante.

1.11 Funzioni derivabili strettamente monotòne

Teorema 1.11 (Funzioni derivabili strettamente monotòne)**.** *Sia* $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione derivabile su un intervallo aperto* I *di* $\mathbb{R}$*. Se* $f'(x) > 0$ *(oppure* < 0*) in ogni punto* $x \in I$*, allora* f *è strettamente crescente (strettamente decrescente) su* I*.*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per il caso di funzioni con derivata positiva in ogni punto. (L'altro caso si tratta in modo analogo).

Siano x_1, x_2 due punti di I, con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange esiste un punto c, compreso tra x_1 e x_2, per il quale si ha:

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$$

Poiché per ipotesi $f'(c) > 0$ e $x_1 - x_2 < 0$, si deve avere $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Abbiamo allora dimostrato che, per ogni $x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Dunque f è strettamente crescente su I. Q.E.D.

Osservazione. Il teorema non si inverte: se una funzione è strettamente crescente su un intervallo I ed è derivabile in I, allora si avrà senz'altro $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$, ma in qualche punto la derivata potrebbe annullarsi. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$.

Osservazione. L'implicazione "$f' > 0 \implies f$ *strettamente crescente*" non vale se il dominio di f non è un intervallo. Ad esempio, la funzione $f(x) = -1/x$, definita su $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (che non è un intervallo) ha derivata positiva su D, ma f non è strettamente crescente sul suo dominio D. Ovviamente f è crescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$ ed è crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$, ma non è crescente sul suo dominio $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (che non è un intervallo).

1.12 Funzioni con derivata nulla su un intervallo

Teorema 1.12 (Funzioni con derivata nulla su un intervallo)**.** *Una funzione definita su un intervallo aperto $I = (a, b)$ e con derivata nulla in ogni punto di tale intervallo è costante.*

Dimostrazione. Prendiamo due punti qualunque x_1, x_2 in (a, b), $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange – applicato all'intervallo $[x_1, x_2]$ – esiste un punto c, compreso tra x_1 e x_2, per il quale si ha:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

Ne segue $f(x_1) = f(x_2)$. Quindi f è costante. Q.E.D.

Osservazione. Si noti che in questo teorema è essenziale l'ipotesi che il dominio della funzione sia un *intervallo* (un sottoinsieme *connesso* di $\mathbb{R}$).

Esempio 1. La funzione

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ 1 & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

ha derivata nulla in ogni punto del suo dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ma non è costante. (Si noti che $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ non è un intervallo di $\mathbb{R}$, cioè non è *connesso*).

Esempio 2. La funzione

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

ha derivata nulla in ogni punto del suo dominio (come si verifica facilmente calcolando la derivata), ma non è costante. Precisamente,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pi/2 \qquad \text{per } x > 0$$

e

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\pi/2 \qquad \text{per } x < 0$$

1.13 Teorema di de l'Hospital

Teorema 1.13 (de L'Hospital. Caso $\frac{0}{0}$.). *Siano f e g due funzioni continue sull'intervallo $[x_0, b]$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) e derivabili in (x_0, b). Supponiamo che valgano le seguenti condizioni:*

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
2. $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (x_0, b)$.
3. *Esiste (finito o infinito) il limite*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \tag{1.25}$$

Allora esiste anche il limite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *ed è uguale al precedente:*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \tag{1.26}$$

Dimostrazione. (Per il caso L finito). Premettiamo un'osservazione. Sia x un qualunque punto in (x_0, b). Allora si può scrivere

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

per un opportuno γ compreso tra x_0 e x, cioè soddisfacente: $x_0 < \gamma < x$. Per dimostrarlo, applichiamo il teorema di Cauchy alla coppia di funzioni f,g sull'intervallo $[x_0, x]$. Poiché $f(x_0) = g(x_0) = 0$, per il teorema di Cauchy si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

per un opportuno γ soddisfacente $x_0 < \gamma < x$, come si voleva dimostrare.

A questo punto possiamo concludere, in modo un po' sbrigativo ma sostanzialmente corretto, nel modo seguente. Quando x tende a x_0, il punto γ, compreso tra x e x_0, deve tendere a x_0. Quindi, poiché

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

e $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, anche il limite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ deve esistere, e deve essere uguale a L. □

Commento. Se vogliamo essere più rigorosi, possiamo arrivare alla tesi usando la "ε-δ definizione" di limite. Prendiamo allora un arbitrario $\varepsilon > 0$. Poiché, per ipotesi, $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\forall t \in (x_0, x_0 + \delta) \qquad \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \varepsilon \tag{1.27}$$

Ora prendiamo un qualunque x in $(x_0, x_0+\delta)$. Per quanto abbiamo visto sopra,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

per un opportuno γ soddisfacente $x_0 < \gamma < x < x_0+\delta$. Siccome tale γ è compreso tra x_0 e $x_0+\delta$, per la 1.27 si ha $\left|\dfrac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} - L\right| < \varepsilon$ e quindi

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} - L\right| < \varepsilon$$

Questo prova, per definizione di limite, che anche

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \tag{1.28}$$

Osservazione. Ovviamente il teorema di de L'Hospital vale anche per i limiti da sinistra $(x \to x_0^-)$ e quindi per il limite (ordinario) per $x \to x_0$.

1.14 Formula di Taylor con il resto di Peano

Teorema 1.14 (Formula di Taylor locale, con il resto di Peano)**.** *Sia f una funzione con derivate di ogni ordine su un intervallo aperto I dell'asse reale. Fissiamo un punto x_0 in I e un intero positivo n. Definiamo il resto $R_n(x)$ come la differenza tra $f(x)$ e il polinomio di Taylor di f di ordine n nel punto x_0:*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$$

Allora il resto $R_n(x)$ è $o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$, cioè $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

Dimostrazione. Per semplicità, vediamo il caso $n=2$. (Il caso generale si dimostra nello stesso modo). Dobbiamo allora dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=0 \tag{1.29}$$

Si controlla facilmente che sono soddisfatte le condizioni per potere usare la regola di de L'Hospital. (Infatti, numeratore e denominatore sono derivabili in tutto un intorno di x_0, sono nulli in x_0, e la derivata del denominatore è diversa da zero per $x \neq x_0$) Il rapporto tra le derivate del numeratore e del denominatore è dato da

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)}$$

Applichiamo ancora una volta la regola di de L'Hospital, e otteniamo:

$$\frac{f''(x)-f''(x_0)}{2}$$

Poiché la funzione $f''(x)$ è continua (se una funzione f ha derivate di ogni ordine, tutte le derivate devono essere continue), si ha $\lim_{x\to x_0} f''(x)=f''(x_0)$, e quindi

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{2}$$

(Nel caso di n arbitrario, iterando n volte la regola di de l'Hospital, si arriva a $\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{n!}$, che vale zero, perché $f^{(n)}$ è continua in x_0.) Dunque, per il teorema di de L'Hospital, anche il limite iniziale (1.29) esiste e vale 0, come volevamo dimostrare. Q.E.D.

Commento. Abbiamo dimostrato il teorema di Taylor (locale) 1.14 nell'ipotesi che f sia infinitamente derivabile. Non è difficile dimostrare che la stessa tesi vale anche in ipotesi meno restrittive. Vale infatti il seguente

Teorema [Formula di Taylor locale] *Supponiamo che f sia derivabile n volte in un punto x_0 (n intero positivo). Poniamo*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$$

Allora, il resto $R_n(x)$ è $o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$.